

в частности, при $s_0 = 0$

$$E_{\lambda}^1(k, 0) \approx \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \sin kz, \quad E_{\lambda}^2(k, 0) \approx \frac{x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \sin kz.$$

Эти решения естественно возникают в задачах с локализованными начальными данными.

З а м е ч а н и е 3. В физике плазмы и магнитосферной физике волны, отвечающие непрерывному спектру, называют альвеновскими и говорят, что каждая силовая линия B_0 (струна) звучит со своими собственными альвеновскими частотами, определяемыми из одномерной задачи. В неоднородном случае, впрочем, соседние силовые линии тоже принимают участие в колебании. Наличие сингулярности свидетельствует об эффективной локализации соответствующей моды (⁵, ⁶).

З а м е ч а н и е 4. Спектральные задачи для Z -эллиптических операторов являются естественными обобщениями спектральных задач для уравнений с периодическими коэффициентами (³), записываемых в виде

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ix \frac{\partial u}{\partial z} + q(z)u = \lambda u, \quad u(x, 0) = u(x, 1), \quad u'(x, 0) = u'(x, 1),$$

где $u(x, z)$ определена на прямоугольнике $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
24 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

¹ В.Л. Гинзбург, А.А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, М., 1970. ² А.Г. Асланян, В.Б. Лидский, Распределение собственных частот тонких упругих оболочек, М., 1974. ³ Дж. Займан, Современная квантовая теория, М., 1971. ⁴ К. Йоргенс, И. Вайдман, Спектральные свойства гамильтоновых операторов, М., 1976. ⁵ А.Л. Крылов, Е.Н. Федоров, ДАН, т. 231, № 1, 68 (1976). ⁶ H.R. Radoski, Planet. Space Sci., v. 19, 1072 (1971).

УДК 517.946:536.24

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Академик А.А. САМАРСКИЙ, В.А. ГАЛАКТИОНОВ, С.П. КУРДЮМОВ, А.П. МИХАЙЛОВ

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ДИФфуЗИИ В СРЕДАХ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Изучаются необычные свойства процессов диффузии на примере задачи о распространении тепла в среде с постоянной теплопроводностью в условиях, когда на границе среды температура или поток тепла растут в так называемом режиме с обострением, т.е. обращаются в бесконечность за конечное время обострения.

Процессы с обострением, возникающие в среде либо под действием граничных режимов (¹⁻⁷), либо из-за наличия в ней объемных источников тепла (⁸⁻¹⁰) и приводящие к метастабильной локализации ("инерции") тепла и горения, ранее подробно изучались при теплопроводности, зависящей от температуры.

В настоящей работе показано, что эффект "инерции" тепла имеет место и в среде с постоянными теплофизическими свойствами, что значительно расширяет возможности его экспериментального исследования и применения.

Выделен класс граничных режимов с обострением (S - и LS -режимов), приводящих к эффективной локализации процесса диффузии тепла в течение времени обострения в области конечных размеров. Это означает, что несмотря на неограниченное возрастание температуры в зоне локализации и количества прорывающей в нее энергии вне зоны локализации температура и количество тепла ограничены в течение всего процесса.

Показано, что при более быстром, чем в S - и LS -режимах, нарастании температуры на границе (в так называемом HS -режиме) температура в любой точке среды неограниченно увеличивается и локализация тепла, так же как и в случае режимов без обострения, отсутствует.

1. Диффузия тепла в полупространство описывается уравнением

$$(1) \quad T_t = k_0 T_{rr}, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < t_0 \leq t < 0.$$

Температура на границе растет в режиме с обострением

$$(2) \quad T(0, t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow 0;$$

здесь $T(r, t)$ — температура, $k_0 = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности. Не ограничивая общности, положим

$$(3) \quad T(r, t_0) = 0, \quad 0 < r < \infty.$$

В задаче (1)–(3) имеет место метастабильная локализация тепла, если найдется $r_\Phi = \text{const} < \infty$ такое, что для всех $r > r_\Phi$ выполнено

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_r^\infty T(\eta, t) d\eta < \infty.$$

Областью локализации называется часть пространства $0 \leq r \leq r_\Phi$, в которой $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ (за исключением, быть может, точки $r = r_\Phi$).

2. Классификация граничных законов (2), соответствующих S -, LS - и HS -режимам распространения тепла, проводится с помощью интеграла, дающего решение задачи (1)–(3)

$$(5) \quad T(r, t) = \frac{r}{2\sqrt{k_0\pi}} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{r^2}{4k_0(t-\tau)}\right] (t-\tau)^{-3/2} T(0, \tau) d\tau.$$

а) Если

$$(6) \quad T(0, t) = T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^{-1}],$$

где $T_0 > 0$, $R_0 > 0$, ν — константы, то осуществляется локализация тепла в S -режиме.

Из (5) следует, что неравенство (4) выполняется при всех $r > r_\Phi = 2(k_0 R_0)^{1/2}$. Внутри зоны локализации $0 \leq r \leq r_\Phi$ температура при $t \rightarrow 0$ неограниченно возрастает (при $\nu \leq 1/2$ еще и в точке $r = r_\Phi$). Вне указанной области температура ограничена предельным распределением

$$T(r, 0) = \frac{T_0 r^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi} k_0} \left[1 - \left(\frac{r_\Phi}{r} \right)^2 \right]^{\nu-1/2} \int_x^\infty \exp(-u) u^{-\nu-1/2} du,$$

$$x = \frac{r^2 - r_\Phi^2}{4k_0(-t_0)}.$$

б) В силу теорем сравнения любой граничный закон, мажорируемый S -режимом (6) от момента $t = t_0$ до $t = 0$, также приводит к локализации тепла в области не большей, чем $0 \leq r \leq r_\Phi$.

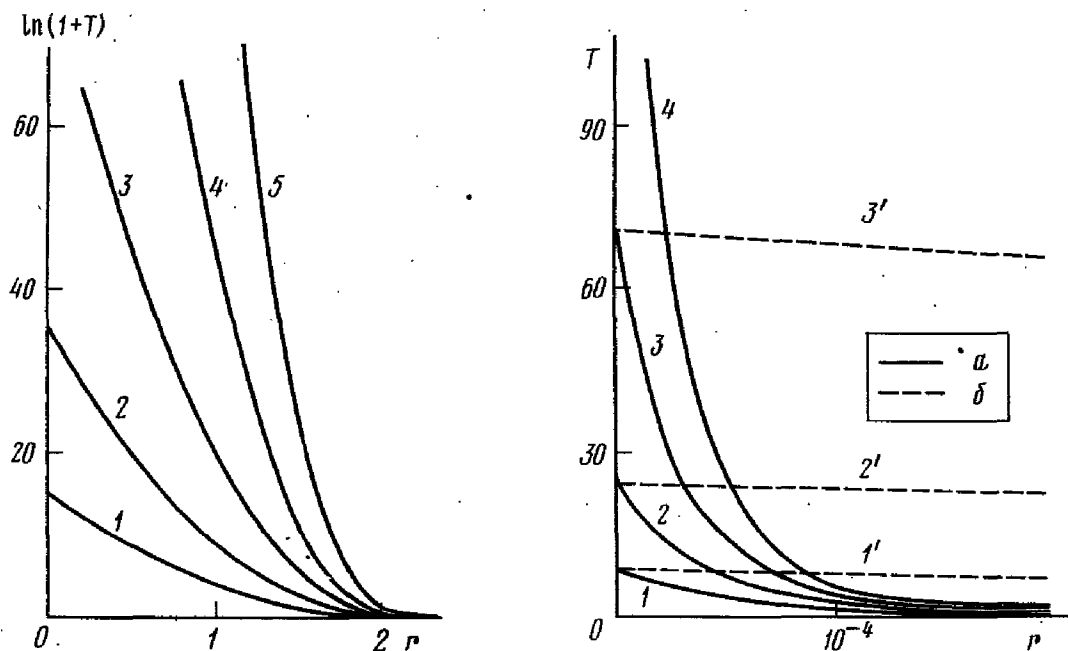


Рис. 1. Параметры: $n = -1$, $k_0 = T_0 = R_0 = 1$, $t_0 = -1$, $\nu = 0$, $r_\Phi = 2$, $t_1 = -0,067$; $t_2 = -0,029$; $t_3 = 0,012$; $t_4 = -0,0056$; $t_5 = -0,0025$

Рис. 2. a — S -режим ($n = -1$, $r_\Phi = 2 \cdot 10^{-4}$), b — HS -режим ($n = -2$). Параметры: $k_0 = T_0 = 1$, $R_0 = 10^{-5}$, $t_0 = -1$, $\nu = 0$, $t_1 = -4,6 \cdot 10^{-9}$; $t_2 = -3,1 \cdot 10^{-9}$; $t_3 = -2,32 \cdot 10^{-9}$; $t_4 = -1,9 \cdot 10^{-9}$; $t'_1 = -6,8 \cdot 10^{-5}$; $t'_2 = -5,6 \cdot 10^{-5}$; $t'_3 = -4,8 \cdot 10^{-5}$

Например, если $T(0, t) \leq T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^n]$, $-1 < n < 0$ (ср. с (6)), то (4) справедливо при всех $r > 0$ (LS -режим). Особенностью LS -режима является обращение температуры в бесконечность при $t = 0$ в граничной точке $r = 0$. Температура среды ограничена в течение всего процесса предельным распределением

$$(7) \quad T(r, 0) = \frac{T_0 r^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi} k_0^\nu} \int_y^\infty \exp\left[-u + \frac{R_0 r^{2n}}{(4k_0)^n} u^{-n}\right] u^{-\nu-1/2} du,$$

$$y = \frac{r^2}{4k_0(-t_0)}$$

в) Если $T(0, t) \geq T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^n]$, $n < -1$ (ср. с (6)), то $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ для любых $r > 0$ (HS -режим), и локализация тепла отсутствует.

3. Граничный S -режим (6), разделяющий LS - и HS -режимы, является экспоненциальной функцией времени, поэтому задача (1), (3) с граничным условием

$$(8) \quad T(0, t) = T_0 \{ \exp[R_0(-t)^n] - 1 \}, \quad n < 0,$$

рассматривается более подробно.

Заменой $V(r, t) = T_0 \ln[1 + T(r, t)/T_0]$ задача (1), (3), (8) преобразуется к виду

$$(9) \quad \dot{V}_t = k_0 V_{rr} + (k_0/T_0) V_r^2, \quad 0 < r < \infty, \quad t_0 \leq t < 0;$$

$$(10) \quad V(0, t) = T_0 R_0 (-t)^n, \quad t_0 \leq t < 0, \quad V(r, t_0) = 0, \quad 0 < r < \infty,$$

где граничное условие (10) является степенной функцией времени. Асимптотическая (при $t \rightarrow 0$) стадия процесса распространения тепла в задаче (9), (10) описывается автомодельным решением вырожденной задачи

$$(11) \quad u_t = (k_0/T_0) u_r^2, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty \leq t < 0;$$

$$(12) \quad u(0, t) = T_0 R_0 (-t)^n, \quad -\infty \leq t < 0, \quad u(r, -\infty) = 0, \quad 0 < r < \infty,$$

где $u(r, t) = T_0 R_0 (-t)^n f(\xi)$, $\xi = r/[k_0 R_0 (-t)^{n+1}]^{1/2}$, а $f(\xi)$ определяется из алгебраического уравнения

$$(13) \quad [P(f, \xi) - (n+1)/4]^{(n+1)/2} [P(f, \xi) - (n-1)/4]^{-(n-1)/2} = (-n)^{1/2} \xi^{-1}$$

при $P(f, \xi) = \{[(n+1)/4]^2 - nf\xi^{-2}\}^{1/2}$, $0 \leq \xi < \infty$.

Из уравнения для разности $V(r, t) - u(r, t)$ с помощью принципа максимума установлено, что при всех $t > t_1$

$$(14) \quad |\theta(\xi, t) - f(\xi)| < R_0^{-1} C_0 (-t)^{-n} \ln(t_0/t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0,$$

где $\theta(\xi, t) = (T_0 R_0)^{-1} (-t)^{-n} V[\xi(k_0 R_0)^{1/2} (-t)^{(n+1)/2}, t]$ и $C_0 = \max |f''(\xi)| < \infty$, $t_1 = t_0 \exp[-R_0 C_0^{-1} (-t_0)^n]$.

Из (14) следует, что поведение температуры $T(r, t)$ с улучшающейся при $t \rightarrow 0$ относительной точностью описывается функцией $U(r, t) = T_0 \{\exp[u(r, t)/T_0] - 1\}$:

а) при $n = -1$ (*S*-режим) уравнение (13) имеет аналитическое решение

$$T(r, t) \sim U(r, t) = T_0 \{\exp[R_0 (-t)^{-1} (1 - r/r_\Phi)^2] - 1\}, \quad 0 \leq r \leq r_\Phi,$$

где глубина локализации $r_\Phi = 2(k_0 R_0)^{1/2}$ совпадает с вычисленной из (5);

б) при $-1 < n < 0$ (*LS*-режим) температура ограничена предельным распределением, совпадающим с (7) при $r \rightarrow 0$

$$T(r, t) \rightarrow T_0 \{\exp[C(n)(R_0 r^{2n}/k_0^n)^{1/(n+1)}] - 1\}, \quad t \rightarrow 0,$$

где $C(n) = -[(n+1)/2n] \cdot 2^{-2n/(n+1)} (-n)^{1/(n+1)}$;

в) при $n < -1$ (*HS*-режим) температура в области $0 \leq r < [k_0 R_0 (-t)^{n+1}]^{1/2} \cdot 2(-n)^{n/2} (-n-1)^{-(n+1)/2}$ изменяется по закону

$$T(r, t) \sim T(0, t) \exp[-r(-nR_0/k_0)^{1/2} (-t)^{(n-1)/2}], \quad t \rightarrow 0.$$

Эффективная глубина (полуширина) проникновения тепла $r_{\text{эф}}$ ($T(r_{\text{эф}}(t), t)/T(0, t) = 1/2$) во всех трех режимах сокращается по закону

$$r_{\text{эф}}(t) = (-t)^{(1-n)/2} \ln 2 [k_0/R_0 (-n)]^{1/2} + o[(-t)^{(1-n)/2}], \quad t \rightarrow 0.$$

Отметим, что "вырождение" в смысле (10) уравнения (5) в нелинейное уравнение первого порядка (7) имеет место в ряде других задач (например, в задачах горения), что облегчает их исследование.

4. Эффект локализации тепла существует и в многомерном случае, причем справедливы основные результаты, полученные в одномерной геометрии (зависимость от времени граничного *S*-режима, температуры, полуширины). Так же как в (3), строятся области локализации с границами, составленными из плоских поверхностей (граней). В зависимости от граничных условий область локализации имеет весьма разнообразную форму (установлено, что ее границей может быть любая из поверхностей второго порядка). Например, граничный режим $T(0, x_2, t) = \exp[(x_2^2 + 2x_2)/4(-t)]$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $T(0, x_2, t) = 0$, $x_2 < 0$, $x_2 > 1$; $t \leq t < 0$, заданный на границе $x_1 = 0$ полупространства $E_2 \{0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$, локализован в области $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 3$. Принцип суперпозиции позволяет объединять области локализации, соответствующие различным граничным режимам, и получать, в частности, области с негладкими границами.

5. В отличие от задачи со степенными граничными режимами, действующими на нелинейную среду с коэффициентом теплопроводности $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$ (см. (1-4)), в рассматриваемом случае $k(T) = k_0$, а граничные режимы — экспоненциальные (п. 3, $T(0, t) \sim \exp[(-t)^n]$). Поэтому задача не допускает точной автомодельной постановки. Показано, что обычно применяемая оценка эффективной

глубины проникновения тепловой волны $r_{\text{эф}}(t) \sim [k_0(-t)]^{1/2}$ неправильно описывает асимптотическую стадию процесса, ее реальное значение при $t \rightarrow 0$ имеет вид $r_{\text{эф}}(t) \sim (-t)^{(1-n)/2}$ и определяется из анализа автомодельных решений вырожденной задачи.

На рис. 1 даны результаты численного расчета задачи о проникновении тепла в S -режиме. Установление автомодельных закономерностей в S -режиме происходит при росте температуры на границе в 10^4 раз (в нелинейной среде требуется рост в 10 раз). При дальнейшем росте температуры на границе численное решение исходной задачи (9), (10) практически совпадает с аналитическим решением вырожденной задачи (11), (12).

Численное сравнение HS - и S -режимов в зависимости от безразмерного параметра $\alpha = R_0(-t_0)^n$ показывает, что при $\alpha = 1$ различия между ними не существенны при росте граничной температуры в 10^2 раз за равное время. При $\alpha = 10^{-8}$ и том же росте температуры на границе глубины проникновения тепла различаются на порядок (см. рис. 2).

Глубина локализации в меди для S -режима при $\alpha = 1$ и $|t_0| = 1$ с равна 10 см, при $\alpha = 10^{-8}$ и том же $|t_0|$ — порядка 10^{-3} см.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др., ДАН, т. 223, № 6, 1344 (1975). ² С.П. Курдюмов, В сб.: Проблемы теории плазмы, Киев, "Наукова думка", 1976, стр. 278. ³ С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 22, 1977. ⁴ А.П. Михайлов, Препринт ИПМ АН СССР, № 64, 1977. ⁵ Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 103, 1977. ⁶ А.А. Самарский, И.М. Соболев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 702 (1963). ⁷ С.П. Курдюмов, Н.В. Змитренко, Журн.-прикл. мех. и техн. физ., № 1, 3 (1977). ⁸ А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др., ДАН, т. 227, № 2, 321 (1976). ⁹ Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 74, 1976. ¹⁰ А.А. Самарский, Г.Г. Еленин и др., ДАН, т. 237, № 6, 1330 (1977). ¹¹ С.П. Курдюмов, Г.Г. Малицкий и др., Препринт ИПМ АН СССР, № 77, 1978.