Доклады Академии наук СССР
1979. Том 248, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.А. ГАЛАКТИОНОВ, С.П. КУРДЮМОВ, А.П. МИХАЙЛОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

О СРАВНЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Многие физические процессы (например, теплопередача и горение в сплошной нелинейной среде) описываются нелинейными уравнениями параболического типа. Один из методов исследования этих процессов основан на сравнении решений фиксированного уравнения с разными дополнительными условиями (граничными и начальными данными). В качестве мажорирующего (минорирующего) решения выбирается какое-либо частное решение, соответствующее краевым условиям специального вида. Однако нетривиальные частные решения, как правило, можно получить лишь для уравнений простейшего вида (например, для уравнений со степенными нелинейностями).

Поэтому возникает задача сравнения решений, отвечающих разным параболическим уравнениям (с разными типами нелинейностей, коэффициентами и т.д.). В данной работе показано, что такое сравнение возможно, если наложить некоторые условия сравнения на операторы уравнений, а также подчинить краевые данные для мажорирующего решения определенным требованиям критичности. Выполнение этих требований обеспечивает существование априорных поточечных оценок старшей производной мажорирующего решения через младшие. На этих оценках основан предложенный метод. В работе ([5]) этот метод был использован для исследования эффекта метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.

Изложение проводится для первой краевой задачи, однако все результаты без принципиальных изменений переносятся на случай задачи Коши.

1. Введем обозначения: $\Omega = \{x: 0 < x < \infty\}$, $Q_T = \{(t,x):\ 0 < t \leqslant T,\ x \in \Omega\}$. Пусть $v_0(x)$ и $v(t,x)$ – функции, определенные в Ω и Q_T соответственно. Тогда будем обозначать: $\Omega^0(v_0) = \{x: x \in \Omega, v_0(x) > 0\}$, $Q_T^0(v) = \{(t,x): (t,x) \in Q_T, v(t, x) > 0\}$, $S_T(v) = \overline{Q_T^0}(v) \setminus Q_T^0(v)$, $P_T(v) = Q_T \setminus S_T(v)$.

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу для параболического уравнения

(1) $\quad u_T = \mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx})$,

в котором функция $L(p,q,r)$ один раз непрерывно дифференцируема по всем аргументам при $p > 0$, $-\infty < q, r < \infty$, с краевыми условиями

(2) $\quad u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0,\ x \in \Omega,\ u_0(x) \in C^2(\Omega)$,

(3) $\quad u(t,0) = u_1(t) \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u_1(t) \in C^1([0,T])$.

Пусть существует неотрицательное решение этой задачи ([1,2]) и $\sup\limits_{(t,x) \in Q_T} u(t, x) = M$. В силу параболичности уравнения (1), т.е. условия $\partial L/\partial r > 0$, справедливого при всех $p > 0$, $-\infty < q, r < \infty$ существует функция $L^{-1}_{(3)}(p,q,r)$ такая, что выполнено тождество $L(p,q,L^{-1}_{(3)}(p,q,r)) \equiv r$. Положим $\mathring{L}^{-1}_{(3)}(p,q) = L^{-1}_{(3)}(p,q,0)$. Функции $L^{-1}_{(3)}$ и $\mathring{L}^{-1}_{(3)}$ дифференцируемы по всем аргументам в силу такой же гладкости функции L.

2. Определение. Краевые данные (2), (3) назовем критическими, если решение задачи (1)–(3) при всех $(t,x) \in Q_T$ удовлетворяет неравенству $u_t(t,x) \geqslant 0$.

Л е м м а 1. *Пусть* $u(t, x) \in C^{2,4}_{t,x}(Q_T)$. *Тогда для критичности краевых данных необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

(4) $\mathcal{L}(u_0(x)) \geqslant 0,\ x \in \Omega;\ u_1'(t) \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$

С л е д с т в и е. *В условиях леммы* 1 *всюду в* Q_T *справедлива поточечная оценка старшей производной решения через младшие*

(5) $u_{xx} \geqslant \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(u, u_x)$.

З а м е ч а н и е. Для оператора общего вида $\mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx}, t, x)$ лемма 1 остается в силе, если функция $L(p, q, r, t, x)$ удовлетворяет дополнительному требованию

(6) $$\frac{\partial}{\partial t} L(p, q, \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p, q, t, x), t, x) \geqslant 0,\ (t, x) \in Q_T,\ 0 < p \leqslant M,\ -\infty < q < \infty.$$

3. Поточечная оценка (5) имеет место в условиях, аналогичных (4), для вырождающегося параболического уравнения (1) с оператором

(7) $\mathcal{L}(u) = (k(u)\, u_x)_x$,

в котором функция $k(u)$ определена для $u \geqslant 0$, $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$. Для этого уравнения рассмотрим в Q_T первую краевую задачу с условиями

(8) $u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0,\ x \in \Omega,\ u_0(x) \in C^2(\Omega^0(u_0)) \cap C(\Omega),$

(9) $u(t, 0) = u_1(t) \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u_1(t) \in C^1([0, T]).$

Пусть существует обобщенное решение сформулированной задачи в смысле работы ([3]), где, в частности, установлено, что в $P_T(u)$ функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению в обычном смысле. Условия критичности краевых данных в $P_T(u)$ определим так же, как для невырождающихся уравнений.

Л е м м а 2. *Пусть* $u(t, x) \in C^{2,4}_{t,x}(P_T(u)) \cap C(Q_T)$. *Тогда для критичности краевых данных* (8), (9) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$(k(u_0(x))u_0'(x))' \geqslant 0,\ x \in \Omega^0(u_0);\ u_1'(t) \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$

С л е д с т в и е. *В условиях леммы* 2 *всюду в* $Q_T^0(u)$ *справедлива поточечная оценка старшей производной решения* (*см.* (5))

$u_{xx} \geqslant -(k'(u)/k(u))\, u_x^2.$

З а м е ч а н и е. Если в операторе (7) положить $k = k(u, t, x)$, то лемма 2 остается в силе при дополнительных требованиях (см. (7))

$\partial^2 \ln k/\partial u\, \partial t \geqslant 0,\ \partial^2 \ln k/\partial x\, \partial t \leqslant 0,\ 0 < u \leqslant M,\ (t, x) \in Q_T.$

В доказательстве леммы 2 (доказательства лемм 1 и 2 представлены в ([5])) использовано условие непрерывности в $P_T(u)$ функции $k(u)\, u_x$ ([3,4]). При выполнении этого условия лемма 2 также справедлива для вырождающегося уравнения (1) с оператором

$\mathcal{L}(u) = (k(u)\, u_x)_x + Q(u),$

в котором функция $Q(u)$ определена для $u \geqslant 0$ и $Q(0) \geqslant 0$. Поточечная оценка (5) в этом случае имеет вид

$u_{xx} \geqslant -(k'(u)/k(u))\, u_x^2 - Q(u)/k(u).$

4. Перейдем теперь к изложению метода сравнения решений параболических уравнений. Рассмотрим в Q_T две задачи для уравнений ($\nu = 1,2$)

(10) $u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(u^{(\nu)}, u_x^{(\nu)}, u_{xx}^{(\nu)})$

с различными операторами $\mathcal{L}^{(\nu)}$ и краевыми условиями

(11) $u^{(\nu)}(0,x)=u_0^{(\nu)}(x)\geqslant 0,\ x\in\Omega,\ u_0^{(1)}(x)\in C(\Omega),\ u_0^{(2)}(x)\in C^2(\Omega);$

(12) $u^{(\nu)}(t,0)=u_1^{(\nu)}(t)\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ u_1^{(1)}(t)\in C([0,T]),\ u_1^{(2)}(t)\in C^1([0,T]).$

Будем считать выполненными следующие неравенства:

(13) $u_0^{(2)}(x)\geqslant u_0^{(1)}(x),\ x\in\Omega;\ u_1^{(2)}(t)\geqslant u_1^{(1)}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T.$

Кроме того, предполагаем, что функции $L^{(\nu)}(p,q,r)$, $\nu=1,2$, один раз непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Тогда верна следующая теорема сравнения.

Теорема 1. *Пусть* $u^{(1)}(t,x)\in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$, $u^{(2)}(t,x)\in C_{t,x}^{2,4}(Q_T)$ *и* $u^{(\nu)}(t,x)\leqslant M$, $\nu=1,2$. *Пусть краевые условия* (11), (12) *для* $\nu=2$ *являются критическими и, кроме того, при всех* $0<p\leqslant M$, $-\infty<q,\ r<\infty$ *выполняются неравенства*

(14) $\dfrac{\partial}{\partial r}[L^{(2)}(p,q,r)-L^{(1)}(p,q,r)]\geqslant 0,\ L^{(1)}(p,q,\overset{0}{L}{}_{(3)}^{(2)-1}(p,q))\leqslant 0.$

Тогда $u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x)$ *при всех* $(t,x)\in Q_T$.

В доказательстве теоремы 1 используется поточечная оценка (5) старшей производной $u_{xx}^{(2)}$ через младшие $u_x^{(2)}$, $u^{(2)}$.

5. Аналогичная теорема сравнения имеет место в случае вырождающихся параболических уравнений

(15) $u_t^{(\nu)}=\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=(k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\,u_x^{(\nu)})_x,$

для которых рассмотрим в Q_T первые краевые задачи с условиями

(16) $u^{(\nu)}(0,x)=u_0^{(\nu)}(x)\geqslant 0, x\in\Omega,\ u_0^{(1)}(x)\in C(\Omega), u_0^{(2)}(x)\in C^2(\Omega^0(u_0^{(2)}))\cap C(\Omega),$

(17) $u^{(\nu)}(t,0)=u_1^{(\nu)}(t)\geqslant 0, 0\leqslant t\leqslant T, u_1^{(1)}(t)\in C([0,T]), u_1^{(2)}(t)\in C^1([0,T]).$

Теорема 2. *Пусть* $u^{(1)}(t,x)\in C_{t,x}^{1,2}(P_T(u^{(1)}))\cap C(Q_T)$, $u^{(2)}(t,x)\in C_{t,x}^{2,4}(P_T(u^{(2)}))\cap C(Q_T)$. *Пусть краевые условия* (16), (17) *для* $\nu=2$ *являются критическими и, кроме того, для всех* $0<p\leqslant M$ *справедливы неравенства* (*см.* (14))

(18) $k^{(2)}(p)/k^{(1)}(p)\geqslant 1,\ [k^{(2)}(p)/k^{(1)}(p)]'\geqslant 0.$

Тогда $u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x)$ *при всех* $(t,x)\in Q_T$.

Такая же теорема сравнения формулируется для вырождающихся уравнений (10) с операторами

$$\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=(k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\,u_x^{(\nu)})_x+Q^{(\nu)}(u^{(\nu)}),\ \nu=1,2.$$

Она может быть использована при анализе вопросов, рассматривавшихся в ([6-9]). В этом случае к условиям сравнения (17) добавляется еще одно неравенство

$$Q^{(2)}(p)/k^{(2)}(p)-Q^{(1)}(p)/k^{(1)}(p)\geqslant 0,\ 0<p\leqslant M.$$

Доказательство теорем 1 и 2 и их применение к исследованию метастабильной локализации ("инерции") тепла приведены в ([5]). Там же показано, что основные результаты данной работы без существенных изменений переносятся на случай параболических уравнений со многими независимыми переменными и операторами вида

$$\mathcal{L}(u) = L(u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N}, \Delta u), \quad \Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial^2/\partial x_j^2.$$

Авторы благодарны А.А. Арсеньеву за полезные обсуждения.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
22 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *О.А. Олейник, С.Н. Кружков,* УМН, т. 16, 5, 115 (1961). [2] *А.Фридман,* Уравнения в частных производных параболического типа, М., "Мир", 1968. [3] *О.А. Олейник, А.С. Калашников, Чжоу-Юй-Линь,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 22, 5, 667 (1958). [4] *D.G. Aronson,* SIAM J. Appl. Math., v. 17, 2, 461 (1969). [5] *В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 21, 1979. [6] *А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др.,* ДАН, т. 227, № 2, 321 (1976). [7] *А.А. Самарский, Г.Г. Еленин и др.,* ДАН, т. 237, № 6, 1330 (1977). [8] *А.А. Самарский, Н.В. Змитренко и др.,* ДАН, т. 223, № 6, 1344 (1975). [9] *С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов и др.,* Препринт ИМП АН СССР, № 22, 1977.