Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов,
А.А. Самарский.

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ АПРИОРНЫХ ПОТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Препринт № 21 за 1979 г.

Москва.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Введение 5

Сокращенные обозначения 12

§ I. Априорные поточечные оценки старшей производной 14

п.I.I. Определение критичности краевых условий 14

п.I.2. Необходимые и достаточные условия критичности краевых данных 16

п.I.3. Условия критичности краевых данных для одного класса вырождающихся параболических уравнений 20

§ 2. Сравнение решений параболических уравнений 27

п.2.I. Постановка задачи 27

п.2.2. Основная теорема сравнения 28

п.2.3. Сравнение решений вырождающихся параболических уравнений 33

п.2.4. Некоторые примеры 39

п.2.5. Уравнения со многими пространственными переменными 43

§ 3. Метастабильная локализация возмущений 48

п.3.I. Постановка задачи. Определение локализации возмущений 48

п.3.2. Достаточные условия локализации возмущений или ее отсутствия 51

п.3.3. Локализация возмущений в многомерных областях 53

Литература 57

Введение

В работе рассматриваются два вопроса теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа – априорные поточечные оценки старшей пространственной производной решения через младшие и сравнение решений задач для различных параболических уравнений.

I. В § I описан метод, с помощью которого можно получить поточечные оценки старшей (в нашем случае – второй) производной решения через младшие. Этот метод основан на принципе максимума для параболических уравнений и его идея состоит в следующем. Ставится задача определения ограничений на краевые данные и оператор $\mathcal{L}$ параболического уравнения

$$u_t = \mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx}),\ (t,x) \in Q_T,$$

которые обеспечивают неравенство $u_t \geqslant 0$ всюду в Q_T. (относительно смысла Q_T и Γ_T см. список сокращенных обозначений). Из этого неравенства получаем тогда требуемую оценку $u_{xx} \geqslant \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(u, u_x)$, где функция $\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}$ такова, что $L(u, u_x, \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(u, u_x)) \equiv 0$. Для решения сформулированной задачи выписывается уравнение (параболическое), которому удовлетворяет функция $z = u_t$, и определяются условия, при которых $z \geqslant 0$ в Q_T (т.е. выясняется, в каком случае уравнение для z не допускает отрицательных значений этой функции, если $z(t,x) \geqslant 0$ при $(t,x) \in \Gamma_T$).

Полученные в § I поточечные оценки имеют дифференциальный характер и отличаются от априорных (суммарных или интегральных) оценок норм решения или его производных, которые широко используются при доказательстве существования решений задач для пара-

болических и эллиптических уравнений. В данном случае априорность поточечных оценок заключается в том, что их существование для данного эллиптического оператора определяется не конкретными краевыми условиями (т.е. свойствами определенного решения), а принадлежностью краевых данных к некоторому классу функций, удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных неравенств, отвечающих заданному оператору.

В § I показано, что наличие поточечной оценки второй производной решения имеет место для широкого класса равномерно параболических уравнений, не зависит от конкретного вида эллиптического оператора и определяется свойствами краевых условий. Показано, что метод, изложенный в § I, позволяет получить априорные оценки для равномерно параболических уравнений, для которых сформулированы либо задача Коши, либо первая краевая задача. Установлено, что сам факт существования оценки не накладывает никаких ограничений на вид оператора, если последний не имеет явного вхождения переменной t. В противном случае оператор должен удовлетворять определенному требованию.

Хорошо известна поточечная оценка решения (т.е. его нулевой производной) – это принцип максимума для параболических уравнений с дивергентной эллиптической частью. Здесь также существование оценки не накладывает каких-либо ограничений на вид эллиптического оператора. То же самое можно сказать об оценке, вытекающей из обобщенного принципа максимума (См. [I2-I3]). Заметим, что структуру этих оценок, так же, как и в нашем случае, можно определить только в задаче Коши или первой краевой задаче, поскольку в других краевых задачах априорно не известно значение решения на границе рассматриваемой области. Вывод априорных оценок второй производной связан с более тонким анали-

зом краевых условий по сравнению с выводом оценок самого решения из принципа максимума - краевые данные должны удовлетворять определенным "условиям критичности" (системе обыкновенных дифференциальных неравенств).

Предложенный метод поточечной оценки второй производной решения служит естественным продолжением теории оценок нулевой производной решения с помощью принципа максимума (заметим, что в обоих случаях речь идет об оценках четной производной решения, что связано с особенностью краевых условий задачи Коши и первой краевой задачи).

В § I показано, что критические краевые условия обеспечивают существование поточечных оценок старшей производной в задачах для вырождающихся параболических уравнений, имеющих решение, вообще говоря, в некотором обобщенном смысле.

2. В § 2 на основе априорных поточечных оценок § I формулируется метод сравнения решений задач для различных параболических уравнений. Задача сравнения решений параболических уравнений в различных формулировках ставилась целым рядом авторов (См. [I4-I7,26]). В § 2 определяются требования, выполнение которых обеспечивает мажорирование одного решения другим. Определяются конкретный вид требований на операторы равномерно параболических уравнений и соответствующие краевые условия. В предложенном здесь методе сравнения самую существенную роль играют поточечные оценки старшей производной (§ I). Показано, что сравнение решений, соответствующих задачам для различных параболических уравнений, обеспечивается, помимо некоторых условий на краевые данные задач, двумя неравенствами, связывающими операторы рассматриваемых уравнений. Идея предложенного метода сравнения заключается в следующем. Пусть $u^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$ - решения уравнений

$$u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(u^{(\nu)}, u_x^{(\nu)}, u_{xx}^{(\nu)}), \ (t,x) \in Q_T,$$

и пусть $u^{(2)} - u^{(1)} \geqslant 0$ при $(t,x) \in \Gamma_T$. Предположим, что существует поточечная оценка старшей производной решения $u^{(2)}$, т.е.

$$u_{xx}^{(2)} \geqslant \overset{\circ}{L}{}_{(3)}^{(2)-1}(u^{(2)}, u_x^{(2)}). \tag{I}$$

Для разности решений $z = u^{(2)} - u^{(1)}$ выписывается параболическое уравнение, откуда следует, что сравнение решений возможно в том случае, если

$$L^{(2)}(u^{(2)}, u_x^{(2)}, u_{xx}^{(2)}) \geqslant L^{(1)}(u^{(2)}, u_x^{(2)}, u_{xx}^{(2)}). \tag{2}$$

Метод сравнения построен на основе анализа неравенства (2) с помощью оценки (I).

Предположим, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[L^{(2)}(p,q,z) - L^{(1)}(p,q,z)\right] \geqslant 0. \tag{3}$$

Тогда, используя (I), получаем еще одно условие сравнения

$$\left[L^{(2)}(p,q,z) - L^{(1)}(p,q,z)\right]\Big|_{z = \overset{\circ}{L}{}_{(3)}^{(2)-1}(p,q)} \geqslant 0. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) лежат в основе предложенного метода сравнения решений.

В § 2 также установлено, что метод сравнения решений на основе поточечных оценок второй производной позволяет провести сравнение решений некоторых вырождающихся уравнений.

В заключительном пункте § 2 априорные поточечные оценки и теоремы сравнения решений получены применительно к уравнениям со многими пространственными переменными. Показано, что основ-

ные результаты §§ I,2, полученные для уравнений с одной пространственной переменной, переносятся без принципиальных изменений на многомерные уравнения с выделенным лапласианом. Анализируются также некоторые виды многомерных вырождающихся уравнений.

При анализе равномерно параболических уравнений использовались теоремы существования решений сформулированных задач, представленные в работах [I2-I4,27]. При анализе вырождающихся параболических уравнений были использованы результаты работ [9, II]. Следует сказать, что в настоящей работе для ряда рассматривавшихся здесь задач пока не доказаны теоремы существования решения (в основном это касается задач для вырождающихся параболических уравнений со многими пространственными переменными). Вообще при анализе вырождающихся параболических уравнений предполагалось, что некоторая функция, в определение которой входит само решение и все его первые пространственные производные, непрерывна на множестве неособых точек уравнения, принадлежащих рассматриваемой области. С физической точки зрения, если рассматривать задачу для вырождающегося уравнения как математическую модель, описывающую некоторый физический процесс (например, процесс распространения тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным выделением энергии), это дополнительное условие довольно естественно и отражает требование непрерывности некоторой физической характеристики процесса (например, потока тепла). Заметим, что это условие в том или ином виде обычно включается в определение обобщенного решения такой задачи (См., например, [9]).

3. В § 3 теоремы сравнения решений применяются для обоснования некоторых результатов по исследованию эффекта метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.

В работах [I-7] этот эффект (определение локализации в первой краевой задаче и задаче Коши дано в § 3) подробно исследовался применительно к среде с определенной (степенной) нелинейной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. В работе [5] сформулированы достаточные условия локализации или ее отсутствия для такой среды, а также определены классы краевых условий, обеспечивающих существование этого эффекта. Процесс распространения тепла в среде с нелинейной теплопроводностью описывается уравнением

$$T_t = (\kappa(T)T_x)_x, \tag{5}$$

где T - температура, а $\kappa(T)$ - нелинейный коэффициент теплопроводности. В [I-7] эффект метастабильной локализации тепла исследовался для $\kappa(T) = T^{\sigma}$, $\sigma > 0$. Для уравнения (5) в этом случае строятся соответствующие автомодельные решения, с помощью которых в [5] формулируются достаточные условия существования или отсутствия локализации (при этом используются теоремы сравнения решений по краевым данным работы [9]).

С помощью теорем сравнения настоящей работы удается распространить результаты [5] по локализации возмущений на коэффициенты $\kappa(T)$, представимые в виде

$$\kappa(T) = T^{\sigma}/[1+\lambda(T)], \tag{6}$$

где функция $\lambda(T)$ такова, что $\lambda(T) \geqslant 0$, $\lambda'(T) \geqslant 0$ при $T > 0$.

Сформулированы также достаточные условия локализации тепловых возмущений в многомерных областях (для коэффициентов вида (6)). При этом использовались результаты работы [4] .

где показана принципиальная возможность локализации тепла в многомерной геометрии.

4. Возможности метода сравнения, сформулированного в настоящей работе, естественно, не ограничиваются теми, которые отражены в § 3. Анализ условий сравнения решений уравнений с конкретными эллиптическими операторами, имеющими физический смысл, выделяет систему, вообще говоря, дифференциальных неравенств, связывающих физические характеристики процессов, описываемых этими уравнениями. Некоторые из этих неравенств имеют простой физический смысл, другие не имеют достаточно наглядной физической интерпретации.

Априорные поточечные оценки старшей производной, точнее, условия критичности краевых данных, помимо их применения в методе сравнения решений, сами по себе представляют большой интерес и могут быть использованы в анализе некоторых физических задач.

Результаты §§ 1,2 можно применить при анализе вопросов, рассмотренных в работах [18-25].

В настоящей работе исследование проводилось на примере нелинейных параболических уравнений. Естественно, все методы анализа могут быть перенесены на случай линейных уравнений (эта возможность предусмотрена в тексте работы), а также с некоторыми изменениями на случай дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Сформулированные методы сравнения можно применить и к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Авторы благодарны А.А.Арсеньеву за полезные обсуждения.

Сокращенные обозначения

Пусть $F(z_1, z_2, \dots, z_k)$ – функция K переменных ($K < 10$). Тогда будем обозначать

$$F_m(z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{\partial F}{\partial z_m}(z_1, z_2, \dots, z_k),$$

$$F_{mn}(z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{\partial^2 F}{\partial z_m \partial z_n}(z_1, z_2, \dots z_k).$$

R^N – N – мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_N)$ – произвольная точка в нем.

$\Omega^{(N)}$ – область в R^N, т.е. произвольное открытое связное множество точек R^N ($\Omega^{(N)}$ – не обязательно ограниченное).

$\partial\Omega^{(N)}$ – граница $\Omega^{(N)}$.

$\bar{\Omega}^{(N)}$ – замыкание $\Omega^{(N)}$, так что $\bar{\Omega}^{(N)} = \Omega^{(N)} \cup \partial\Omega^{(N)}$.

$$Q_T^{(N)} = \{(t,x) : 0 < t \leq T, x \in \Omega^{(N)}\}.$$

$$\Gamma_T^{(N)} = \{(t,x) : t = 0, x \in \Omega^{(N)}\} \cup \{(t,x) : 0 < t \leq T, x \in \partial\Omega^{(N)}\}.$$

$$\Omega_0^{(N)}(u_0) = \{x : x \in \Omega^{(N)}, u_0(x) > 0\}.$$

$$\mathring{Q}_T^{(N)}(u) = \{(t,x) : (t,x) \in Q_T^{(N)}, u(t,x) > 0\}.$$

$$S_T^{(N)}(u) = \bar{\mathring{Q}}_T^{(N)}(u) \setminus \mathring{Q}_T^{(N)}(u).$$

$$P_T^{(N)}(u) = Q_T^{(N)} \setminus S_T^{(N)}(u).$$

$$Q^{(N)}_{t_1,t_2} = \{(t,x): t_1 \leq t \leq t_2, x \in \Omega^{(N)}\}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Аналогично определяются $S^{(N)}_{t_1,t_2}(u)$, $P^{(N)}_{t_1,t_2}(u)$.

$$Q^{(N)}_T = \{(t,x): 0 < t < T, x \in \Omega^{(N)}\}.$$

Ω - область в R^1 (не обязательно ограниченная).

$$\Omega_1 = \{x: -\infty < x < \infty\}.$$

$$\Omega_2 = \{x: 0 < x < \infty\}.$$

Для $i = 1,2$ определяем $Q^i_T, \Gamma^i_T, \Omega_{i0}(u_0), \mathring{Q}^i_T(u)$, $S^i_T(u), P^i_T(u)$ так же, как это было сделано для многомерного случая. Индексы $i = 1,2$ в данном случае обозначают $x \in \Omega_1$ $(i=1)$, $x \in \Omega_2$ $(i=2)$.

$$Q^2_T = \{(t,x): 0 < t < T, x \in \Omega_2\}.$$

§ I. Априорные поточечные оценки старшей производной

п.I.I. Определение критичности краевых условий

Для параболического уравнения второго порядка

$$u_t = \mathcal{L}(u), \tag{I.I}$$

где

$$\mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx}) \tag{I.2}$$

будем рассматривать в Q_T^1 задачу Коши с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \; x \in \Omega_1, \tag{I.3}$$

и в Q_T^2 первую краевую задачу о заданными на Γ_T^2 краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \; x \in \Omega_2, \tag{I.4}$$

$$u(t,0) = u_1(t), \; 0 \leq t \leq T. \tag{I.5}$$

Относительно уравнения (I.I)-(I.2) предполагаем, если специально не оговорено противное, что оно равномерно параболическое. Также считаем, что функция $L(p,q,r)$ в (I.2) дифференцируема по всем трем своим аргументам.

Относительно функций $u_0(x)$, $u_1(t)$, определяющих краевые условия (I.3)-(I.5), предполагаем, что они неотрицательны и непрерывны при $x \in \Omega_i$, $i=1,2$ и $0 \leq t \leq T$ соответственно. Кроме того, считаем, что функции $u_0(x)$ в (I.3)-(I.4) ограничены в $\overline{\Omega}_i$, $i=1,2$.

Будем считать, что в Q_T^i, $i=1,2$ существуют решения сформулированных задач, причем

$$\sup_{(t,x) \in Q_T^i} u(t,x) = M_i < \infty, \; i=1,2. \tag{I.6}$$

Равномерная параболичность уравнения (I.I)-(I.2) обеспечи-

вает существование функции трех переменных $L^{-1}_{(3)}(p,q,y)$ такой, что

$$L(p,q,L^{-1}_{(3)}(p,q,y))=y,\ 0<p\leq M_i,\ -\infty<q<\infty. \quad (I.7)$$

Нижний индекс у функции $L^{-1}_{(3)}$ подчеркивает тот факт, что уравнение $L(p,q,z)=y$ решается относительно третьего аргумента функции L. Функция $L^{-1}_{(3)}$ дифференцируема по всем переменным в силу гладкости L.

Введем обозначение

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p,q)=L^{-1}_{(3)}(p,q,0). \quad (I.8)$$

Нетрудно убедиться, что функция (I.8) является решением уравнения

$$L(p,q,\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p,q))=0,\ 0<p\leq M_i,\ -\infty<q<\infty,\ i=1,2.$$

Будем предполагать, что в (I.3)-(I.5) $u_0(x)\in C^2(\Omega_i)$, $i=1,2$, $u_1(t)\in C^1([0,T])$.

Пусть существуют решения задачи Коши (I.I)-(I.3) и первой краевой задачи (I.I)-(I.2), (I.4)-(I.5), причем $u(t,x)\in C^{2,4}(Q^i_T)$, где i = I,2, соответственно. Указанная гладкость решений позволяет дифференцировать уравнение (I.I)-(I.2) всюду в Q^i_T по t один раз.

<u>Определение</u>. Начальное распределение (I.3) задачи (I.I)-(I.3) и краевые условия (I.4)-(I.5) задачи (I.I)-(I.2), (I.4)-(I.5) будем называть критическими, если при i = I,2, соответственно

$$u_t(t,x)\geqslant 0,\ (t,x)\in Q^i_T. \quad (I.9)$$

В дальнейшем условия критичности краевых данных будут ис-

пользованы для вывода априорных поточечных оценок старшей производной (u_{xx}) через младшие (u_x, u) .

п.I.2. Необходимые и достаточные условия критичности краевых данных

В сделанных предположениях относительно гладкости краевых данных и решений сформулированных задач ($u(t,x) \in$ $\in C^{2,4}(Q_T^i), i=1,2$) справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА I. Для критичности краевого условия (I.3) задачи (I.I)-(I.3) необходимо и достаточно

$$\mathcal{L}(u_0(x)) = L(u_0(x), u_0'(x), u_0''(x)) \geqslant 0, x \in \Omega_1. \quad (I.I0)$$

Для критичности краевых условий (I.4)-(I.5) задачи (I.I)-(I.2), (I.4)-(I.5) необходимо и достаточно

$$\mathcal{L}(u_0(x)) \geqslant 0, \ x \in \Omega_2, \quad (I.II)$$

$$u_1'(t) \geqslant 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (I.I2)$$

Доказательство. Необходимость условий леммы очевидна. Докажем достаточность. Это доказательство проведем применительно к первой краевой задаче, для задачи Коши доказательство проводится аналогично.

Введем обозначение

$$z(t,x) = u_t(t,x), \ (t,x) \in Q_T^2.$$

Из (I.II)-(I.I2) следует, что

$$z(t,x)|_{\Gamma_T^2} \geqslant 0. \quad (I.I3)$$

В силу достаточной гладкости решения $u(t,x)$ и функции $L(p,q,r)$ функция z удовлетворяет в Q_T^2 уравнению

$$z_t = L_1(u, u_x, L^{-1}_{(3)}(u, u_x, z))z + L_2(u, u_x, L^{-1}_{(3)}(u, u_x, z))z_x + L_3(u, u_x, L^{-1}_{(3)}(u, u_x, z))z_{xx}. \quad (I.14)$$

В этом уравнении функция $u_{xx}(t,x)$ представлена в виде $L^{-1}_{(3)}(u, u_x, z)$ с помощью функции (I.7) и подставлена вместо третьего аргумента функций L_j, $j = 1, 2, 3$.

Расомотрим множество N точек σ таких, что $z(t,x) \geqslant 0$ при всех $(t,x) \in Q^2_{0,\sigma}$. Пусть $\sup \sigma = t_0$. Если $t_0 = T$, то лемма доказана. Пусть $t_0 < T$.

Из определения t_0 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $t_0 < t < t_0 + \delta$ $(\delta \leqslant T - t_0)$ функция z принимает в Ω_2 отрицательные значения. Следовательно, в силу (I.13) $z(t,x)$ имеет отрицательный минимум по x при всех $t_0 < t < t_0 + \delta$. Обозначим точки минимума $(t, \bar{x}(t)) \in Q^2_{t_0, t_0+\delta}$. Выберем $\delta_1 > 0, \delta_1 \leqslant \delta$ таким, что

$$z_t(t, \bar{x}(t)) \leqslant 0, \; t_0 < t < t_0 + \delta_1. \quad (I.15)$$

Положим $z(t,x) = Y(t,x)e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$. Функция Y в точках $(t, \bar{x}(t)), t_0 < t < t_0 + \delta$ также имеет отрицательный минимум по x, поэтому уравнение (I.14) в точках $(t, \bar{x}(t))$ можно для функции $Y(t,x)$ записать в виде

$$[\alpha - L_1(u, u_x, L^{-1}_{(3)}(u, u_x, Ye^{\alpha t}))]Y + Y_t =$$

$$= L_3(u, u_x, L_{(3)}^{-1}(u, u_x, Ye^{\alpha t}))Y_{xx}. \qquad (I.16)$$

Функция $L_1(u, u_x, L_{(3)}^{-1}(u, u_x, Ye^{\alpha t}))$ в точках $(t, \bar{x}(t))$ $t_0 < t < t_0 + \delta_1$ ограничена. Пусть

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + \delta_1} \left| L_1(u, u_x, L_{(3)}^{-1}(u, u_x, Ye^{\alpha t})) \right| \Big|_{(t, \bar{x}(t))} = K_1.$$

Из определения функции Y следует, что $Y_t \leq 0$, если $z_t - \alpha z \leq 0$. Поскольку $z < 0$ в точках $(t, \bar{x}(t))$ $t_0 < t < t_0 + \delta_1$, то это неравенство эквивалентно такому

$$\alpha \leq \frac{z_t(t, \bar{x}(t))}{z(t, \bar{x}(t))}, \quad t_0 < t < t_0 + \delta_1. \qquad (I.17)$$

Рассмотрим функцию, стоящую в правой части (I.17). Нетрудно убедиться, что

$$z_t(t, x(t)) = \frac{d}{dt} z(t, \bar{x}(t)), \; t_0 < t < t_0 + \delta_1.$$

Кроме того, для всех $t_0 < t < t_0 + \delta_1$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{z_t(\eta, \bar{x}(\eta))}{z(\eta, \bar{x}(\eta))} d\eta = \int_0^{z(t, \bar{x}(t))} \frac{d\xi}{\xi} = +\infty,$$

откуда следует, что z_t / z в точках $(t, \bar{x}(t))$ неограничена сверху при $t \to t_0^+$. Поэтому существует такое $\bar{t}$, $t_0 < \bar{t} < t_0 + \delta_1$, что

$$\frac{Z_t(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))}{Z(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))} > K_1. \tag{I.18}$$

Возьмем теперь $\alpha > K_1$ такое, чтобы выполнялось (I.I7). Тогда из (I.I6), которое рассмотрим в точке $(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))$, получаем противоречие. Действительно, в левой части и в правой части стоят выражения разных знаков, поскольку в левой части выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно, $Y(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))<0$, $Y_t(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))\leq 0$, так что левая часть отрицательна, правая же часть положительна в силу неравенства $Y_{xx}(\bar{t},\bar{x}(\bar{t}))\geq 0$, справедливого в любой точке минимума по x.

Таким образом, $\sup\sigma = T$. Лемма доказана.

<u>Замечание I</u>. Нетрудно показать, что утверждение леммы I остается в силе для первой краевой задачи в области $Q_T^{\ell}=\{(t,x):0<t\leq T, x\in\Omega_\ell\}$, $\Omega_\ell=\{x:0<x<\ell<\infty\}$ с дополнительным краевым условием

$$u(t,\ell)=u_2(t),\ 0\leq t\leq T,\ u_2(t)\in C^1([0,T]), \tag{I.19}$$

если к условиям критичности краевых данных (I.4)-(I.5), (I.I9) задачи (I.I)-(I.2), (I.4)-(I.5), (I.I9)- неравенствам (I.II)-(I.I2) добавить еще одно

$$u_2'(t)\geq 0,\ 0\leq t\leq T. \tag{I.20}$$

Лемма I устанавливает следующий факт: если в задаче Коши или первой краевой задаче для уравнения (I.I)-(I.2) неравенство $u_t(t,x)\geq 0$ выполняется на границе области, где рассматривается решение (т.е. $(t,x)\in\Gamma_T^i$, $i=1,2$), то оно выполнено и для всех точек области.

Замечание 2. Условия критичности краевых условий не накладывают каких-либо ограничений на вид оператора (I.2), если последний не зависит от переменной t. В общем случае, когда

$$\mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx}, t, x), \tag{I.21}$$

предыдущий вывод не имеет места.

Применительно к оператору (I.21), к условиям критичности краевых данных, сформулированных в лемме, необходимо добавить неравенство

$$L_4(p, q, \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p, q, t, x), t, x) \geqslant 0,$$
$$0 < p \leqslant M_i, \ -\infty < q < \infty, \ (t, x) \in Q_T^i, \ i = 1, 2. \tag{I.22}$$

Этот факт нетрудно установить, если провести доказательство леммы I применительно к оператору (I.21).

Следствие. Пусть краевые условия в сформулированных задачах для уравнения (I.I)-(I.2) являются критическими. Тогда из неравенства (I.9) следует априорная поточечная оценка старшей производной

$$u_{xx}(t, x) \geqslant \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(u(t, x), u_x(t, x)), \ (t, x) \in Q_T^i, \ i = 1, 2. \tag{I.23}$$

которая будет использована в § 2, как одно из условий сравнения решений задач для различных параболических уравнений.

п.I.3. Условия критичности краевых данных для одного класса вырождающихся параболических уравнений

Для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t = \mathcal{L}_0(u) = (k(u) u_x)_x \tag{I.24}$$

рассмотрим в Q_T^2 первую краевую задачу с условиями (I.4)-(I.5). Пусть функция $k(u)$ определена для $u \geq 0, k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$. Пусть $0 \leq u_i \leq M < \infty, i = 0,1$. Тогда из принципа максимума для уравнения (I.24) следует, что

$$M_2 = \sup_{(t,x) \in Q_T^2} u(t,x) \leq M.$$

Будем предполагать, что функции k, u_0, u_1 удовлетворяют предположениям теоремы существования обобщенного решения задачи (I.24), (I.3)-(I.4) в смысле работы [9]. Там же установлено, что в $P_T^2(u)$ $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (I.24) в обычном смысле, в $S_T^2(u)$, то есть в точках вырождения уравнения, обобщенное решение может не иметь предписываемой (I.I) гладкости.

Условия критичности краевых данных определим так же, как и для случая невырождающихся уравнений

$$u_t(t,x) \geq 0, \ (t,x) \in P_T^2(u). \tag{I.25}$$

Пусть $u_0(x) \in C^2(\Omega_{20}(u_0)) \cap C(\Omega_2)$, $u_1(t) \in C^1([0,T])$. Пусть, кроме того, $u(t,x) \in C^{2,4}(P_T^2(u))$, что обеспечивает оправданность дифференцирования обеих частей уравнения (I.24) по t один раз всюду в $P_T^2(u)$.

Мы покажем, что для данного типа вырождающихся параболических уравнений условия критичности краевых данных, полученные в п.I.2 для невырождающихся уравнений, остаются справедливыми. Мы докажем утверждение, аналогичное лемме I, устанавливающее в сделанных предположениях относительно гладкости функций $k, u_0, u_1, u(t,x)$ необходимые и достаточные условия критичности краевых данных.

Лемма I.I. Для критичности краевых условий (I.3)-(I.4) задачи (I.24), (I.3)-(I.4) необходимо и достаточно

$$\mathcal{L}_0(u_0(x)) = (k(u_0(x))u_0'(x)) \geqslant 0, \; x \in \Omega_{20}(u_0), \tag{I.26}$$

$$u_1'(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{I.27}$$

Доказательство. Так же, как в лемме I, доказываем достаточность условий.

Сделаем некоторые предварительные замечания о свойствах функции $u_0(x)$, вытекающих из неравенотва (I.26).

Покажем, что $u_0(x)$, ограниченная в $\overline{\Omega}_2$, является невозрастающей в Ω_2. Сначала установим, что функция $u_0(x)$ не может иметь в Ω_2 положительного максимума. Действительно, если $u_0(x)$ имеет при некотором $x_m \in \Omega_2$, $0 < x_m < \infty$ положительный максимум и не равна тождественно константе, то существуют такие $x_1 < x_m$, $x_2 > x_m$, что $u_0(x) > 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $u_0'(x_1) > 0$, $u_0'(x_2) < 0$. Используя (I.26), получим $k(u_0(x))u_0'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \geqslant 0$, что ведет к противоречию. Предположим теперь, что для некоторого $x_3 \in \Omega_2$ $u_0'(x_3) > 0$, $u_0(x_3) > 0$. Тогда, в силу предыдущего вывода $u_0'(x) \geqslant 0$ при $x > x_3$. Поэтому $\mathcal{L}_0(u_0)$ определена при всех $x > x_3$ и (I.26) можно записать в виде

$$\mathcal{L}_0(u_0(x)) = \alpha(x), \tag{I.28}$$

где $\alpha(x)$ – неотрицательная и непрерывная при $x > x_3$ функция. Пусть существует $x_4 > x_3$ такое, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $\operatorname{mes}\omega_\varepsilon > 0$, где $\omega_\varepsilon = \{x : x_3 < x < x_4, \alpha(x) \geqslant \varepsilon\}$. В результате интегрирования (I.28) получим

$$\int_{u_0(x_3)}^{u_0(x)} k(\eta)\,d\eta = -k(u_0(x_3))u_0'(x_3) + \int_{x_3}^{x} d\xi \int_{x_3}^{\xi} \alpha(\xi)\,d\xi, \quad x > x_3.$$

Оценивая интеграл в правой части этого равенства, получим при $x > x_4$

$$\int_{x_3}^{x} d\xi \int_{x_3}^{\xi} \alpha(\xi)\,d\xi \geqslant \int_{x_4}^{x} d\xi \int_{x_3}^{\xi} \alpha(\xi)\,d\xi \geqslant \varepsilon\, \mathrm{mes}\,\omega_\varepsilon (x - x_4),$$

откуда заключаем, что $u_0(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, что противоречит ограниченности этой функции в Ω_2. Случай $\alpha(x) \equiv 0$, $x > x_3$ анализируется аналогично.

Таким образом, установлено, что

$$u_0'(x) \leqslant 0, \quad x \in \Omega_{20}(u_0). \tag{I.29}$$

Отсюда следует, что при любом $0 < t \leqslant T$ множество $S^2_{t,t}(u)$ состоит не более чем из одного элемента. Обозначим его $\xi(t)$. Нетрудно видеть, что $S^2_T(u) = \{(t,x):$ $0 < t \leqslant T,\ x = \xi(t)\}$.

Можно показать, что определение обобщенного решения сформулированной задачи (см. [9]) предусматривает при каждом $0 < t \leqslant T$ выполнение условия

$$k(u(t,x))u_x(t,x) \to 0, \quad x \to \xi^-(t). \tag{I.30}$$

Поэтому при всех $0 < t \leqslant T$ и $\delta > 0$ $(\delta < \xi(t))$ найдется $x_1(t)$ такое, что

$$\xi(t)-\delta<x_1(t)<\xi(t),\ u_t(t,x_1(t))>0. \qquad (I.31)$$

Определим константы t_0, δ_1 и множество точек $(t,\bar{x}(t))$, $t_0<t<t_0+\delta_1$ так же, как в доказательстве леммы I, положив при этом $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0$. Тогда случай $(t,\bar{x}(t))\in P_T^2(u)$, $t_0<t<t+\delta_1$ анализируется так же, как в доказательстве этой леммы. Поэтому остается предположить, что для любого $\delta_2>0$, $\delta_2\leqslant\delta_1$ существует $t_0<\tilde{t}<t_0+\delta_2$ такое, что $(\tilde{t},\bar{x}(\tilde{t}))\in S_T^2(u)$. Однако, нетрудно убедиться, что это предположение противоречит (I.31). Лемма доказана.

Замечание I. В предположениях леммы I.I можно показать, что

$$u_x(t,x)\leqslant 0,\ (t,x)\in P_T^2(u). \qquad (I.32)$$

Замечание 2. Неравенства (I.25) и (I.32) доказаны в [I0] при $u_0(x)=0$, $x\in\Omega_2$ и $u_1(t)$, удовлетворяющей неравенству (I.27), методом, отличным от применяемого здесь.

Следствие. Поскольку для оператора $\mathcal{L}_0$

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p,q)=-\frac{K'(p)}{K(p)}q^2,\quad 0<p\leqslant M,\ -\infty<q<\infty,$$

то оценка старшей производной (I.23) имеет в данном случае вид

$$u_{xx}(t,x)\geqslant-\frac{K'(u(t,x))}{K(u(t,x))}u_x^2(t,x),\ (t,x)\in P_T^2(u). \qquad (I.33)$$

Таким образом, вырождение уравнения, т.е. в данном случае то, что решение определяется в некотором обобщенном смысле, не меняет условий критичности краевых данных, полученных в п.I.2 для классичеоких решений. Заметим, что в доказательстве леммы I.I в основе устранения особенности, вызванной вырождением

уравнения (I.24) при $(t,x)\in S_T^2(u)$, лежит условие (I.30), означающее непрерывность функции $k(u)u_x$ в $P_T^2(u)$.

Из доказательства леммы I.I также видно, что не существует критических начальных распределений в задаче Коши для уравнения (I.24), ограниченных в $\overline{\Omega}_1$ и принадлежащих классу $C^2(\Omega_{10}(u_0))\cap C(\Omega_1)$.

Анализ критичности краевых условий в задаче Коши и первой краевой задаче можно провести и для другого типа квазилинейных вырождающихся параболических уравнений с оператором

$$\mathcal{L}_1(u)=(k(u)u_x)_x+Q(u), \tag{I.34}$$

где $k(u)$ – та же, что и в операторе $\mathcal{L}_0$, а функция $Q(u)$ удовлетворяет условию

$$Q(0)\geqslant 0, \tag{I.35}$$

и достаточно гладкая при $u>0$. Для доказательства необходимых и достаточных условий критичности в том виде, в каком они сформулированы в п.I.2, нам понадобится лишь одно предположение – непрерывность в $P_T^i(u)$ функции $k(u)u_x$. В этих предположениях доказательство вполне аналогично доказательству леммы I.I.

Для оператора (I.34)

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p,q)=-\frac{k'(p)}{k(p)}q^2-\frac{Q(p)}{k(p)},\ 0<p\leq M_i,\ -\infty<q<\infty,\ i=1,2, \tag{I.36}$$

поэтому априорная поточечная оценка старшей производной имеет вид

$$u_{xx}\geqslant-\frac{k'(u)}{k(u)}u_x^2-\frac{Q(u)}{k(u)},\ (t,x)\in P_T^i(u),\ i=1,2. \tag{I.37}$$

Нетрудно показать, что выводы леммы I.I. остаются справедливыми, когда функция K в (I.24) зависит от переменной x. Если функция K зависит еще и от переменной t, т.е.

$$K = K(u, x, t),$$

то, как следует из (I.22), лемма I.I. справедлива, если

$$q^2\left[K_{13} - \frac{K_1 K_3}{K}\right] + q\left[K_{23} - \frac{K_2 K_3}{K}\right] \geqslant 0, \ (t,x) \in P_T^2(u), \tag{I.38}$$

Учитывая (I.32), из (I.38) получаем требуемые условия

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{K_3(u,x,t)}{K(u,x,t)}\right] \geqslant 0, \ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{K_3(u,x,t)}{K(u,x,t)}\right] \leqslant 0, \tag{I.39}$$

$$0 < u \leqslant M, \ (t,x) \in Q_T^2.$$

В этом случае

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}(p,q,x,t) = -\frac{K_1(p,x,t)}{K(p,x,t)} q^2 - \frac{K_2(p,x,t)}{K(p,x,t)} q,$$

$$0 < p \leqslant M, \ -\infty < q < \infty, \ (t,x) \in Q_T^2,$$

поэтому априорная источечная оценка (I.23) имеет вид

$$u_{xx} \geqslant -\frac{K_1(u,x,t)}{K(u,x,t)} u_x^2 - \frac{K_2(u,x,t)}{K(u,x,t)} u_x, \ (t,x) \in P_T^2(u).$$

Аналогичный анализ можно провести и для уравнения с оператором типа (I.34), в котором

$$K = K(u,t), \quad Q = Q(u,t).$$

Неравенство (I.22) в этом случае имеет вид

$$q^2\left[K_{12}-\frac{K_1K_2}{K}\right]+Q_2-\frac{K_2Q}{K}\geqslant 0,\ 0<t\leqslant T, \qquad (I.40)$$

$$0<u\leqslant M_i,\ i=1,2,\ -\infty<q<\infty.$$

В силу независимости изменения q, u, t получаем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{K_2(u,t)}{K(u,t)}\right]\geqslant 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{Q(u,t)}{K(u,t)}\right]\geqslant 0,\ 0<t\leqslant T, \qquad (I.41)$$

$$0<u\leqslant M_i,\ i=1,2.$$

Поточечная оценка старшей производной в этом случае имеет вид (I.37), если в этом неравенстве положить функции K и Q зависящими от t.

В силу того, что для уравнений с операторами типа (I.34) принцип максимума вообще говоря не справедлив, оценку производной $u_x(t,x)$ вида (I.32) для уравнения (I.24) получить не удается (в основе неравенства (I.32) лежит именно принцип максимума для уравнений (I.24)). Поэтому провести анализ условий критичности для оператора (I.34) с K и Q, зависящими от x, вообще говоря нельзя. Случай, когда только Q зависит от переменной x, по своему анализу не отличается от вышеприведенного.

§ 2. Сравнение решений параболических уравнений

п.2.I. Постановка задачи

Рассмотрим в $Q_T=\{(t,x): 0<t\leqslant T, x\in\Omega\}$ две краевые задачи для равномерно параболических уравнений

$$u_t^{(\nu)}=\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=L^{(\nu)}(u^{(\nu)},u_x^{(\nu)},u_{xx}^{(\nu)}) \qquad (2.I)$$

с условиями

$$u^{(\nu)}(t,x) = U_0^{(\nu)}(t,x),\ (t,x)\in\Gamma_T,\ \nu=1,2. \qquad (2.2)$$

Если $Q_T = Q_T^1$ $(\Omega = \Omega_1,\ \Gamma_T = \Gamma_T^1)$, то (2.2) определяют начальное распределение в задаче Коши. Если $Q_T = Q_T^2$ $(\Omega = \Omega_2,\ \Gamma_T = \Gamma_T^2)$, то (2.2) определяют краевые условия в первой краевой задаче. Форма записи краевых данных в виде (2.2) выбрана для краткости изложения, так что всякий раз когда мы говорим о задачах (2.I)-(2.2), ν = I,2, мы подразумеваем, что речь идет либо о двух задачах Коши в Q_T^1, либо о первых краевых задачах в Q_T^2.

Предполагаем, что решения сформулированных задач существуют в Q_T в классическом смысле. Пусть

$$U_0^{(2)}(t,x) \geqslant U_0^{(1)}(t,x),\ (t,x)\in\Gamma_T. \qquad (2.3)$$

Мы хотим определить те условия на операторы $\mathcal{L}^{(\nu)}$ и краевые данные (2.2), которые с достаточностью обеспечивают в $\overline{Q}_T$ сравнение решений задач (2.I)-(2.2), ν = I,2, т.е. неравенство

$$u^{(2)}(t,x) \geqslant u^{(1)}(t,x),\ (t,x)\in\overline{Q}_T. \qquad (2.4)$$

Ниже будет изложен вариант решения такой задачи с использованием априорных поточечных оценок старшей производной, теория которых изложена в предыдущем параграфе.

п.2.2. Основная теорема сравнения

Пусть краевые условия (2.2) удовлетворяют следующим предположениям:

I) в задаче Коши – $u_0^{(1)}(x)\in C(\Omega_1),\ u_0^{(2)}(x)\in C^2(\Omega_1)$

2) в первой краевой задаче – $u_0^{(1)} \in C(\Omega_2)$, $u_0^{(2)}(x) \in C^2(\Omega_2)$, $u_1^{(1)}(t) \in C([0,T])$, $u_1^{(2)}(t) \in C^1([0,T])$.

Кроме того, предполагаем, что $U_0^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$ неотрицательны, ограничены в Γ_T и функции $L^{(\nu)}(p,q,z)$ дифференцируемы при $0 < p \leq M_1$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < z < \infty$, где

$$M = \max \left\{ \sup_{(t,x) \in Q_T} u^{(1)}(t,x), \sup_{(t,x) \in Q_T} u^{(2)}(t,x) \right\}. \quad (2.5)$$

Будем считать, что $u^{(1)}(t,x) \in C^{1,2}(Q_T)$ и $u^{(2)}(t,x) \in C^{2,4}(Q_T)$.

В этих предположениях справедливо следующее утверждение, которое мы будем называть основной теоремой сравнения.

<u>Теорема I</u>. Пусть выполняются предположения:

I) краевые условия (2.2) связаны неравенством (2.3),

2) краевые условия (2.2), $\nu = 2$ в задаче (2.I)–(2.2), $\nu = 2$ являются критическими,

3) при $0 < p \leq M$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < z < \infty$ выполнены неравенства

$$L_3^{(2)}(p,q,z) - L_3^{(1)}(p,q,z) \geq 0, \quad (2.6)$$

$$L^{(1)}(p,q,\overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}(p,q)) \leq 0. \quad (2.7)$$

Тогда оправедливо неравенство (2.4).

<u>Замечание</u>. В неравенстве (2.7) функция $\overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}$ определяется так же, как $\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(3)}$ в § I, п.I.I.

Доказательство теоремы I. Положим

$$u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x) = z(t,x).$$

Функция z принадлежит классу $C^{1,2}(Q_T)$ и удовлетворяет в Q_T уравнению

$$z_t = \mathcal{L}^{(2)}(u^{(2)}) - \mathcal{L}^{(1)}(u^{(2)} - z) =$$
$$= L^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx}) - L^{(1)}(u^{(2)} - z, u^{(2)}_x - z_x, u^{(2)}_{xx} - z_{xx}). \quad (2.8)$$

Из предположения I) теоремы следует, что

$$z(t,x) = U_0^{(2)}(t,x) - U_0^{(1)}(t,x) \geqslant 0, (t,x) \in \Gamma_T. \quad (2.9)$$

Покажем, что функция z не может принимать в Q_T отрицательных значений.

Рассмотрим множество N точек σ в интервале $(0,T)$ таких, что $z(t,x) \geqslant 0$ при $(t,x) \in Q_{0,\sigma}$. Пусть $\sup \sigma = t_0 < T$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $t_0 < t < t_0 + \delta$ $(\delta \leq T - t_0)$ функция $z(t,x)$ принимает в Ω отрицательные значения. Поэтому, в силу (2.9) $z(t,x)$ имеет отрицательный минимум по x при всех $t_0 < t < t_0 + \delta$. Обозначим точки минимума $(t, \bar{x}(t)) \in Q_T$.

Выберем $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \delta$ таким, что

$$z_t(t, \bar{x}(t)) \leq 0, \; t_0 < t < t_0 + \delta_1. \quad (2.9)$$

Положим $z(t,x) = Y(t,x)\, e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$. Функция Y в точках $(t, \bar{x}(t))$, $t_0 < t < t_0 + \delta$ также имеет отрицательный минимум по x, поэтому уравнение (2.8) для в точках $(t, \bar{x}(t))$ можно записать в виде

$$[\alpha - L_1^{(1)}(\theta_1, u_x^{(2)}, u_{xx}^{(2)})]Y + Y_t =$$

$$= Y_{xx} L^{(1)}_{(3}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, \theta_2) + e^{-\alpha t}[L^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx}) -$$

$$- L^{(1)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx})]. \qquad (2.10)$$

Здесь θ_1, θ_2 некоторые функции переменной t, причем

$$u^{(2)}(t, \bar{x}(t)) \leq \theta_1(t) \leq u^{(1)}(t, \bar{x}(t))$$

$$u^{(1)}_{xx}(t, \bar{x}(t)) \leq \theta_2(t) \leq u^{(2)}_{xx}(t, \bar{x}(t))$$

Покажем, что выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части (2.10), неотрицательно. Для этого воспользуемся поточечной оценкой старшей производной $u^{(2)}_{xx}$, которая имеет место в силу предположения 3) теоремы. Оценка (1.23) в данном случае имеет вид

$$u^{(2)}_{xx} \geqslant \overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x), \ (t,x) \in Q_T. \qquad (2.11)$$

С учетом (2.11), (2.6)-(2.7) получаем

$$L^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx}) - L^{(1)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx}) \geqslant$$

$$\geqslant L^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, \overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x)) - L^{(1)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, \overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x)) =$$

$$= - L^{(1)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x, \overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(3)}(u^{(2)}, u^{(2)}_x)) \geqslant 0. \qquad (2.12)$$

Заметим, что $L^{(1)}_1(\theta_1, u^{(2)}_x, u^{(2)}_{xx})$ ограничена в точках $(t, \bar{x}(t))$ при $t_0 < t < t_0 + \delta_1$. Величины $\alpha > 0$ и $t_0 < \bar{t} < t_0 + \delta_1$, подстановка которых в (2.10) приводит к противоречию, выбираются так же, как и в доказательстве

леммы I.

Таким образом, $\sup \sigma = T$. Теорема доказана.

Замечание I. Из доказательства теоремы следует, что сравнение решений сформулированных задач возможно в том случае, когда выполнено неравенство

$$L^{(2)}(p,q,z) - L^{(1)}(p,q,z) \geq 0, \quad 0 < p \leq M \qquad (2.13)$$
$$-\infty < q < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

и ограничение (2.3) на краевые условия. Однако, условие (2.13) является настолько сильным требованием, что оно не выполняется для такого широкого класса параболических уравнений, как квазилинейные, если знак $u^{(2)}_{xx}(t,x)$ при всех $(t,x) \in Q_T$ заранее не известен. Поэтому сравнение решений в смысле (2.13) практического значения не имеет. Поэтому для анализа задачи о сравнении решений различных параболических уравнений потребовался аппарат получения априорных поточечных оценок старшей производной, который в настоящей работе реализован посредством введения критических краевых условий. Заметим, что подход (2.13) к сравнению решений, по-видимому, впервые был сформулирован в работе [14], а затем использовался в той же интерпретации рядом авторов.

Замечание 2. Доказанную теорему можно сформулировать по-другому, и в новой формулировке она отвечает на следующий вопрос: какие возмущения заданного параболического оператора приведут к росту (или уменьшению) решения возмущенной задачи по сравнению с решением исходной? Какому классу в этом случае должны принадлежать краевые условия?

п.2.3. Сравнение решений вырождающихся параболических уравнений

Рассмотрим в Q_T^2 две первые краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений

$$u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}_0^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = (k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\, u_x^{(\nu)})_x, \quad \nu = 1,2 \tag{2.14}$$

с условиями

$$u^{(\nu)}(0,x) = u_0^{(\nu)}(x),\ x \in \Omega_2,\ u^{(\nu)}(t,0) = u_1^{(\nu)}(t),\ 0 \le t \le T,\ \nu = 1,2. \tag{2.15}$$

Относительно краевых условий предполагаем, что

$0 \le u_i^{(\nu)} \le M$, $i = 0,1$, $\nu = 1,2$; $u_0^{(1)}(x) \in C(\Omega_2)$, $u_1^{(1)}(t) \in C([0,T])$, $u_0^{(2)}(x) \in C(\Omega_2) \cap C^2(\Omega_{20}(u_0))$, $u_1^{(2)}(t) \in C^1([0,T])$. Пусть функции $k^{(\nu)}, u_0^{(\nu)}, u_1^{(\nu)}$ удовлетворяют предположениям теоремы существования обобщенных решений задач (2.14)–(2.15), $\nu = 1,2$ в смысле работы [9], причем будем считать, что $u^{(1)}(t,x) \in C^{1,2}(P_T^2(u^{(1)})) \cap C(Q_T^2)$, $u^{(2)}(t,x) \in C^{2,4}(P_T^2(u^{(2)})) \cap C(Q_T^2)$. Из принципа максимума следует, что $u^{(\nu)}(t,x) \le M$, $(t,x) \in Q_T^2$, $\nu = 1,2$.

Мы покажем, что вырождение операторов $\mathcal{L}_0^{(\nu)}$ в (2.14), т.е. появление у решений особенностей, связанных с разрывностью в Q_T^2 производных, входящих в (2.14), не меняют условий теоремы сравнения, доказанной в п.2.2 для классических решений.

Ограничения на операторы $\mathcal{L}_0^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, вытекающие из критичности краевых условий (2.15), $\nu = 2$ и поточечной оценки старшей производной (1.33), имеют вид (см. (2.6), (2.7))

$$K^{(2)}(p)-K^{(1)}(p)\geqslant 0,\ 0<p\leqslant M, \tag{2.16}$$

$$K^{(2)\prime}(p)K^{(1)}(p)-K^{(2)}(p)K^{(1)\prime}(p)\geqslant 0,\ 0<p\leqslant M. \tag{2.17}$$

<u>Теорема I.I</u>. Пусть выполняются предположения

I) $u_0^{(2)}(x)\geqslant u_0^{(1)}(x),\ x\in\Omega_2,\ u_1^{(2)}(t)\geqslant u_1^{(1)}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$

2) функции $K^{(2)}$, $K^{(1)}$ удовлетворяют условиям (2.16)-(2.17),

3) краевые условия (2.15), $\nu = 2$ являются критическими.

Тогда всюду в $\overline{Q}_T^2$ выполнено неравенство

$$u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x).$$

Доказательство. Определим t_0,δ,δ_1 так же, как в доказательстве теоремы I. Пусть $(t,\bar{x}(t))$ - множество точек отрицательного минимума по x функции $z(t,x)$ при $t_0<t<t_0+\delta$.

Пусть существует $\delta_2>0$, $\delta_2\leqslant\delta_1$ такое, что $(t,\bar{x}(t))\in P^2_{t_0,t_0+\delta_2}(u^{(2)})$. Тогда доказательство проводится так же, как в теореме I.

Пусть теперь для некоторого $\delta_3>0$, $\delta_3\leqslant\delta_1$ $(t,\bar{x}(t))\in S^2_{t_0,t_0+\delta_3}(u^{(2)})$. Функция z удовлетворяет в $Q^2_{t_0,t_0+\delta_3}$ уравнению

$$z_t=(K^{(2)}(u^{(2)})u_x^{(2)})_x-(K^{(1)}(u^{(1)})u_x^{(1)})_x \tag{2.18}$$

и условиям

$$z(t_0,x)=u^{(2)}(t_0,x)-u^{(1)}(t_0,x)\geqslant 0,\ x\in\Omega_2,$$

$$z(t,0)=u_1^{(2)}(t)-u_1^{(1)}(t)\geqslant 0,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta_3.$$

В силу предположения о том, что $(t,\bar{x}(t))\in S^2_{t_0,t_0+\delta_3}(u^{(2)})$ для любого $t_0<t<t_0+\delta_3$ найдется $0<\xi(t)<\bar{x}(t)$ такая, что $z(t,\xi(t))=0$. Тогда

$$\int_{\xi(t)}^{\infty} z(t,\eta)\,d\eta > 0\,,\ t_0 < t < t_0+\delta_3\,. \tag{2.19}$$

Учитывая, что $z_x(t,\xi(t)) \leq 0$, $t_0 < t < t_0+\delta_3$, а также неравенство (2.16) и интегрируя (2.18) по $[t_0 < t < t_0+\delta_3] \times$ $\times [\xi(t) < x < \infty]$, приходим к противоречию с (2.19).

Если для любого $\delta_4 > 0$, $\delta_4 \leq \delta_1$ найдутся точки минимума $(t, \bar{x}(t))$, $t_0 < t < t_0+\delta_4$, принадлежащие как $P^2_{t_0,t_0+\delta_4}(u^{(2)})$, так и $S^2_{t_0,t_0+\delta_4}(u^{(2)})$, то доказательство можно провести либо способом, указанным здесь, либо методом доказательства теоремы I.

Таким образом, $\sup \delta = T$. Теорема доказана.

Замечание I. Неравенства (2.16)-(2.17) можно записать в виде

$$K^{(1)}(p) = \frac{K^{(2)}(p)}{1+\lambda(p)}\,,\ 0 < p \leq M, \tag{2.20}$$

где функция $\lambda(p)$ определена при $0 < p \leq M$, причем

$$\lambda(p) \geq 0,\ \lambda'(p) \geq 0,\ 0 < p \leq M.$$

Замечание 2. Покажем, что условия (2.16)-(2.17) являются существенными в теоремах I и I.I. Приведем примеры, когда отсутствие хотя бы одного из них при выполнении остальных условий теоремы делает сравнение решений невозможным. Для доказательства этого утверждения нам потребуются решения двух задач.

Первая задача. Рассмотрим в $Q_0^- = \{(t,x) : -\infty < t < 0,$ $x \in \Omega_2\}$ первую краевую задачу для уравнения

$$u_t = k_0 u_{xx}, \tag{2.21}$$

где k_0 – положительная постоянная величина, с краевыми условиями

$$u(-\infty, x) = 0, \quad x \in \Omega_2, \tag{2.22}$$

$$u(t, 0) = (-t)^n, \quad -\infty < t < 0, \tag{2.23}$$

где $n < 0$ – некоторая константа.

Вторая задача. Рассмотрим в Q_0^- первую краевую задачу для уравнения

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x, \tag{2.24}$$

где σ – положительная постоянная величина, с условиями (2.22)–(2.23). Мы не будем касаться физического смысла постановки этих задач, их решения понадобятся лишь для демонстрации необходимости условий (2.16)–(2.17) при сравнении решений.

Решение задачи (2.21)–(2.23) имеет вид

$$u(t,x) = (-t)^n f(\xi), \quad \xi = x/(K_0(-t))^{1/2}, \quad (t,x) \in Q_0^-,$$

$$f(\xi) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - n)}{\Gamma(-n)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2 s}{4}} s^{-n-1} (1+s)^{n-\frac{1}{2}} ds, \tag{2.25}$$

где $\Gamma(\mu)$ – гамма функция, определенная при всех $\mu > 0$.

Нам также понадобится величина

$$u_x(t,0) = -(-t)^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - n)}{\Gamma(-n)} K_0^{-\frac{1}{2}}, \quad -\infty < t < 0. \tag{2.26}$$

Решение задачи (2.24), (2.22)–(2.23) представляется при $n = -1/\sigma$ таким образом

$$u(t,x) = (-t)^n \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, \quad -\infty < t < 0, \; 0 \le x \le x_0,$$

$$u(t,x) = 0, \quad -\infty < t < 0, \; x > x_0, \tag{2.27}$$

где $x_0 = \sqrt{2\frac{\sigma+2}{\sigma}}$.

Перейдем к доказательству нашего утверждения. Пусть не выполняется неравенство (2.16), а (2.17) выполнено. Тогда рассмотрим такой пример. Пусть $u^{(1)}(t,x)$ – решение задачи (2.21) – (2.23) при $k_0 = k_0^{(1)}$ и $u^{(2)}(t,x)$ – решение той же задачи при $k_0 = k_0^{(2)}$, причем $k_0^{(2)} < k_0^{(1)}$. Действительно, в этом случае (2.17) выполнено, а (2.16) нет. Из интегрального представления решения нетрудно получить, что $u^{(1)}(t,x) > u^{(2)}(t,x)$, $(t,x) \in Q_0^-$.

Рассмотрим другую возможность. Пусть (2.16) выполняется, а (2.17) нет. Пусть, тогда, $u^{(1)}(t,x)$ – решение задачи (2.24), (2.22)–(2.23) при $\sigma = 2$, $n = -1/2$, а $u^{(2)}(t,x)$ – решение (2.21)–(2.23) при этом же n и $k_0 = 1$. Рассмотрим эти решения при $-\infty < t \leq -1$. Тогда $M = 1$ справедливо неравенство (2.16) и не выполнено (2.17). Тогда получаем:

$$u_x^{(1)}(t,0) = -\frac{1}{2}(-t)^{-\frac{1}{2}}, \; -\infty < t \leq -1, \tag{2.28}$$

$$u_x^{(2)}(t,0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}(-t)^{-1}, \; -\infty < t \leq -1. \tag{2.29}$$

Посмотрим, существуют ли такие t, что $u_x^{(1)}(t,0) > u_x^{(2)}(t,0)$. Из сравнения (2.28) с (2.29) нетрудно установить, что это неравенство выполнено при $-2\pi^{-1/4} < t \leq -1$.

Это означает, что при всех t из указанного полуинтервала существует $\delta(t) > 0$ такое, что

$$u^{(2)}(t,x) < u^{(1)}(t,x), \; 0 < x < \delta(t), \; -\frac{2}{\pi^{1/4}} < t \leq 1, \tag{2.30}$$

то есть неравенство сравнения решений не выполнено.

Если рассматривать задачи (2.I4)-(2.I5), ν = I,2 как математическое описание процесса распространения тепла в средах с нелинейной теплопроводностью ($u^{(\nu)}$ - температуры, $K^{(\nu)}(u^{(\nu)})$ - нелинейные коэффициенты теплопроводности; ν = I,2), то с этой физической точки зрения неравенство (2.I6) является естественным, поскольку (См., например, [I-7]) коэффициенты $K^{(\nu)}$ определяют структуру распределения тепла в пространстве. Неравенство (2.I7), которому при $K^{(1)}(p)=0$, $0<p\leq M$ можно придать вид

$$[K^{(2)}(p)/K^{(1)}(p)]' \geq 0, \quad 0<p\leq M, \tag{2.31}$$

не имеет столь явной физической интерпретации.

<u>Замечание 3</u>. В предыдущем замечании показано, что каждое из условий (2.I6)-(2.I7) является существенным в теореме I.I. С помощью выбора специальных функций $K^{(\nu)}$, $\nu=1,2$ были построены примеры, подтверждающие этот факт.

Можно показать при фиксированных $K^{(\nu)}$ с помощью выбора подходящих краевых условий (2.I5), что неравенства (2.I6)-(2.I7) при выполнении остальных предположений теоремы являются необходимыми и достаточными условиями сравнения решений. Для доказательства этого утверждения достаточно сравнить величины

$$u_t^{(1)}(0,x) \gtrless u_t^{(2)}(0,x), \; x\in \Omega_{20}(u_0^{(1)})\cap\Omega_{20}(u_0^{(2)}),$$

и подобрать $u_0^{(\nu)}$, $\nu=1,2$ соответствующим образом.

Аналогичное утверждение можно доказать для теоремы I.

п.2.4. Некоторые примеры.

Посмотрим, какой вид принимают неравенства (2.6)-(2.7) при конкретных параболических операторах $\mathcal{L}^{(\nu)}$ в (2.I),

I. Пусть

$$\mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)})\, v^{(\nu)}_{xx}, \quad \nu = 1,2, \tag{2.32}$$

где функции $\varphi^{(\nu)}(p)$ таковы, что $\varphi^{(\nu)}(p) > 0, p > 0, \nu = 1,2$. Тогда неравенство (2.7) является тождеством, а (2.6) принимает вид

$$\varphi^{(2)}(p) - \varphi^{(1)}(p) \geqslant 0 \ , \ 0 < p \leqslant M. \tag{2.33}$$

Заметим, что уравнения (2.I4) могут быть приведены к виду (2.I), (2.32) заменой

$$u^{(\nu)} = V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)}), \ V^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = \int_0^{u^{(\nu)}} k^{(\nu)}(\eta)\, d\eta, \tag{2.34}$$

где $V^{(\nu)-1}$ - функции, обратные к $V^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$. При этом

$$\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = k^{(\nu)}(V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)})), \ \nu = 1,2. \tag{2.35}$$

По сравнению с условиями (2.I6)-(2.I7) неравенство (2.33) много проще и не содержит дифференциальных связей на функции, в него входящие (См. неравенство (2.I7)). Но с точки зрения сравнения решений исходных задач (2.I4)-(2.I5), ν = I,2 неравенство (2.33) обеспечивает сравнение некоторых нелинейных операторов от них. Используя преобразования (2.34), получим при выполнении (2.33)

$$V^{(2)}(u^{(2)}(t,x)) \geqslant V^{(1)}(u^{(1)}(t,x)),\ (t,x)\in Q_T,$$

если $U_0^{(2)}(t,x)$, $(t,x)\in \Gamma_T^2$ в (2.2) критические и

$$V^{(2)}(U_0^{(2)}(t,x)) \geqslant V^{(1)}(U_0^{(1)}(t,x)),\ (t,x)\in \Gamma_T^2.$$

Заметим, что, если $K^{(2)}(p) \geqslant K^{(1)}(p)$ и $K^{(2)}(p) \not\equiv K^{(1)}(p)$, то $V^{(2)}(p) > V^{(1)}(p),\ 0<p\leqslant M,$ т.е. относительное упрощение условия сравнения (2.33),(2.35) сопровождается более жестким ограничением на неравенство, связывающее краевые условия (2.2).

Заметим, что в данном случае

$$v_x^{(\nu)} = K^{(\nu)}(u^{(\nu)})\,u_x^{(\nu)},\ \nu = 1,2,$$

поэтому в задачах для операторов (2.32) функции непрерывны в $P_T^2(v^{(\nu)}) = P_T^2(u^{(\nu)}),\ \ \nu = 1,2$.

2. Пусть

$$\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = (K^{(\nu)}(u^{(\nu)})\,u_x^{(\nu)})_x + Q^{(\nu)}(u^{(\nu)}),\ \nu=1,2. \quad (2.36)$$

Этот пример, в частности, важен для изучения вопросов, рассматривавшихся в [18-25] .

Пусть операторы (2.36), ν = 1,2 удовлетворяют тем же предположениям относительно функций $K^{(\nu)}$, $Q^{(\nu)}$, что и оператор $\mathcal{L}_1$ в (1.34).

Если (2.36) – вырождающиеся операторы, то, как и в п.1.3, считаем, что функции $K^{(\nu)}(u^{(\nu)})\,u_x^{(\nu)}$ непрерывны в $P_T(u^{(\nu)})$, $\nu = 1,2$. Тогда в этих предположениях нетрудно доказать теорему сравнения, аналогичную теореме 1.1., если воспользовать-

ся для $u_{xx}^{(2)}$ поточечной оценкой (I.37), вытекающей из критичности краевых условий, соответствующих $\nu = 2$.

В этом случае неравенства (2.6)-(2.7) в силу независимости изменения p и q во втором из них переходят в (2.I6)-(2.I7) и условие

$$Q^{(2)}(p)K^{(1)}(p) \geqslant Q^{(1)}(p)K^{(2)}(p), \; 0<p\leqslant M. \tag{2.37}$$

Если анализировать неравенство (2.37) с физической точки зрения, сформулированной в замечании 2 п.2.3, то оно описывает в каком-то виде соотношение выделения энергии (функции $Q^{(\nu)}$) и распределения выделившегося и поступившего с границы тепла в пространстве за счет механизма теплопроводности (коэффициенты $K^{(\nu)}$).

Неравенства (2.I6)-(2.I7), (2.37) можно записать в виде

$$K^{(1)}(p) = \frac{K^{(2)}(p)}{1+\lambda(p)}, \; 0<p\leqslant M, \tag{2.38}$$

$$Q^{(1)}(p) = \frac{Q^{(2)}(p)}{[1+\lambda(p)][1+\omega(p)]}, \; 0<p\leqslant M, \tag{2.39}$$

где функции $\lambda(p)$, $\omega(p)$ таковы, что

$$\lambda(p)\geqslant 0, \; \lambda'(p)\geqslant 0, \; \omega(p)\geqslant 0, \; 0<p\leqslant M. \tag{2.40}$$

3. Пусть операторы $\mathcal{L}_0^{(\nu)}$ в (2.I4) таковы, что

$$K^{(\nu)} = K^{(\nu)}(u^{(\nu)}, x, t), \; \nu = 1,2. \tag{2.4I}$$

В этом случае также справедлива теорема I.I., однако условия на операторы $\mathcal{L}_0^{(\nu)}$ не ограничиваются неравенствами (2.I6)-(2.I7). Во-первых, критичность краевых условий задачи, соответствующей $\nu = 2$, накладывает на функцию $K^{(2)}$ ограничения

(I.39). Во-вторых, используя неравенства (2.6)-(2.7) и результаты, полученные в п.I.3., имеем

$$K^{(2)}(p,x,t)-K^{(1)}(p,x,t)\geqslant 0, \tag{2.42}$$

$$q^2\left[K_1^{(1)}(p,x,t)-\frac{K^{(1)}(p,x,t)K_1^{(2)}(p,x,t)}{K^{(2)}(p,x,t)}\right]+$$

$$+q\left[K_2^{(1)}(p,x,t)-\frac{K^{(1)}(p,x,t)K_2^{(2)}(p,x,t)}{K^{(2)}(p,x,t)}\right]\leqslant 0, \tag{2.43}$$

$$0<p\leqslant M,\ -\infty<q<\infty,\ (t,x)\in Q_T^2.$$

Нетрудно показать, что неравенство (I.32) для $u^{(2)}(t,x)$ имеет место при выполнении условий критичности краевых данных задачи (2.I4), (2.4I), (2.I5), $\nu=2$. Учитывая, что в ((2.43) q фактически равен $u_x^{(2)}(t,x)$, а также независимость изменения p,q,t,x в этом неравенстве, из (2.43) получаем следующие два неравенства

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{K^{(2)}(p,x,t)}{K^{(1)}(p,x,t)}\right]\geqslant 0,\ 0<p\leqslant M,\ (t,x)\in Q_T^2, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{K^{(2)}(p,x,t)}{K^{(1)}(p,x,t)}\right]\leqslant 0,\ 0<p\leqslant M,\ (t,x)\in Q_T^2. \tag{2.45}$$

Нетрудно заметить, что условия (2.42), (2.44) по своей структуре не отличаются от соответствующих неравенств (2.I6)-(2.I7). Условие (2.45) связано со спецификой функций (2.4I).

п.2.5. Уравнения со многими пространственными переменными

Здесь мы покажем, что метод получения априорных поточечных оценок старшей производной и способ сравнения решений различных параболических уравнений, изложенные в §§ I,2 для уравнений с одной пространственной переменной, можно перенести на задачи для параболических уравнений в многомерных областях.

I. Априорные поточечные оценки. Будем исследовать уравнения вида

$$u_t = \mathcal{L}(u) = L(u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N}, \Delta u), \quad (2.46)$$

где $\Delta u = \sum_{j=1}^{N} u_{x_j x_j}$ – N – мерный лапласиан. Мы будем также использовать для градиента функции запись ∇u, так, что $(\nabla u)^2 = \sum_{j=1}^{N} u_{x_j}^2$.

Будем считать, что уравнение (2.46) равномерно параболичеокое. Поэтому существует функция $L^{-1}_{(N+2)}$ $N+3$ – переменных, такая, что

$$L(p, q_1, \dots, q_N, L^{-1}_{(N+2)}(p, q_1, \dots, q_N, y)) = y \quad (2.47)$$

при всех $0 < p \leq M$, $-\infty < q_1, \dots, q_N < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Рассмотрим в $Q_T^{(N)}$ для уравнения (2.46) краевую задачу с условиями

$$u(t,x) = U_0(t,x), \ (t,x) \in \Gamma_T^{(N)}. \quad (2.48)$$

Пусть решение сформулированной задачи существует, причем

$$\sup_{(t,x)\in Q_T^{(N)}} u(t,x) = M < \infty .$$

Пусть функция L в (2.46) дифференцируема по всем своим аргументам. Определим условия критичности краевых данных (2.48) в задаче (2.46), (2.48) так же, как в § I для уравнения с одной пространственной переменной. Именно: условия (2.48) – критические, если

$$u_t(t,x) \geqslant 0 , \ (t,x)\in Q_T^{(N)}. \tag{2.49}$$

Пусть $U_0(t,x)\in C^{1,2}(\Gamma_T^{(N)}), u(t,x)\in C^{2,4}(Q_T^{(N)})$.

Тогда справедливо утверждение, аналогичное лемме I § I.

<u>Лемма I.2.</u> В сделанных предположениях относительно гладкости краевых данных и решения, для критичнооти краевых условий (2.48) задачи (2.46), (2.48) необходимо и достаточно

$$u_t(t,x) \geqslant 0 , \ (t,x)\in \Gamma_T^{(N)}. \tag{2.50}$$

Доказательство леммы I.2. аналогично доказательству соответствующей леммы I § I. Из (2.49) получаем при критических краевых условиях поточечную оценку

$$\Delta u \geqslant \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(N+2)}(u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}), \ (t,x)\in Q_T^{(N)}, \tag{2.5I}$$

где, как обычно

$$\overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(N+2)}(p, q_1, \dots, q_N) = L^{-1}_{(N+2)}(p, q_1, \dots, q_N, 0),$$
$$0 < p \leqslant M, \ -\infty < q_1, \dots, q_N < \infty .$$

Так же, как в § I, можно провести анализ критичности краевых условий для случая, когда в (2.46)

$$\mathcal{L}(u) = L(u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}, \Delta u, t, x). \qquad (2.52)$$

К условиям (2.50) необходимо добавить неравенство

$$L_{N+3}(p, q_1, \dots, q_N, \overset{\circ}{L}{}^{-1}_{(N+2)}(p, q_1, \dots, q_N, t, x), t, x) \geq 0, \qquad (2.53)$$

$$0 < p \leq M, \ -\infty < q_1, \dots, q_N < \infty, \ (t,x) \in Q_T^{(N)}.$$

Условия критичности краевых данных не меняются для вырождающихся параболических уравнений

$$u_t = \mathcal{L}_0(u) = k(u)\Delta u + k'(u)(\nabla u)^2, \qquad (2.54)$$

где функция $k(u)$ та же, что и в (I.24), если предположить, что $u(t,x) \in C^{2,4}(P_T^{(N)}(u))$ и вектор-функция $k(u(t,x))\nabla u(t,x)$ непрерывна в $P_T^{(N)}(u)$. Последнее предположение позволяет также анализировать вырождающиеся операторы вида

$$\mathcal{L}_1(u) = k(u)\Delta u + k'(u)(\nabla u)^2 + Q(u), \qquad (2.55)$$

где k и Q обладают теми же свойствами, что и в (I.34). Поточечная оценка Δu для оператора (2.55) имеет вид

$$\Delta u \geq -\frac{k'(u)}{k(u)}(\nabla u)^2 - \frac{Q(u)}{k(u)}, \ (t,x) \in P_T^{(N)}(u).$$

Из этой оценки можно получить оценку для оператора (2.54), если положить $Q(u) \equiv 0$.

Можно показать, что условия (I.4I), (2.50) влекут за собой критичность краевых данных для k и Q в (2.55), зависящих от переменной t.

2. Сравнение решений различных параболических уравнений со многими пространственными переменными. Рассмотрим в две задачи

$$u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(u^{(\nu)}, u_{x_1}^{(\nu)}, \dots, u_{x_N}^{(\nu)}, \Delta u^{(\nu)}), \tag{2.56}$$

$$u^{(\nu)}(t,x) = U_0^{(\nu)}(t,x), \ (t,x) \in \Gamma_T^{(N)}; \ \nu = 1,2. \tag{2.57}$$

Пусть $U_0^{(\nu)}$ – неотрицательные, ограниченные функции при $(t,x) \in \Gamma_T^{(N)}$. Пусть $U_0^{(1)}(t,x) \in C(\Gamma_T^{(N)})$, $U_0^{(2)} \in C^{1,2}(\Gamma_T^{(N)})$. Будем считать, что функции $L^{(\nu)}, \nu = 1,2$ в (2.56) дифференцируемы по всем $N+2$ своим аргументам. Предполагаем, что решения задач (2.56)–(2.57), ν = I,2 существуют, причем $u^{(1)}(t,x) \in C^{1,2}(Q_T^{(N)})$, $u^{(2)}(t,x) \in C^{2,4}(Q_T^{(N)})$. Пусть

$$\max\left\{ \sup_{(t,x)\in Q_T^{(N)}} u^{(1)}(t,x), \sup_{(t,x)\in Q_T^{(N)}} u^{(2)}(t,x) \right\} = M.$$

В этих условиях можно сформулировать теорему сравнения решений задач (2.56)–(2.57), ν = I,2 по своей постановке аналогичную теореме I.

<u>Теорема I.2.</u> Пусть выполняются предположения:

I) краевые условия (2.57) связаны неравенством

$$U_0^{(2)}(t,x) \geq U_0^{(1)}(t,x), \ (t,x) \in \Gamma_T^{(N)}, \tag{2.58}$$

2) краевые условия (2.57), ν = 2 в задаче (2.56)–(2.57), $\nu = 2$ являются критическими,

3) при $0 < p \leq M, -\infty < q_1, \dots, q_N < \infty, -\infty < z < \infty$ выполнены неравенства

$$L^{(2)}_{N+2}(p,q_1,\dots,q_N,z)-L^{(1)}_{N+2}(p,q_1,\dots,q_N,z)\geqslant 0, \quad (2.59)$$

$$L^{(1)}(p,q_1,\dots,q_N,\overset{\circ}{L}{}^{(2)-1}_{(N+2)}(p,q_1,\dots,q_N))\leqslant 0. \quad (2.60)$$

Тогда всюду в $\overline{Q}_T^{(N)}$ справедливо неравенство

$$u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x).$$

Доказательство этого утверждения целиком повторяет доказательство теоремы I. Природа условий (2.59)-(2.60) та же, что и неравенств (2.6)-(2.7) в теореме I. В доказательстве используется априорная оценка (2.5I) для решения задачи (2.56)-(2.57), $\nu=2$.

Теорема сравнения остается справедливой для вырождающихся операторов

$$\mathcal{L}_0^{(\nu)}(u^{(\nu)})=K^{(\nu)}(u^{(\nu)})\Delta u^{(\nu)}+K^{(\nu)\prime}(u^{(\nu)})(\nabla u^{(\nu)})^2,\ \nu=1,2, \quad (2.6I)$$

где функции $K^{(\nu)}$ те же, что и в (2.I4). При этом необходимо условие непрерывности $K^{(\nu)}(u^{(\nu)})\nabla u^{(\nu)}$ в $P_T^{(N)}(u^{(\nu)}),\nu=1,2$. Неравенства (2.59)-(2.60) в этом случае совпадают с (2.I6)-(2.I7), полученными для уравнений с одной пространственной переменной.

При условии, что $\nabla v^{(\nu)}(t,x)$ непрерывны в $P_T^{(N)}(v^{(\nu)})$, $\nu=1,2$ анализ условий (2.59)-(2.60) можно провести для операторов вида

$$\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)})=\varphi^{(\nu)}(u^{(\nu)})\Delta u^{(\nu)},\ \nu=1,2. \quad (2.62)$$

Уравнения (2.56), (2.6I) могут быть приведены к виду (2.56), (2.6I) уже указанным преобразованием (2.34)-(2.35). Условие на операторы имеет вид (2.33).

Так же можно доказать теорему сравнения для вырождающихся операторов

$$\mathcal{L}_1^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\Delta u^{(\nu)} + k^{(\nu)\prime}(u^{(\nu)})(\nabla u^{(\nu)})^2 + Q^{(\nu)}(u^{(\nu)}),$$
$$\nu = 1,2,$$

если вектор-функции $k^{(\nu)}(u^{(\nu)})\nabla u^{(\nu)}$ непрерывны в $P_T^{(N)}(u^{(\nu)})$, где $\nu = 1,2$ соответственно.

Теоремы сравнения решений уравнений с операторами (2.61), (2.63) имеют важное значение при анализе вопросов и задач, сформулированных в [18-25]. Одну такую задачу для уравнения с оператором типа (2.61) мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 3. Метастабильная локализация возмущений

В этом параграфе теоремы сравнения решений, доказанные в § 2, будут применены для анализа одной конкретной физической задачи.

п.3.1. Постановка задачи. Определение локализации возмущений

Для уравнений (1.24) с вырождающимся оператором будем рассматривать задачу Коши в Q_T^1 с начальным условием (1.3) и первую краевую задачу в Q_T^2 с краевыми данными (1.4)-(1.5). Помимо условия $k(0) = 0$, будем предполагать, что

$$\int_0^\lambda \frac{k(p)}{p}\,dp < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty. \tag{3.1}$$

В работе [9] установлено, что при выполнении условия (3.1) в задачах для уравнения (1.24) имеет место конечная скорость

распространения возмущений. Это свойство решений состоит в следующем: если

$$\operatorname{mes}\{\Omega \setminus \operatorname{supp} u_0(x)\} > 0, \tag{3.2}$$

то существует такое $0 < \bar{t} \leq T$, что

$$\operatorname{mes}\{\Omega \setminus \operatorname{supp} u(t,x)\} > 0, \; 0 < t < \bar{t}. \tag{3.3}$$

Здесь $\Omega = \Omega_i$, $i = 1,2$ в зависимости от того какую задачу мы рассматриваем.

В работе [28] было показано, что условие (3.I) является необходимым для конечной скорости распространения возмущений – если интеграл в (3.I) расходится, то неравенство (3.3) не выполняется ни при каком $\bar{t} > 0$.

В работах [I-5] подробно изучен эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью (как уже упоминалось, уравнение (I.24) описывает процесс распространения тепла). Не вдаваясь в физическую природу эффекта и причины, стимулирующие его изучение, охарактеризуем математическую сторону проблемы.

Рассмотрим сначала первую краевую задачу. Пусть при задается специальный закон изменения $u(t,0)$

$$u_1(t) \longrightarrow +\infty, \; t \to T^-. \tag{3.4}$$

Пусть, кроме того

$$\operatorname{supp} u_0(x) = a < \infty. \tag{3.5}$$

<u>Определение</u>. Будем говорить; что в задаче (I.24), (I.4)-(I.5), (3.4)-(3.5) имеет место метастабильная локализация возмущений, если найдется положительная постоянная величина x_0, такая, что

$$\operatorname{supp} u(t,x) \leqslant x_0 \,, \; 0<t<T. \tag{3.6}$$

(Заметим, что $a \leqslant x_0$). В противном случае локализация возмущений отсутствует.

Минимально возможную величину x_0 в (3.6) будем называть глубиной локализации.

Рассмотрим теперь задачу Коши. Пусть начальное распределение (I.3) удовлетворяет условию (3.5).

Определение. Будем говорить, что в задаче (I.24), (I.3), (3.5) имеет место метастабильная локализация возмущений, если существует $0<t^* \leqslant T$, такое, что

$$\operatorname{supp} u(t,x) = a \,, \; 0<t<t^*. \tag{3.7}$$

Замыкание множества $\{x: u_0(x) > 0\}$ будем называть областью локализации возмущений, а величину t^* – временем локализации.

Локализация возмущений в задачах для уравнения (I.24) определяется структурой краевых данных "в целом" и потому является более "тонким", чем конечная скорость распространения возмущений (3.2)–(3.3), свойством этого уравнения и коренным образом от него отличается.

Поясним смысл определений. В первом из них содержится следующее: за время $0 \leqslant t < T$ возмущения далее известной длины не проникают, хотя $u(t,0)$ при $t \to T^-$ неограниченно возрастает (вообще говоря, возможен случай, когда $u(t,x) \to \infty$, $t \to T^-$, $0 \leqslant x < x^0 < \infty$). Во втором определении локализация возмущений в задаче Коши понимается, как нераспространение возмущений за пределы первоначального носителя в течение конечного интервала изменения времени.

Естественно, локализация возмущений невозможна, если не выполняется условие (3.I).

п.3.2. Достаточные условия локализации возмущений

Здесь мы оформулируем теоремы о локализации возмущений или ее отсутствии, используя теоремы сравнения решений различных уравнений.

Теорема 2. Пусть в задаче (I.24), (I.4)-(I.5)

I) $u_0(x) \leq T^n (1 - x/x_0)^{2/\sigma}, \; x \leq x_0,$

$$u_0(x) = 0, \; x > x_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]^{1/2} T^{(1+n\sigma)/2}.$$

Здесь σ, n – некоторые постоянные величины, $\sigma > 0$, $n < 0$, $1 + n\sigma \geq 0$.

2) $u_1(t) \leq (T-t)^n, \; 0 \leq t < T,$

3) $k(u) = u^\sigma / [1 + \lambda(u)], \; \lambda(u) \geq 0, \; \lambda'(u) \geq 0, \; 0 < u < \infty.$

Тогда в задаче имеет место метастабильная локализация тепла и глубина локализации не превосходит x_0. Кроме того

$$u(t,x) \leq T^{(1+n\sigma)/\sigma} (T-t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_0)^{2/\sigma}, \; 0 < t < T, \; x \leq x_0,$$

$$u(t,x) = 0, \; 0 < t < T, \; x > x_0.$$

Если кроме всего прочего $u_0(x) > 0$ при $0 \leq x < x_0$, то глубина локализации в точности равна x_0.

Теорема 3. Пусть в задаче (I.24), (I.4)-(I.5)

I) $u_1(t) \geq (T-t)^n, \; 0 \leq t < T, \; n < 0,$

2) $k(u) = u^{\sigma}[1+\lambda(u)]$, $\lambda(u) \geqslant 0, \lambda'(u) \geqslant 0, 0<u<\infty$,

Здесь $\sigma > 0$, $1+n\sigma<0$.

Тогда в задаче отсутствует локализация возмущений. Более того, для любого $x^* \in \Omega_2$

$$u(t,x^*) \to \infty, \ t \to T^-.$$

<u>Теорема 4</u>. Пусть в задаче (I.24), (I.3)

I) $0 < u_0(x) \leqslant u_m(1-|x|/x_m)^{2/\sigma}$, $|x|<x_m$,

$u_0(x) = 0$, $|x| \geqslant x_m$.

Здесь u_m, x_m, σ – некоторые положительные константы.

2) $k(u) = u^{\sigma}/[1+\lambda(u)]$, $\lambda(u) \geqslant 0, \lambda'(u) \geqslant 0, 0<u<\infty$.

Тогда в задаче имеет место метастабильная локализация возмущений, область локализации – множество $\{x: |x| \leqslant x_m\}$. Кроме того

$$0 < u(t,x) \leqslant [x_m^2\sigma/2(\sigma+2)]^{1/\sigma}(t^*-t)^{-1/\sigma}(1-|x|/x_m)^{2/\sigma}, 0<t<t^*, |x|<x_m,$$

$$u(t,x) = 0, \ 0<t<t^*, |x| \geqslant x_m,$$

где $t^* = \dfrac{x_m^2\sigma}{2u_m^{\sigma}(\sigma+2)}$ – время локализации.

Утверждения теорем 2,3,4 доказаны в работе [5] при $\lambda(u) = 0$, $0<u<\infty$. Если $\lambda(u) \not\equiv 0$, то справедливость теорем следует из теоремы I.I, замечания I к ней и теоремы сравнения решений по краевым условиям, доказанной в

[9] .

Более детальные оценки для локализованных краевых условий можно получить из свойств автомодельных решений уравнения (I.24) при $k(u)=u^{\sigma}$, $\sigma>0$, которые можно найти в [7].

п.3.3. Локализация возмущений в многомерных областях

Здесь, на примере анализа вырождающегося параболического уравнения с двумя пространственными переменными, мы покажем, что результаты п.3.2. могут быть перенесены на многомерные области.

Рассмотрим в $Q_T^{(2)}$, где $\Omega^{(2)}=\Omega_2^{(2)}=\{(x_1,x_2):$ $0<x_1<\infty,\ 0<x_2<\infty\}$, первую краевую задачу для уравнения (2.54) с условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\ x\in\Omega_2^{(2)}, \tag{3.8}$$

$$u(t,0,x_2)=u_{11}(t,x_2),\ 0\le t<T,\ x_2\in\Omega_2, \tag{3.9}$$

$$u(t,x_1,0)=u_{12}(t,x_1),\ 0\le t<T,\ x_1\in\Omega_2. \tag{3.10}$$

Здесь $u_0(x)\in C^2(\Omega_{20}^{(2)}(u_0))\cap C(\Omega_2^{(2)})$, $u_{11}(t,x_2)\in$ $\in C^{1,2}(P_T^2(u_{11}))\cap C(Q_T^2)$, $u_{12}(t,x_1)\in C^{1,2}(P_T^2(u_{12}))\cap C(Q_T^2)$.

Пусть решение сформулированной задачи существует, причем $u(t,x)\in C^{1,2}(P_T^{(2)}(u))\cap C(Q_T^{(2)})$

Для уравнения (2.54) в $Q_T^{(2)}$, где $\Omega^{(2)}=\dot{\Omega}_1^{(2)}=$ $=\{(x_1,x_2):-\infty<x_1<\infty,-\infty<x_2<\infty\}$, сформулируем задачу Коши с начальным условием

$$u(0,x)=u_0(x),\ x\in\Omega_1^{(2)}, \tag{3.11}$$

где $u_0(x) \in C^2(\Omega_{10}^{(2)}(u_0)) \cap C(\Omega_1^{(2)})$.

Будем считать, что решение этой задачи существует, причем $u(t,x) \in C^{1,2}(P_T^{(2)}(u)) \cap C(Q_T^{(2)})$.

Сформулированные ниже утверждения по своему смыслу эквивалентны теоремам 2 и 4 и дают достаточные условия локализации возмущений в первой краевой задаче и задаче Коши соответственно.

Теорема 5. Пусть в задаче (I.24), (3.8) – (3.10)

I) $u_0(x) \leq T^n(1 - \sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_i / x_0)$, $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_i \leq x_0$,

$u_0(x) = 0$, $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_i > x_0$.

Здесь $n, \alpha_1, \alpha_2, x_0, \sigma$ – постоянные величины, причем $n < 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \sigma > 0$, $1 + n\sigma \geq 0$, $x_0 = [2(\sigma+2)/\sigma]\, T^{(1+n\sigma)/2}$.

2) $u_{11}(t,x_2) \leq (T-t)^n (1 - \alpha_2 x_2 / x_0)^{2/\sigma}$, $0 < t < T$, $x_2 \leq x_0/\alpha_2$,

$u_{11}(t,x_2) = 0$, $0 < t < T$, $x_2 > x_0/\alpha_2$,

$u_{12}(t,x_1) \leq (T-t)^n (1 - \alpha_1 x_1 / x_0)^{2/\sigma}$, $0 < t < T$, $x_1 \leq x_0/\alpha_1$,

$u_{12}(t,x_1) = 0$, $0 < t < T$, $x_1 > x_0/\alpha_1$,

3) $K(u) = u^\sigma / [1 + \lambda(u)]$, $\lambda(u) \geq 0$, $\lambda'(u) \geq 0$, $0 < u < \infty$.

Тогда справедливо следующее утверждение

$$u(t,x) \leq T^{(1+n\sigma)/\sigma} (T-t)^{-1/\sigma} \left(1-\sum_{i=1}^{2} d_i x_i / x_0\right)^{2/\sigma}, \; 0<t<T,$$
$$\sum_{i=1}^{2} d_i x_i \leq x_0,$$

$$u(t,x) = 0, \; 0<t<T, \; \sum_{i=1}^{2} d_i x_i > x_0,$$

<u>Теорема 6</u>. Пусть в задаче (I.24), (3.II)

I) $0 < u_0(x) \leq u_m \left(1-\sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| / x_m\right)^{2/\sigma}, \; \sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| \leq x_m,$

$$u_0(x) = 0, \; \sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| \geq x_m .$$

Здесь $u_m > 0$, $x_m > 0$ и σ, d_1, d_2 – те же, что и в условиях теоремы 5.

2) $k(u) = u^{\sigma} / [1+\lambda(u)]$, $\lambda(u) \geq 0$, $\lambda'(u) \geq 0$, $0<u<\infty$.

Тогда выполнено следующее утверждение

$$0 < u(t,x) \leq [x_m^2 \sigma / 2(\sigma+2)]^{1/\sigma} (t^*-t)^{-1/\sigma} \left(1-\sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| / x_m\right)^{2/\sigma},$$
$$0<t<t^*, \; \sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| < x_m,$$

$$u(t,x) = 0, \; 0<t<t^*, \; \sum_{i=1}^{2} d_i |x_i| \geq x_m,$$

где

$$t^* = \frac{x_m^2 \sigma}{2 u_m^{\sigma} (\sigma+2)} .$$

Если $\lambda(u) \equiv 0$, то доказательство утверждений, сформулированных в этих теоремах, изложено в работе [4]. Там же можно найти более детальные оценки для краевых данных, обуславливающих локализацию возмущений. При $\lambda(u) \not\equiv 0$ доказательство теорем 5,6 проводится методами, аналогичными тем, которые применялись для анализа параболических уравнений со многими пространственными переменными.

Используя результаты работы [4], можно перенести сформулированные в теоремах 5,6 утверждения на большее число пространственных переменных. Следует отметить, что это возможно при некоторых предположениях относительно свойств решения задачи (см. п.2.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Докл. АН СССР, 223, № 6, 1344-1347.
2. Курдюмов С.П. Нелинейные процессы в плотной плазме. Статья в сб.докладов на II-ой Межд.конф. по теории плазмы (Киев, 1974), Изд. "Наукова Думка", 1976, стр.278.
3. Дмитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 103.
4. Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Плохотников К.Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой "кристалл". Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 23.
5. Михайлов А.П. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 64.
6. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. ЖВМ и МФ, 1963, 3, № 4, 703-719.
7. Галактионов В.А., Михайлов А.П. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 53.
8. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 3, 492-495.
9. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, сер.матем., 1958, 22, № 5, 667-704.

10. Лихт М.К. О распространении возмущений в задачах, связанных о вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа. Дифф. ур., 1969, 2, № 7, 953-957.

11. Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка. Матем. оборн., 1969, 78, № 3, 374-396.

12. Олейник О.А., Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. УМН, 1961, 16, № 5, 115-155.

13. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.

14. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М., "Мир", 1968.

15. Гусаров А.Л. О сравнении решений параболических уравнений. Вестн. МГУ, 1977, сер.матем.мех., № 2, 77-85.

16. Крылов Н.В. Принцип максимума для параболических уравнений. УМН, 1976 , 31, № 4, 267-268.

17. Калашников А.С. О непрерывной зависимости обобщенных решений уравнения нестационарной фильтрации от функции, задающей режим потока. Прикл.Мех.Мат., 1978, 42, № 1, 183-185.

18. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, 321-324.

19. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, 237, № 6, 1330-1333.

20. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. N и S режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. Обзор в ПМТФ, 1977, № 1.

21. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 106.

22. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Змитренко Н.В., Михайлов А.П. Non-linear prosesses in a dense plasma.

В сб.докл. совещ. экспертов МАГАТЭ (Дубна: 1976)

"Technology of inertial confinement experiments".Technical document IAEA-200.Vienna,p.185(1977).

23. Самарский А.А. Численные методы в физике плазмы. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 107.

24. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Взаимодействие тепловых структур. Препринт ИПМ АН СССР, 1978, № 77.

25. Еленин Г.Г., Плохотников К.Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 91.

26. Kaplan S.On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations.Comm.Pure Appl.Math., 1963, 16, 305-330.

27. Соболевский П.Е. О локальной и нелокальной теоремах существования для нелинейных параболических уравнений второго порядка. Докл. АН СССР, 1961, 136, № 2, 292-295.

28. Калашников А.С. Об уравнениях типа неотационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений. Вестник МГУ, сер. матем., механ., 1972, № 6, 45-49.

В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский.
"Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной".
Редактор А.А. Арсеньев. Корректор В.М. Марченко.

Подписано к печати 22.02.79г. №Т-05807. Заказ № 5282.
Формат бумаги 60 X 90, 1/16. Тираж 200 экз.
Объем 2,7 уч. изд. л. Цена 20 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

©

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме: и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl. Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq. 4 Institute of Applied Mathematics, Ac. of Sc., the USSR, Information Bureau.