63

ПРЕПР.
Н-63

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Е.С. Николаев, А.А. Самарский.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Препринт № 63 за 1979 г.

Москва.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы для решения разностных эллиптических краевых задач были разработаны эффективные прямые методы - метод разделения переменных, использующий алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье, и метод циклической редукции [I] - [5] . Применение названных методов ограничивается классом задач с разделяющимися переменными. Этот класс включает краевые задачи для основных уравнений эллиптического типа 2-го порядка, заданных в криволинейных ортогональных системах координат. Примером такой задачи является следующая: на прямоугольной неравномерной по каждому направлению сетке, заданной в прямоугольнике $\bar{G}$, требуется найти решение разностного аналога эллиптического уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-q_\alpha(x_\alpha)u\right]=-f(x),$$

удовлетворяющее на границе прямоугольника краевому условию третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\varkappa(x)u+\mu(x),$$

где $\varkappa(x)$ есть константа на каждой стороне прямоугольника. Если число узлов сетки по одному направлению есть степень 2, то метод циклической редукции позволяет решить эту задачу с затратой $O(N^2 \ln N)$ арифметических операций [4] . Отметим, что построен вариант метода циклической редукции и для случая произвольного числа узлов сетки [5] .

В данной работе мы расомотрим некоторые аспекты использования быстрых прямых методов для решения разностных эллиптических задач в случаях, когда разделение переменных не имеет места.

Первый класс задач с неразделяющимися переменными составляет краевые задачи для общего эллиптического уравнения, заданного в прямоугольнике. Например, пусть требуется найти решение задачи

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = -f(x), \quad x \in \omega,$$

$$y(x) = g(x), \quad x \in \gamma,$$

где $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ – сетка в прямоугольнике $\bar{G}$, а коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leq a_\alpha(x) \leq c_2, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \bar{\omega}.$$

Для приближенного решения этой задачи можно использовать, например, неявный чебышевский итерационный метод [8], выбирая в качестве оператора B в схеме

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, \ldots$$

оператор, соответствующий разностному оператору Лапласа $Ry = \sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$. В этом случае число итераций не зависит от числа узлов сетки:

$$n \geq n_0(\varepsilon) = O\left(\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

а для решения уравнения $By_{k+1} = F_k = (B - \tau_{k+1} A) y_k + \tau_{k+1} f$ можно использовать указанные выше прямые методы.

Итак, приведенный метод состоит в сведении исходной задачи с неразделяющимися переменными к решению серии задач с различными правыми частями, но с одним и тем же оператором, переменные в котором разделяются.

Таким подходом целесообразно пользоваться, если отношение c_1/c_2 не является малым параметром. Для случая сильно меняющихся коэффициентов $a_\alpha(x)$ можно рекомендовать использовать попеременно-треугольный метод [8] .

Второй класс составляют краевые задачи для эллиптического уравнения, заданного в нерегулярной области, отличной от прямоугольника. Здесь возможно несколько подходов. Если соответствующая разностная задача записывается в виде системы трехточечных векторных уравнений, то можно использовать метод матричной прогонки [8] . Основной недостаток этого метода заключается в необходимости вычисления и запоминания большого объема промежуточных данных. Если решается единичная задача, то нахождение этих величин занимает большую часть от времени решения всей задачи.

Иная ситуация возникает, если решается серия задач, отличающихся лишь правой частью. Здесь основной объем промежуточной информации находится при решении только первой задачи и эта информация может быть использована при решении каждой последующей задачи.

Переход к неявным итерационным методам позволяет существенно уменьшить объем запоминаемой информации, а также число арифметических операций, и свести решение исходной задачи к серии задач с оператором B , имеющим простую структуру. Так в случае попеременно-треугольного метода оператор B является факторизованным и допускает явное решение уравнения $By_{k+1} = F_k$. В этом методе обращение оператора B является простой задачей, но число итераций зависит от числа узлов сетки.

Если в качестве оператора B взять нефактризованный разностный оператор, например, оператор Лапласа, то при решении соответствующих разностных задач с неразделяющимися переменными число итераций не будет зависеть от числа узлов сетки. Общий объем вычислительной работы будет определяться в основном методом решения уравнения $By_{k+1} = F_k$. Таким образом, можно ограничиться построением метода решения серии задач, заданных на сетке в области сложной формы, с оператором B простой структуры. При таком подходе необходимая промежуточная информация, определяемая формой области и структурой оператора B и не зависящая от правой части F_k может быть найдена один раз до начала процесса итераций на подготовительном этапе. Отметим, что эта информация не будет зависеть и от конкретного оператора A, определяющего исходную задачу. Это особенно важно для случая, когда решается в фиксированной области серия задач с различными операторами A, например, в квазистационарных задачах, где $A = A(t)$.

В излагаемых ниже методах разделения областей и дополнения области до прямоугольника осуществляется сведение задачи $By_{k+1} = F_k$ к задаче, заданной на сетке в некотором прямоугольнике (или прямоугольниках), что позволяет использовать эффективные прямые методы. Материал этого препринта по содержанию и характеру изложения естественно примыкает и может служить дополнением к главам Ш,IУ книги авторов [8].

§ I. Метод разделения областей

Пусть в сложной области, составленной из нескольких регулярных областей, требуется найти решение разностной краевой задачи. Будем предполагать, что в каждой регулярной области данное разностное уравнение при определенных краевых условиях на границах раздела этих областей может быть решено одним из эффективных прямых или итерационных методов. При этих предположениях исходная задача в сложной области может быть решена в два этапа. Сначала на границах раздела областей определяются краевые условия, которым удовлетворяет искомое решение задачи, затем в каждой регулярной области независимо решается данное разностное уравнение с соответствующими краевыми условиями.

Изложим этот метод на примере решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области, составленной из двух соприкасающихся по отрезку прямоугольников. Для решения разностной задачи в прямоугольнике можно использовать прямые методы, изложенные в главах III–IУ книги [8].

Пусть область $\bar{G}$ составлена из двух прямоугольников, $\bar{G} = \bar{G}^{(1)} \cup \bar{G}^{(2)}$: $\bar{G}^{(\alpha)} = \{ l_1^{(\alpha)} \le x_1 \le L_1^{(\alpha)},\ l_2^{(\alpha)} \le x_2 \le L_2^{(\alpha)} \}$, $\alpha = 1, 2$,

соприкасающихся по отрезку $\bar{\Gamma}^{(0)} = \{ \max(l_1^{(1)}, l_1^{(2)}) \le x_1 \le \min(L_1^{(1)}, L_1^{(2)}),\ x_2 = l_2^{(2)} = L_2^{(1)} \}$ (см. рис. I).

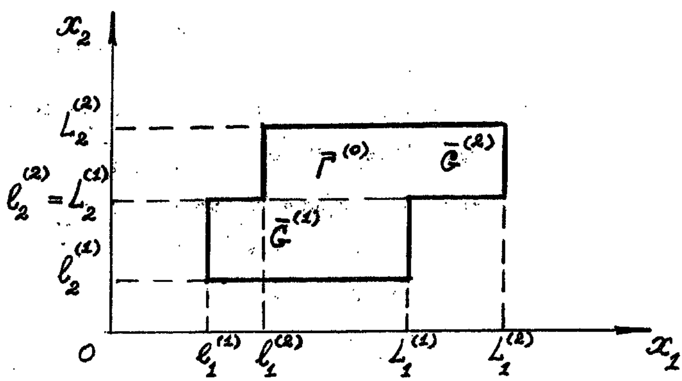

Рис. I.

Обозначим через Γ границу области $\bar{G}$. Часть границы прямоугольника $\bar{G}^{(\alpha)}$ без интервала $\Gamma^{(0)}$ обозначим $\Gamma^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$. Поставим задачу: найти в области $\bar{G}$ решение уравнения Пуассона, принимающее на Γ заданные значения

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \qquad u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \tag{I}$$

Сформулируем сначала разноотный аналог задачи (I). Для этого в прямоугольнике $\bar{G}^{(\alpha)}$ введем сетку $\bar{\omega}^{(\alpha)}$, равномерную по направлению x_2 :

$$\bar{\omega}^{(\alpha)}=\{x_{ij}=(x_1(i),x_2(j)),\ x_1(i)=x_1(i-1)+h_1^{(\alpha)}(i),\ 1\le i\le N_1^{(\alpha)}$$

$$x_1(0)=\ell_1^{(\alpha)},\ x_1(N_1^{(\alpha)})=L_1^{(\alpha)},\ x_2(j)=\ell_2^{(\alpha)}+j\,h_2^{(\alpha)},$$

$$0\le j\le N_2^{(\alpha)},\ N_2^{(\alpha)}h_2^{(\alpha)}=L_2^{(\alpha)}-\ell_2^{(\alpha)}\},\quad \alpha=1,2.$$

Сетки $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ должны быть согласованными. Это означает, что узлы этих сеток, лежащие на $\bar{\Gamma}^{(0)}$, совпадают.

Для области, изсбраженной на рис.I, согласованные сетки можно задать следующим образом. На каждом отрезке $[\ell_1^{(1)},\ell_1^{(2)}]$, $[\ell_1^{(2)},L_1^{(1)}]$ и $[L_1^{(1)},L_2^{(1)}]$ строится своя одномерная сетка, равномерная или неравномерная. Через узлы проводятся параллельно оси Ox_2 прямые. Далее, на отрезках $[\ell_2^{(1)},L_2^{(1)}]$ и $[\ell_2^{(2)},L_2^{(2)}]$ вводятся равномерные одномерные сетки с шагами $h_2^{(1)}$ и $h_2^{(2)}$ соответственно, через узлы которых проводятся параллельно оси Ox_1 прямые. Точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых, принадлежащие прямоугольнику $\bar{G}^{(\alpha)}$ образуют сетку $\bar{\omega}^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$.

Объединение сеток $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ образует сетку $\bar{\omega}$ в области $\bar{G}$. Обозначим через ω – внутренние, а через γ – граничные узлы сетки $\bar{\omega}$. Через $\omega^{(\alpha)}$ будем обозначать внутренние узлы сетки $\bar{\omega}^{(\alpha)}$, а через $\gamma^{(\alpha)}$ – узлы сетки $\bar{\omega}^{(\alpha)}$, лежащие на $\Gamma^{(\alpha)}$. Через $\gamma^{(0)}$ обозначим общие узлы сеток $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$, лежащие на интервале $\Gamma^{(0)}$. Тогда $\bar{\omega}^{(\alpha)}=\omega^{(\alpha)}\cup\gamma^{(\alpha)}\cup\gamma^{(0)}$, $\alpha=1,2$, и $\omega=\omega^{(1)}\cup\omega^{(2)}\cup\gamma^{(0)}$.

На сетке $\bar{\omega}$ построим разностную схему, аппроксимирующую (I)

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \qquad (2)$$
$$y(x) = g(x), \quad x \in \gamma,$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, а разностные операторы Λ_1 и Λ_2 определяются формулами: $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1}$ и

$$\Lambda_2 y = \begin{cases} y_{\bar{x}_2 x_2}, & x \in \omega^{(\alpha)}, \\ \dfrac{2}{h_2^{(1)} + h_2^{(2)}} \left[\dfrac{y(x_1, x_2 + h_2^{(2)}) - y(x_1, x_2)}{h_2^{(2)}} - \dfrac{y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2^{(1)})}{h_2^{(1)}} \right], & x \in \gamma^{(0)}. \end{cases}$$

Переходим к построению метода решения задачи (2). Заметим, что если будет найдено значение $y(x)$ при $x \in \gamma^{(0)}$, то задача (2) распадется на две независимые задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольниках $\bar{G}^{(1)}$ и $\bar{G}^{(2)}$. Следовательно, в рассматриваемом случае на границе раздела регулярных областей (прямоугольников) должно быть определено краевое условие первого рода.

Нахождение искомых значений $y(x)$ на $\gamma^{(0)}$ будем осуществлять следующим образом. Сначала сведем задачу (2) к задаче с однородными краевыми условиями и правой частью, отличной от нуля лишь при $x \in \gamma^{(0)}$. Для этого определим функцию $v(x)$ – решение задачи

$$\Lambda v = -\varphi(x), \quad x \in \omega - \gamma^{(0)},$$
$$v(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(0)}, \qquad (3)$$
$$v(x) = g(x), \quad x \in \gamma.$$

Отметим, что задача (3) распадается на две задачи, задаваемые на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$. Мы перешли от задачи (2) к задаче (3), заменив уравнение $\Lambda y = -\varphi(x)$ на условие

$v(x)=0$ в узлах, принадлежащих $\gamma^{(0)}$.

Из (2), (3) находим, что функция $z=y-v$ есть решение задачи

$$\Lambda z=0,\ x\in\omega-\gamma^{(0)},\ \Lambda z=-\psi(x),\ x\in\gamma^{(0)}, \tag{4}$$
$$z(x)=0,\ x\in\gamma,$$

где $\psi(x)=\varphi(x)+\Lambda v(x)$. Так как $v(x)=0$ для $x\in\gamma^{(0)}$, то $y(x)=z(x)$ для $x\in\gamma^{(0)}$. Следовательно, искомое решение задачи (2) может быть найдено как решение краевой задачи

$$\Lambda y=-\varphi(x),\ x\in\omega-\gamma^{(0)},\ y(x)=z^{(0)}(x),\ x\in\gamma^{(0)}, \tag{5}$$
$$y(x)=g(x),\ x\in\gamma,$$

где $z^{(0)}(x)$ — значение решения $z(x)$ задачи (4) для $x\in\gamma^{(0)}$. Задача (5), как и задача (3), распадается на две отдельные задачи в $\bar G^{(1)}$ и $\bar G^{(2)}$.

Найдем $z^{(0)}(x)$. Для этого изучим задачу (4) при любом $\psi(x)$. Так как Λ — линейный разностный оператор и функция $z(x)$ удовлетворяет на γ однородному краевому условию, то решение задачи (4) линейным образом выражается через правую часть уравнения (4). Учитывая структуру правой части, получим, что $z^{(0)}(x)$ и $\psi(x)$ связаны соотношением, которое можно записать в виде

$$\sum_{\xi\in\gamma^{(0)}} a(x,\xi)\,z^{(0)}(\xi)=\psi(x),\ x\in\gamma^{(0)}, \tag{6}$$

где $a(x,\xi)$ — некоторые коэффициенты.

Заметим, что невырожденность матрицы $Q=(a(x,\xi))$ системы (6) следует из единственности решения задачи (4). Кроме того, коэффициенты $a(x,\xi)$ не зависят от $\psi(x)$, а определяются лишь оператором Λ, сеткой $\bar\omega$ и геометрией области $\bar G$. Поэтому, задача нахождения $a(x,\xi)$ является самостоятельной частью расоматриваемого метода. Если эти коэффициенты будут определены, то искомое $z^{(0)}(x)$ можно вычиолить, решая оистему (6) при указанном выше $\psi(x)$.

Рассмотрим способ нахождения $a(x,\xi)$. Из (4), (6) следует, что для любого $\psi(x)$ решение задачи (4) удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{\xi\in\gamma^{(0)}} a(x,\xi)z^{(0)}(\xi) = -\Lambda z(x), \quad x\in\gamma^{(0)}. \tag{7}$$

Пуоть $w(x)$ - решение задачи

$$\Lambda w = 0, \ x\in\omega-\gamma^{(0)}, \ w(x) = w^{(0)}(x), \ x\in\gamma^{(0)}, \quad w(x) = 0, \ x\in\gamma \tag{8}$$

при произвольно заданной функции $w^{(0)}(x)$. Этому решению соответствует некоторая функция $\psi(x) = -\Lambda w(x), \ x\in\gamma^{(0)}$. Следовательно, $w(x)$ есть решение задачи

$$\Lambda w = 0, \ x\in\omega-\gamma^{(0)}, \ \Lambda w = -\psi(x), \ x\in\gamma^{(0)},$$
$$w(0) = 0, \ x\in\gamma.$$

Поэтому, в силу (7), верны равенства

$$\sum_{\xi\in\gamma^{(0)}} a(x,\xi)w^{(0)}(\xi) = -\Lambda w(x), \quad x\in\gamma^{(0)}, \tag{9}$$

позволяющие найти коэффициенты $a(x,\xi)$.

Действительно, положим в (8), (9)

$$w^{(0)}(x) = \delta(x-\eta) = \begin{cases} 0, & x\neq\eta, \\ 1, & x=\eta, \end{cases} \tag{10}$$

где $x\in\gamma^{(0)}$, а η - произвольный узел, принадлежащий $\gamma^{(0)}$. Из (9) получим

$$a(x,\eta) = -\Lambda w(x), \quad x\in\gamma^{(0)}, \tag{11}$$

где $w(x)$ - решение задачи (8), (10). Выбирая в качестве η

последовательно все узлы множества $\gamma^{(0)}$, найдем значения $a(x,\xi)$ для всех x и ξ, принадлежащих $\gamma^{(0)}$.

Таким образом, для нахождения решения задачи (2) построенным выше методом необходимо: I) вычислить коэффициенты $a(x,\xi)$ для $x,\xi\in\gamma^{(0)}$, 2) решить вспомогательную задачу (3) и вычислить функцию $\Psi(x)=\varphi(x)+\Lambda v(x)$, 3) решить систему алгебраических уравнений (6) и найти решение задачи (5).

Замечание 1. Метод разделения областей можно применять и тогда, когда на сторонах $x_1=l_1^{(\alpha)}$ и $x_1=L_1^{(\alpha)}$, $\alpha=1,2$, а также на сторонах $x_2=l_2^{(1)}$ и $x_2=L_2^{(2)}$ задана любая комбинация краевых условий первого, второго или третьего рода. Для этого краевое условие первого рода, заданное в задачах (3) и (5) для $x\in\gamma$, следует заменить на соответствующее краевое неоднородное условие на каждой части границы γ. В задаче (8) однородное краевое условие первого рода на γ, заменяется на соответствующее однородное условие.

Если на части границы Γ прямоугольника $\bar{G}$, лежащей на прямой $x_2=l_2^{(2)}=L_2^{(1)}$ (см. рис.), может быть задано краевое условие не первого рода, то в $\gamma^{(0)}$ следует включить те узлы сетки $\bar{\omega}$, которые принадлежат указанной части границы Γ.

§ 2. Алгоритм метода разделения областей

Остановимся более подробно на рассмотрении каждого этапа построенного метода.

I. Подготовительный этап. Цель этапа – вычисление $a(x,\xi)$. Если решается серия задач (2) с различными $\varphi(x)$ и $g(x)$, то коэффициенты $a(x,\xi)$ целесообразно вычислить один раз и запомнить. Коэффициент $a(x,\eta)$ находится по формуле (II), где $w(x)$ – решение задачи (8), (I0) при $\eta \in \gamma^{(0)}$.

При выборе метода решения этой задачи следует учесть, что функцию $w(x)$ достаточно найти лишь в узлах, расположенных на ближайших снизу и сверху к $\gamma^{(0)}$ строках сетки $\bar{\omega}$.

Обозначим $w^{(\alpha)}(x) = w(x)$, $x \in \omega^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$

Используя эти обозначения, запишем задачу (8), (I) в виде двух задач

$$\Lambda w^{(\alpha)} = 0, \; x \in \omega^{(\alpha)}, \; w^{(\alpha)}(x) = 0, \; x \in \gamma^{(\alpha)}, \\ w^{(\alpha)}(x) = \delta(x-\eta), \; x, \eta \in \gamma^{(0)}, \; \alpha = 1, 2. \tag{I2}$$

Введем вектор $W_j^{(\alpha)}$, компонентами которого являются значения $w^{(\alpha)}(x)$ в узлах j -ой строки сетки $\omega^{(\alpha)}$, и запишем задачу (I2) в виде системы трехточечных векторных уравнений

$$-W_{j-1}^{(\alpha)} + C^{(\alpha)} W_j^{(\alpha)} - W_{j+1}^{(\alpha)} = 0, \; 1 \le j \le N_2^{(\alpha)} - 1, \; \alpha = 1, 2, \tag{I3}$$

краевые условия для которой задаются следующим образом:

$$W_0^{(1)} = 0, \quad W_{N_2^{(1)}} = F^{(1)}, \text{ если } \alpha = 1, \\ W_0^{(2)} = F^{(2)}, \quad W_{N_2^{(2)}} = 0, \text{ если } \alpha = 2. \tag{I4}$$

Здесь $C^{(\alpha)}$ – трехдиагональная матрица, соответствующая разностному оператору $2E + [h_2^{(\alpha)}]^2 \Lambda_1$, а векторы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ имеют одну ненулевую компоненту (E – единичный оператор).

В [8] получена формула для общего решения трехточечного векторного уравнения с постоянными коэффициентами. Пользуясь этой формулой, найдем искомые значения для $W^{(1)}_{N_2^{(1)}-1}$ и $W_1^{(2)}$:

$$W^{(1)}_{N_2^{(1)}-1} = \left[U_{N_2^{(1)}-1}\left(\frac{C^{(1)}}{2}\right)\right]^{-1} U_{N_2^{(1)}-2}\left(\frac{C^{(1)}}{2}\right) F^{(1)},$$

$$W^{(2)}_1 = \left[U_{N_2^{(2)}-1}\left(\frac{C^{(2)}}{2}\right)\right]^{-1} U_{N_2^{(2)}-2}\left(\frac{C^{(2)}}{2}\right) F^{(2)},$$

где $U_n(t)$ – полином Чебышева второго рода степени n.

Используя разложение отношения полиномов $U_{n-2}(t)/U_{n-1}(t)$ в сумму элементарных дробей, получим

$$W^{(1)}_{N_2^{(1)}-1} = \frac{2}{N_2^{(1)}} \sum_{k=1}^{N_2^{(1)}-1} \sin^2\frac{k\pi}{N_2^{(1)}} \left(C^{(1)} - 2\cos\frac{k\pi}{N_2^{(1)}} E\right)^{-1} F^{(1)},$$

$$W^{(2)}_1 = \frac{2}{N_2^{(2)}} \sum_{k=1}^{N_2^{(2)}-1} \sin^2\frac{k\pi}{N_2^{(2)}} \left(C^{(2)} - 2\cos\frac{k\pi}{N_2^{(2)}} E\right)^{-1} F^{(2)}.$$

Вычислим эти суммы. Пусть $V_k^{(\alpha)}$ – решение уравнения

$$\left(C^{(\alpha)} - 2\cos\frac{k\pi}{N_2^{(\alpha)}} E\right) V_k^{(\alpha)} = \frac{2}{N_2^{(\alpha)}} \sin^2\frac{k\pi}{N_2^{(\alpha)}} F^{(\alpha)}, \quad 1 \le k \le N_2^{(\alpha)}-1 \tag{15}$$

тогда

$$W^{(1)}_{N_2^{(1)}-1} = \sum_{k=1}^{N_2^{(1)}-1} V_k^{(1)}, \quad W^{(2)}_1 = \sum_{k=1}^{N_2^{(2)}-1} V_k^{(2)}. \tag{16}$$

Перейдем в (15) и (16) от векторной к скалярной записи. Получим, что на соответствующих строках сетки $\bar{\omega}^{(\alpha)}$ функции $w^{(\alpha)}(x)$ находятся по формулам:

$$w^{(1)}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_2^{(1)}-1} v_k^{(1)}(x_1), \quad \ell_1^{(1)} \le x_1 \le L_1^{(1)}, \quad x_2 = L_2^{(1)} - h_2^{(1)}, \tag{17}$$

$$w^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_2^{(2)}-1} v_k^{(2)}(x_1), \quad \ell_1^{(2)} \le x_1 \le L_1^{(2)}, \quad x_2 = \ell_2^{(2)} + h_2^{(2)},$$

где $v_k^{(\alpha)}(x_1)$ — решение трехточечной краевой задачи

$$\Lambda_1 v_k^{(\alpha)} - \lambda_k^{(\alpha)} v_k^{(\alpha)} = -\frac{2\delta(x-\eta)}{N_2^{(\alpha)}[h_2^{(\alpha)}]^2} \sin^2 \frac{k\pi}{N_2^{(\alpha)}}, \ l_1^{(\alpha)} < x_1 < L_1^{(\alpha)},$$
$$v_k^{(\alpha)}(l_1^{(\alpha)}) = v_k^{(\alpha)}(L_1^{(\alpha)}) = 0, \quad x, \eta \in \gamma^{(0)}, \tag{I8}$$
$$\lambda_k^{(\alpha)} = \frac{4}{[h_2^{(\alpha)}]^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N_2^{(\alpha)}},$$
$$1 \le k \le N_2^{(\alpha)} - 1 .$$

Коэффициент $a(x,\eta)$ вычислим по формуле (II), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$a(x,\eta) = \left(\frac{2}{h_2^{(1)} h_2^{(2)}} E - \Lambda_1\right) w^{(0)}(x) - \frac{2}{h_2^{(2)}[h_2^{(1)}+h_2^{(2)}]} w^{(2)}(x_1, x_2+h_2^{(2)}) +$$
$$+ \frac{2}{h_2^{(1)}[h_2^{(1)}+h_2^{(2)}]} w^{(1)}(x_1, x_2-h_2^{(1)}), \ x \in \gamma^{(0)}, \ \eta \in \gamma^{(0)}, \tag{I9}$$

где $w^{(0)}(x) = \delta(x-\eta)$. Формулы (I7) – (I9) полностью описывают подготовительный этап.

Если задача (I8) решается методом прогонки, то для вычисления всех коэффициентов $a(x,\xi)$ потребуется $O(n(N_1^{(1)}N_2^{(1)} + N_1^{(2)}N_2^{(2)}))$ арифметических операций, где n – число узлов, принадлежащих $\gamma^{(0)}$.

II. Вспомогательный этап. Цель этого этапа – нахождение решения задачи (3) в узлах, расположенных на ближайших снизу и сверху к $\gamma^{(0)}$ строках сетки $\bar{\omega}$, и вычисление функции $\psi(x) = \varphi(x) + \Lambda v(x)$, где $x \in \gamma^{(0)}$.

Обозначим через $v^{(\alpha)}(x)$ значение $v(x)$ при $x \in \bar{\omega}^{(\alpha)}$. Из (3) получим две задачи

$$\Lambda v^{(\alpha)} = -\varphi(x), \quad x \in \omega^{(\alpha)},$$
$$v^{(\alpha)}(x) = g(x),\ x \in \gamma^{(\alpha)},\ v^{(\alpha)}(x) = 0,\ x \in \gamma^{(0)},\ \alpha = 1, 2, \tag{20}$$

каждую из которых можно решить методом полной редукции.

Пусть $N_2^{(1)}$ и $N_2^{(2)}$ суть степени 2 и используется, например, первый алгоритм метода полной редукции (см. [8] , п.3 § 2 гл.III). Покажем, как организовать вычисления, на примере задачи (20) для $\alpha = 2$. На прямом ходе метода редукции вычисляются и запоминаются векторы $P_j^{(k)}$. На обратном ходе последовательно вычисляются, но не запоминаются векторы $V_j^{(2)}$ для $j = N_2^{(2)}/2,\ N_2^{(2)}/4, \ldots, 1$. Компоненты последнего вычисленного вектора дают искомые значения $v^{(2)}(x)$ для $l_1^{(2)} \le x_1 \le L_1^{(2)}$, $x_2 = l_2^{(2)} + h_2^{(2)}$.

Аналогичным образом находятся значения $v^{(1)}(x)$ для $l_1^{(1)} \le x_1 \le L_1^{(1)}$, $x_2 = L_2^{(1)} - h_2^{(1)}$. Используя полученные значения, легко вычислить функцию $\varphi(x)$ для $x \in \gamma^{(0)}$.

На реализацию этого этапа необходимо затратить $O(N_1^{(1)} N_2^{(1)} \log_2 N_2^{(1)} + N_1^{(2)} N_2^{(2)} \log_2 N_2^{(2)})$ арифметических операций.

III. Основной этап. На этом этапе находится решение исходной задачи. Для этого решается система (6) и вычисляется $z^{(0)}(x)$. Затем методом полной редукции решается задача (5), которая может быть записана в виде двух задач

$$\Lambda y^{(\alpha)} = -\varphi(x), \quad x \in \omega^{(\alpha)}, \tag{21}$$
$$y^{(\alpha)}(x) = g(x),\ x \in \gamma^{(\alpha)},\ y^{(\alpha)}(x) = z^{(0)}(x),\ x \in \gamma^{(0)},\ \alpha = 1, 2.$$

Решение этих задач сразу начинается с обратного хода метода полной редукции, причем используются хранимые векторы $P_j^{(k)}$.

Если система (6) решается методом Гаусса, то для этого потребуется $O(n^3)$ операций. Заметим, что если решается серия задач (2), то целесообразно еще на подготовительном этапе провести разложение матрицы $\mathcal{a}$ системы (6) на произведение $\mathcal{a} = LU$ нижней треугольной и верхней треугольной матриц. Тогда на основном этапе решение системы (6) будет выполнено за $O(n^2)$ операций. Решение задач (2I) методом полной редукции можно найти, затратив $O(N_1^{(1)} N_2^{(1)} \log_2 N_2^{(1)} + N_1^{(2)} N_2^{(2)} \log_2 N_2^{(2)})$ арифметических операций.

§ 3. Метод дополнения области до прямоугольника

Пусть в ограниченной области $\bar{G}$ с границей Γ требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона (I).

Построим в области $\bar{G}$ сетку $\bar{\omega}$. Для этого проведем семейство прямых $x_1 = x_1(i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и семейство равноотстоящих друг от друга прямых $x_2 = x_2(j)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Точки $x_{ij} = (x_1(i), x_2(j))$ образуют решетку на плоскости. Точки x_{ij}, принадлежащие G, образуют множество внутренних узлов ω. Точки x_{ij}, принадлежащие Γ, а также точки пересечения Γ с какой-либо прямой из построенных семейств прямых образуют множество граничных узлов γ. Сетка $\bar{\omega}$ есть объединение ω и γ, $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$.

Внутренние узлы сетки $\bar{\omega}$ будем делить на регулярные и нерегулярные. Узел $x_{ij} \in \omega$ называется регулярным, если все четыре соседние с ним точки решетки $x_{i\pm1\,j}$, $x_{i\,j\pm1}$ принадлежат ω, иначе – нерегулярным. Множество регулярных узлов обозначим через $\overset{\circ}{\omega}$, а нерегулярных – через $\overset{*}{\omega}$.

Разностная схема, аппроксимирующая (I), строится обычным образом [9]. Дифференциальный оператор Δ заменяется пятиточечным разностным оператором Λ в каждом узле ω, а в граничных узлах γ задается краевое условие первого рода. Отметим, что шаблон оператора Λ в регулярном узле соотоит из узлов решетки, тогда как в нерегулярном узле он содержит хотя бы один узел, принадлежащий γ, но не обязательно являющийся точкой введенной решетки.

Наша цель – записать разностные уравнения так, чтобы они связывали между собой неизвестные только в узлах решетки. Для этого необходимо преобразовать разностные уравнения в нерегулярных узлах, перенося в правую часть известные на γ значения искомого решения. При этом изменится структура разностного оператора Λ в каждом нерегулярном узле. Преобразованный в точках $\overset{*}{\omega}$ оператор Λ обозначим через Λ^*. В результате будет построена разностная охема

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \overset{\circ}{\omega}, \qquad (22)$$
$$\Lambda^* y = -\varphi^*(x), \quad x \in \overset{*}{\omega},$$

где $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$.

Переходим к построению метода решения задачи (22). Пусть $\bar{G}_0$ – содержащий $\bar{G}$ прямоугольник, стороны которого образованы прямыми из построенных выше оемейств прямых. Через $\bar{\omega}_0$ обозначим множество принадлежащих $\bar{G}_0$ точек x_{ij} введенной ранее решетки. Очевидно, что $\omega = \overset{\circ}{\omega} \cup \overset{*}{\omega}$ является частью сетки $\bar{\omega}_0$. Через γ_0 будем обозначать границу сетки $\bar{\omega}_0$. Таким образом, $\bar{\omega}_0$ – прямоугольная равномерная по направлению x_2 сетка в прямоугольнике $\bar{G}_0$, в части узлов которой заданы разностные уравнения (22).

Заметим, что задача $\Lambda u = -f(x)$, $x \in \omega_0$, $u(x) = 0$ для $x \in \gamma_0$, где Λ – определенный выше разностный оператор, может быть эффективно решена одним из прямых методов. Наша цель состоит в сведении (22) к указанной задаче на сетке $\overline{\omega}_0$ со специально выбранной правой частью $f(x)$.

Поставим задачу: выбрать функцию $\psi(x)$ так, чтобы решение задачи

$$\Lambda y = -\varphi(x), \ x \in \overset{\circ}{\omega}, \ \Lambda y = -\psi(x), \ x \in \overset{*}{\omega}, \qquad (23)$$
$$\Lambda y = 0, \ x \in \omega_0 - \omega, \ y(x) = 0, \ x \in \gamma_0$$

удовлетворяло равенству

$$\Lambda^* y = -\varphi^*(x), \ x \in \overset{*}{\omega}. \qquad (24)$$

Если функция $\psi(x)$ будет найдена, то решения задач (22) и (23) совпадают в узлах ω.

Функцию $\psi(x)$ будем искать следующим образом. Сначала сведем (23) к задаче, правая часть в которой отлична от нуля лишь на $\overset{*}{\omega}$. Для этого определим вспомогательную функцию $v(x)$ – решение задачи

$$\Lambda v = -\varphi(x), \ x \in \overset{\circ}{\omega}, \ \Lambda v = 0, \ x \in \omega_0 - \overset{\circ}{\omega}, \qquad (25)$$
$$v(x) = 0, \ x \in \gamma_0.$$

Заметим, что функция $z = y - v$ есть решение задачи, удовлетворяющей сформулированным требованиям:

$$\Lambda z = 0, \ x \in \overset{\circ}{\omega}, \ \Lambda z = -\psi(x), \ x \in \overset{*}{\omega}, \qquad (26)$$
$$\Lambda z = 0, \ x \in \omega_0 - \omega, \ z(x) = 0, \ x \in \gamma_0.$$

Кроме того, если $\psi(x)$ – искомая функция, то из (23)–(25) получим

$$\psi^*(x) = -\Lambda^* z = \varphi^*(x) + \Lambda^* v(x), \ x \in \overset{*}{\omega}. \qquad (27)$$

Заметим, что, в силу линейности оператора Λ, однородности краевого условия и структуры правой части задачи (26), решение $z(x)$ линейно выражается через $\psi(x)$. Так как

Λ^* также линейный оператор, то из (27) следует, что $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ должны быть связаны линейным соотношением. Поскольку функции $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ заданы на одном множестве $\overset{*}{\omega}$, то это соотношение имеет вид

$$\sum_{\xi \in \overset{*}{\omega}} a(x,\xi)\psi(\xi) = \psi^*(x) , \quad x \in \overset{*}{\omega} , \tag{28}$$

где $a(x,\xi)$ некоторые коэффициенты. Если будут указаны эти коэффициенты, то решение исходной задачи (22) будет состоять в нахождении решения вспомогательной задачи (25), вычислении функции $\psi^*(x)$ по формуле (27), решении системы алгебраических уравнений (28) для определения $\psi(x)$ и решении задачи (23) для нахождения $y(x)$ в узлах сетки ω.

Коэффициенты $a(x,\xi)$ находятся при помощи способа, аналогичного изложенному в п.I. Пусть $w(x)$ – решение задачи

$$\Lambda w = 0 , \quad x \in \overset{\circ}{\omega} , \quad \Lambda w = -\delta(x-\eta) , \quad x \in \overset{*}{\omega} ,$$
$$\Lambda w = 0 , \quad x \in \omega_0 - \omega , \quad w(x) = 0 , \quad x \in \gamma_0 ,$$

где η – узел, принадлежащий $\overset{*}{\omega}$. Тогда

$$a(x,\eta) = -\Lambda^* w(x) , \quad x \in \overset{*}{\omega} \tag{29}$$

Выбирая в качестве η последовательно все точки $\overset{*}{\omega}$, получим по формуле (29) все коэффициенты $a(x,\xi)$. На этом заканчивается построение метода решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области.

В заключение сделаем некоторые замечания. Как отмечалось во введении, изложенные выше методы целесообразно использовать в случае, когда решается серия задач с различными правыми частями. На предварительном этапе рассмотренных выше методов строится матрица a, которая в методе разделения областей связывает правую часть ψ и решение $z^{(0)}$ на границе прямоугольников, а в методе дополнения областей - заданную функцию φ^* и искомую функцию ψ - правые части в нерегулярных узлах ω^*. При решении серии задач построение матрицы a, очевидно, достаточно осуществить один раз. При этом объем вычислительной работы, выполняемой на предварительном этапе, составляет незначительную часть всей работы.

В случаях, когда число узлов, принадлежащих $\gamma^{(o)}$ (или $\overset{*}{\omega}$), слишком велико или решается единичная задача, следует использовать итерационные методы для решения вспомогательных задач (4). Так как правая часть задачи (4) отлична от нуля лишь на $\gamma^{(o)}$, то естественно ожидать, что итерационные методы, не учитывающие специфику решаемой задачи, будут оходиться не слишком быстро. Возникает необходимость разработки специальных итерационных методов нахождения проекции решения уравнения на некоторое подпространство для случая, когда правая часть принадлежит этому подпространству.

Ускорение сходимости может быть достигнуто за счет выбора оператора B в неявной итерационной схеме, а также начального приближения из того же подпространства, которому принадлежит правая часть. Такая конструкция осуществлена на основе общей теории итерационных методов [8]. Подобного рода подходы для метода разделения областей рассматриваются в [10].

Метод дополнения области до прямоугольника применен также в [11], где рассматривается специальный способ продолжения оператора разностной задачи.

I. R.W. Hockney, A fast direct solution of Poissons equation using Fourier analysis, J.Assoc.Comput.Mach., I965, v.8, 95-II3.

2. B.L. Buzbee, G.H. Golub, C.W. Nielson, On direct methods for solving Poisson's equations, SIAM J.Numer.Anal., I970, v.7, 627-656.

3. P.N. Swarztrauber, The methods of cyclic reduction, Fourier analysis and the FACR algorithm for the discrete solution of Poisson's equation on a rectangle, SIAM Review, I977, v.I9, 3, 490-50I.

4. P.N. Swarztrauber, A direct method for the discrete solution cf separable elliptic equations, SIAM J.Numer.Anal., I974, v.II, 6, II36-II50.

5. R.A. Sweet, A cyclic reduction algorithm for sclving block tridiagonal systems of arbitrary dimension, SIAM J.Numer. Anal., I977, v.I4, 4.

6. B.L. Buzbee, F.W. Dorr, J.A. George, G.H. Golub, The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions, SIAM J.Numer.Anal., I97I, v.8, 722-736.

7. P.Concus, G.H. Golub, Use of fast direct methods for the efficient numerical solution of nonseparable elliptic equation, I973, v.I0, 6, II03-II20.

8. А.А.Самарский, Е.С.Николаев, Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, I978 г.

9. А.А.Самарский, Теория разностных схем. М., Наука, I977 г.

I0. Ю.А.Кузнецов, Блочно-релаксационные методы в подпространстве, их оптимизация и применение. В сб. "Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосибирск, I978, I78-2I2.

II. Капорин И.Е. Решение разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области произвольной формы. МГУ, ф-т ВМиК, I977 г. Дипломная работа.