113

ПРЕПР.
М-15

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

В.Л. Макаров, А.А. Самарский.

ПРИМЕНЕНИЕ ТОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ К ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ

Препринт № 113 за 1979 г.

Москва.

УДК 518:517.944/947

Аннотация

Рассматривается метод прямых для уравнений в частных производных, основанный на аппроксимации части дифференциального оператора некоторыми конечноразностными соотношениями. С помощью оператора точных разностных схем установлена скорость сходимости приближенного решения при естественных требованиях на гладкость решения исходной задачи, обеспечивающих его существование.

The article deals with the straight line method for linear and quasilinear differential equations based on the approximation of the part of differential operator by finite difference relations. The rate of oonvergenoe of the approximate solution under natural requirements on the smothness of solution of differential problem which ensure its existens is established with the help of the exaot difference scheme operator.

СОДЕРЖАНИЕ

стр

Введение 5

§ I. Обозначения и вспомогательные результаты 6

§ 2. Сходимость метода прямых для уравнений параболического типа 12

§ 3. Сходимость метода прямых для уравнений гиперболического типа 18

§ 4. Сходимость метода прямых для уравнений эллиптического типа 23

Литература 29

Введение

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных методу прямых. С обзором этих работ по состоянию на 1965 год можно ознакомиться в статье [I]. Условно разобьем все схемы метода прямых на два класса. К первому классу отнесем схемы, основанные на аппроксимации части дифференциального оператора с помощью конечноразностных соотношений, ко второму – схемы, основанные на аппроксимации части дифференциального оператора, основанный на вариационно-проекционном подходе. Относительно второго класса можно сказать, что уже известен целый ряд результатов, в которых в норме L_2 , установлены оценки скорости сходимости при естественных требованиях на гладкость решения исходной дифференциальной задачи. Отметим, что эти результаты получены только для уравнений параболического типа /см. [2,3] и имеющуюся там литературу/. Что касается первого класса схем метода прямых, то такого характера результаты в литературе отсутствуют. Известный традиционный подход к получению оценок скорости сходимости приводит к тому, что от решения дифференциальной задачи требуется слишком высокая гладкость, который, как правило, на самом деле нет. Это обусловлено тем, что в соответствующие априорные оценки погрешность аппроксимации входит в форме, содержащей производные высокого порядка от решения исходной задачи. В данной работе предлагается новый подход к оценке сходимости схем метода прямых из первого класса, основанный на использовании точных разностных схем, введенных впервые в работах [4,5]. Такой подход позволяет, как и для схем метода прямых второго класса [2,3], получить оценки скорости сходимости такого же порядка и при тех же предположениях гладкости решения исходной дифференциальной задачи. Но, помимо этого здесь возникают ряд новых моментов, на которые следует обратить внимание. Прежде всего оценки скорости сходимости получаются в нормах более сильных, чем в L_2. Далее предложенный в работе подход позволяет (исходя из работ [6,7]) получить аналогичные результаты, для систем дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений высших порядков, а также распространить их на квазилинейные уравнения.

§ I. Обозначения и вспомогательные результаты.

Предварительно приведем без доказательства некоторые результаты из теории точных разностных схем.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\rho(x)}\frac{du}{dx}\right]-q(x)u=-f(x),\quad x\in(0,1),$$
$$u(0)=a,\quad u(1)=b,\quad \left(\rho(x)=1/k(x)\right). \tag{I}$$

Пусть выполняются условия (A):

а) $0<\nu\leqslant k(x)\leqslant\mu$, $\nu,\mu=const$ и $k(x)$ – суммируемая функция на отрезке $[0,1]$;

б) $\|q\|_{L_s(0,1)}\leqslant\mu<\infty$, $s\geqslant 1$, $q(x)\geqslant 0$;

в) $f(x)\in L_t(0,1)$, $t\geqslant 1$,

где L_s – пространство функций, суммируемых с s-ой степенью. В этом случае решение задачи (I) в обобщенном смысле существует, единственно и принадлежит классу $W_2^1(0,1)$. Мы приводим здесь доказательство этого результата, поскольку он имеет место при более слабых ограничениях, чем в [9] и получается, как нам кажется, более просто.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (А) краевая задача (I) эквивалентна следующему интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$u(x)+\int_0^1 K(x,\eta)\,u(\eta)\,d\eta = F(x), \qquad (2)$$

где

$$K(x,\eta)=\int_0^{|x,\eta|}\frac{d\xi}{k(\xi)}\int_{(x,\eta)}^1\frac{d\xi}{k(\xi)}\,q(\eta)\Big/\int_0^1\frac{d\xi}{k(\xi)},$$

$$|x,\eta|=\frac{x+\eta-|x-\eta|}{2}, \quad (x,\eta)=\frac{x+\eta+|x-\eta|}{2}, \qquad (3)$$

$$F(x)=\left[\int_0^1\frac{d\xi}{k(\xi)}\right]^{-1}\left[\int_0^x\frac{1}{k(\xi)}\int_0^1\int_\eta^\xi f(\xi)\,d\xi\,d\eta\,d\xi-\int_0^x\frac{d\xi}{k(\xi)}(b-a)\right],$$

Отсюда видно, что

$$\ell(x)=\|K(x,\eta)\|_{L_s(0,1)}\in C[0,1],$$
$$m(\eta)=\|K(x,\eta)\|_{C[0,1]}\in L_s(0,1), \qquad (4)$$

$$F(x) \in C[0,1] \qquad (4)$$

Из (4) и (4) в силу теоремы I стр.109 из [10] следует, что линейный интегральный оператор с ядром $K(x,\eta)$ действует из $L_{\frac{s}{s-1}}(0,1)$ в $C[0,1]$ и является вполне непрерывным. Поскольку, кроме того, оператор задачи (I) является самосопряженным и положительно определенным, то решение интегрального уравнения (2) существует, единственно и принадлежит классу $C[0,1]$. Если воспользоваться дополнительно следующим следствием из задачи (I)

$$k(x)u'(x)=\left[\int_0^1 \frac{d\xi}{k(\xi)}\right]^{-1}\left[\int_0^1\int_\eta^x f(\xi)d\xi d\eta+\int_0^1\frac{1}{k(\eta)}\int_\eta^x q(\xi)u(\xi)d\xi d\eta\right], \qquad (5)$$

то получаем, что $u(x)\in W_2^1(0,1)$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем равномерной сетки $\omega_h=\{x_i=ih:\ i=\overline{1,N-1},\ h=1/N\}$. Неравномерность шага приводит лишь к более громоздким выкладкам.

Имеет место

Лемма I. Пусть выполнены условия (A), тогда для задачи (I) существует однородная точная разностная схема и она имеет вид:

$$(u_{\bar{x}}/a)_x-du=-\varphi(x),\ x\in\omega_h,\ u_0=a,\ u_N=b, \qquad (6)$$

где

$$a(x)=\frac{1}{h}v_1(x),\ d(x)=T^x(q(\cdot)),\ \varphi(x)=T^x(f(\cdot)). \qquad (7)$$

Здесь

$$T^x(w(\cdot))=\frac{h^{-1}}{v_1(x)}\int\limits_{x-h}^{x}v_1(\xi)w(\xi)d\xi+\frac{h}{v_2(x)}\int\limits_{x}^{x+h}v_2(\xi)w(\xi)d\xi, \qquad (8)$$

$v_1(x)$, $v_2(x)$ – шаблонные функции.

Доказательство. Для того, чтобы доказать сформулированную выше лемму, нам нужно убедиться в том, что шаблонные функции в случае выполнений условий (А) обладают теми же свойствами, что и в работах [4,5,8] при условиях

$$0<M_1\leqslant\frac{1}{k(x)}\leqslant M_2,\quad 0\leqslant q(x)\leqslant M_2,$$

$$k(x),\ q(x),\ f(x)\in Q^0[0,1].$$

Покажем, что шаблонные функции $v_j(x)$, $j=1,2$, являющиеся решениями следующих задач Коши:

$$L^{(p,q)}v_j^i(x)\equiv\frac{d}{dx}\left[k\frac{dv_j^i(x)}{dx}\right]-q(x)v_j^i(x)=0,$$

$$x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\ j=1,2,\ v_1'(x_{i-1})=0,\ k(x_{i-1})\frac{dv_1^i(x_{i-1})}{dx}=1, \qquad (9)$$

$$v_2^i(x_{i+1})=0,\ k(x_{i+1})\frac{dv_2^i(x_{i+1})}{dx}=-1,$$

существуют, единотвенны и принадлежат классу $W_2^1(x_{i-1}, x_{i+1})$. Этот результат получается по аналогии с тем, как было доказано выше существование и единственность обобщенного решения задачи (I) из класса $W_2^1(0,1)$. Следует лишь вместо уравнений (2), (5) воспользоваться, например, в случае функции $v_1^i(x)$ уравнениями:

$$v_1^i(x) = F(x) + \int_{x_{i-1}}^{x} K(x,\xi)\, v_1^i(\xi)\, d\xi \,, \qquad (10)$$

$$k(x)\frac{d v_1^i(x)}{dx} = 1 + \int_{x_{i-1}}^{x} q(\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi \,,$$

где

$$K(x;\xi) = \int_{\xi}^{x} \frac{d\eta}{k(\eta)}\, q(\xi)\,, \quad F(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} \frac{d\xi}{k(\xi)}\,. \qquad (10')$$

Повторяя рассуждения из работы [5], законность которых мы уже обосновали, убеждаемся в справедливости лемм I,2,3 из [5]. На основании теоремы вложения (см. [II], теорема I, стр.64) любая функция из $W_2^1(0,1)$ принадлежит классу $C[0,1]$ и, следовательно, решение $u(x)$ задачи (I.I) определено в узлах сетки $\overline{\omega}_h$. Этим завершается доказательство.

<u>Замечание I.</u> Из (I0),(I0′) и соответствующих уравнений для $v_2^i(x)$ вытекают при достаточно малом h следующие неравенства

$$\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\xi}{k(\xi)}<\frac{1}{h}v_1^i(x)\leqslant\frac{\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\xi}{k(\xi)}}{1-\frac{h}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}q(\xi)d\xi\,\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\xi}{k(\xi)}}\leqslant \tag{II}$$

$$\leqslant\nu^{-1}\Big[1-\frac{1}{\nu}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}q(\xi)d\xi\Big]^{-1}\leqslant\frac{1}{\nu_1};\quad\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{h}v_2^i(x)\leqslant\frac{1}{\nu_1},$$

$$q\in L_s(0,1),\ s>1,\quad\Big\|\frac{1}{h}\,\frac{dv_j^i(x)}{dx}\Big\|_{L_2(x_{i-1},x_{i+1})}\leqslant C,\ j=1,2,$$

где постоянные ν_1, C не зависят от h , i .

Имеет место

Лемма 2. а) Пусть выполнены условия (A) с $S>1$, тогда $\forall u(x)\in W_2^1(0,1)$ будет иметь место оценка

$$\|T^x(u)-u\|_0\leqslant Ch\Big\|\frac{du}{dx}\Big\|_{L_2(0,1)}, \tag{I2}$$

б) Пусть выполнены условия (A) с $S>1$ и имеет место ограничение $k(x)\in W_2^1(0,1)$, тогда $\forall u(x)\in W_2^2(0,1)$ будет справедлива априорная оценка

$$\|T^x(u)-u\|_0\leqslant Ch^2\Big\|\frac{d^2u}{dx^2}\Big\|_{L_2(0,1)}, \tag{I3}$$

в) Пусть выполнены условия (A) с $S>1$ и имеет место ограничение $k(x)\in C_{0,\frac{1}{S}}[0,1]$, тогда $\forall u(x)\in C_{1,\frac{1}{S}}[0,1]$ будет справедлива априорная оценка

$$\| T^{x}(u) - u \|_0 \leqslant C h^{1+1/s} , \tag{14}$$

где $\quad \| w \|_0^2 = \sum\limits_{\omega h} h\, w^2(x_i)$.

<u>Доказательство.</u> Легко убедиться в справедливости соотношений

$$T^{x}(u) - u(x) = \frac{h^{-1}}{v_1(x)} \int\limits_{x-h}^{x} \left(x - \frac{h}{2} - \xi\right)\left[v_1(\xi) u(\xi)\right]' d\xi + \frac{h^{-1}}{v_2(x)} \int\limits_{x}^{x+h} \left(x + \frac{h}{2} - \xi\right)\left[v_2(\xi) u(\xi)\right]' d\xi =$$

$$= \frac{h^{-1}}{v_1(x)} \int\limits_{x-h}^{x} \left(x - \frac{h}{2} - \xi\right)\left\{\left[v_1(\xi) u(\xi)\right]' - \left[v_1(x) u(x)\right]'\right\} d\xi + \frac{h^{-1}}{v_2(x)} \int\limits_{x}^{x+h} \left(x + \frac{h}{2} - \xi\right)\left\{\left[v_2(\xi) u(\xi)\right]' -\right.$$

$$\left. - \left[v_2(x) u(x)\right]'\right\} d\xi = \frac{h^{-1}}{v_1(x)} \int\limits_{x-h}^{x} \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{h}{2} - \xi\right)^2 - \frac{h^2}{8}\right]\left[v_1(\xi) u(\xi)\right]'' d\xi +$$

$$+ \frac{h^{-1}}{v_2(x)} \int\limits_{x}^{x+h} \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{h}{2} - \xi\right)^2 - \frac{h^2}{8}\right]\left[v_2(\xi) u(\xi)\right]'' d\xi .$$

Отсюда с учетом замечания I оразу следуют утверждения леммы.

§ 2. Сходимость метода прямых для уравнений параболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве H

$$\frac{du}{dt} + A(t) u = f(t),\ t > 0,\ u(0) = u_0 , \tag{I}$$

где линейный оператор $A:\ H \to H$ имеет область определения D, плотную в H, и

$$A = A^* \geqslant \nu E > 0 . \tag{2}$$

Пусть существует такой линейный оператор $T : H \to H$, который обладает следующими двумя свойствами:

I) если u и v – решения уравнений

$$Au = g ,$$

$$\tilde{A} v = [P(PTA)^{-1}]^{-1} v = PTg = \tilde{g} , \quad v \in X , \tag{2'}$$

где P – оператор из H в гильбертово пространство X, то

$$Pu = v ; \tag{2''}$$

2) $0 < \nu_1 \leqslant \tilde{A} = \tilde{A}^*$.

Вместо задачи (I),(I′) рассмотрим ее приближение – задачу Коши вида:

$$\frac{dv}{dt} + \tilde{A}(t) v = \tilde{f}(t) , \quad t > 0 ,$$
$$v(0) = PTu_0 . \tag{3}$$

Тогда погрешность $z = v - Pu$ будет определяться как решение задачи Коши:

$$\frac{dz}{dt} + \tilde{A}(t) z = \frac{d\psi}{dt}(t) , \; t > 0 , \; z(0) = P(Tu_0 - u_0) , \tag{4}$$

где

$$\psi(t) = \int_0^t P\left[T(\xi)\frac{du}{d\xi} - \frac{du}{d\xi}\right] d\xi . \tag{5}$$

Имеет место

Теорема I. Пусть линейный оператор $A(t)$ в задаче (I) имеет область определения D, не зависящую от t и плотную в H, является дифференцируемым и удовлетворяет условиям

$$0 < \nu \leqslant A(t) = A^*(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

причем ν не зависит от t. Тогда, если существует такой линейный оператор $T(t): \ H \to H$, который обладает свойствами (2'), (2'') и постоянная $\mu \ (|\mu| < \infty)$, что

$$0 \leqslant \tilde{A}'(t) + \mu \tilde{A}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

то для $z = v - Pu$ будет иметь место оценка:

$$\int_0^t (t-\xi)\|z(\xi)\|^2 d\xi + \int_0^t \left\| \int_0^\xi \tilde{A}(\eta) z(\eta) d\eta \right\|^2_{\tilde{A}^{-1}(\xi)} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \exp[t \max(\mu, 0)] \int_0^t (t-\xi)\|\psi(\xi) + z(0)\|^2 d\xi . \tag{8}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в пространстве X.

Если же оператор A – постоянный, то справедлива оценка вида:

$$\left\{ \int_0^t \| v - Pu \|^2 d\xi + 0{,}5 \left\| \int_0^t [v - Pu]\, d\xi \right\|^2_{\tilde{A}} \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^t \| P(Tu - u) \|^2 d\xi \right\}^{1/2}. \tag{9}$$

<u>Доказательство:</u> Проинтегрируем обе части (4) от 0 до t, а затем умножим скалярно на $z(t)$, тогда после некоторых преобразований получаем

$$\| z(t) \|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\tilde{A}^{-1}(t) \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi ,\ \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left((\tilde{A}^{-1}(t))' \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi ,\ \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi \right) + (\psi(t) + z(0), z(t)). \tag{10}$$

Интегрируя обе части (10) от 0 до t и используя неравенство (7), будем иметь

$$\int_0^t \| z(\xi) \|^2 d\xi + \frac{1}{2} \left(\tilde{A}^{-1}(t) \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi ,\ \int_0^t \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \max(\mu, 0) \int_0^t \left(\tilde{A}^{-1}(\xi) \int_0^\xi \tilde{A}(\eta) z(\eta) d\eta ,\ \int_0^\xi \tilde{A}(\eta) z(\eta) d\eta \right) d\xi + \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \| z(\xi) \|^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \| \psi(\xi) + z(0) \|^2 d\xi .$$

После несложных преобразований, включая и интегрирование, неравенство (11) преобразуется к виду:

$$\int_0^t \Big[\int_0^\xi \|z(\eta)\|^2 d\eta + \Big\|\int_0^\xi \tilde{A}(\eta) z(\eta) d\eta\Big\|^2_{\tilde{A}^{-1}(\xi)}\Big] d\xi \leq \max(\mu,0) \int_0^t\int_0^\xi \Big[\int_0^\eta \|z(\xi)\|^2 d\xi$$

$$+ \Big\|\int_0^\eta \tilde{A}(\xi) z(\xi) d\xi\Big\|^2_{\tilde{A}^{-1}(\eta)}\Big] d\eta\, d\xi + \int_0^t (t-\xi)\|\psi(\xi)+z(0)\|^2 d\xi.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Грануолла, сразу приходим к (8). Если A – постоянный оператор, то (10) принимает вид

$$\|z(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\int_0^t z(\xi) d\xi\Big\|^2_{\tilde{A}} = \big(P(Tu-u), z\big). \tag{12}$$

Интегрируя обе части (12) от 0 до t и применяя к правой части неравенство Коши-Буняковского, получаем (9). Этим теорема полностью доказана.

В качестве применения теоремы I рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big] + q(x)u = f(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\quad u(x,0) = u_0(x). \end{gathered} \tag{13}$$

Пусть коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условиям (А), тогда в качестве оператора T можно взять оператор T^x из § I. Оператор P будет опереатором взятия следа функции на сетку ω_h. Тогда оператор $\tilde{A}$ определяется формулой

$$\tilde{A}v = -\Big(\frac{1}{a} v_{\bar{x}}\Big)_x + dv$$

и очевидно, что будут выполняться условия $(2')$,$(2'')$. Следовательно для схемы метода прямых

$$\frac{dv}{dt}-\left(\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv=PT^x(f(\cdot,t)),\ x\in\omega_h,\ t>0$$
$$v(0,t)=v(1,t)=0,\quad v(x,0)=PT^x(u_0(\cdot)),\tag{14}$$

соответствующей задаче (13), справедливы все условия теоремы I и из (9) следует априорная оценка

$$\left\{\int_0^t\|v-Pu\|_0^2dt+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\int_0^t(v-Pu)d\xi\right)_{\bar{x}}^2\right]\Big\}^{1/2}\leq$$
$$\leq\left\{\int_0^t\|P(T^x(u(\cdot,\xi))-u(x,\xi)\|_0^2d\xi\right\}^{1/2}.\tag{15}$$

Оценка (15) вместе с леммой 2 убеждают нас в справедливости утверждения

<u>Теорема 2.</u> а) Пусть выполнены условия (А) с $S>1$ из § I, $\|f\|_{q_1,r_1,Q_T}\leq\mu_2$, где $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{2q_1}=\frac{S}{4}$, $q_1\in[1,2]$, $r_1\in[1,4/3]$, $u_0(x)\in L_2(0,1)$, тогда для погрешности схемы метода прямых (14) будет верна оценка:

$$\left\{\int_0^t\|v-Pu\|_0^2dt+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\left(\int_0^t(v-Pu)dt\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leq Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{2,Q_t}\tag{16}$$

б) Пусть выполнены условия (А) с $S>1$, $\|f\|_{2,Q_T}\leq\mu_2$, $k(x)\in W_2^1(0,1)$, $u_0(x)\in\overset{\circ}{W}{}_1^1(0,1)$, тогда для погрешности схемы метода прямых (14) будет верна оценка

$$\left\{\int_0^t\|v-Pu\|_0^2dt+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a},\left(\int_0^t(v-Pu)dt\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leq$$
$$\leq Ch^2\left\|\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right\|_{2,Q_t},\tag{17}$$

где

$$\|u\|_{2,Q_t} = \left(\int_0^t \left(\int_0^1 u^2(x,t)\,dx\right)^{2/2} dt\right)^{1/2}.$$

При доказательстве данной теоремы необходимо воспользоваться результатами о гладкости обобщенных решений уравнений параболического типа (см. [13]).

§.3. Сходимость метода прямых для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u = f(t), \quad t>0, \\ &u(0)=u_0, \quad u'(0)=u_0', \end{aligned} \tag{I}$$

где $A:\ H \to H$ линейный оператор с независящей от t областью определения D, плотной в H, причем

$$A(t) = A^*(t) \geq \nu E > 0.$$

Пусть существует такой линейный оператор $T:\ H \to H$, который обладает свойствами (2$'$),(2$''$) § 2. Введем в рассмотрение вместо задачи (I) задачу вида

$$\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dt^2} + \tilde{A}(t)v = \tilde{f}(t), \quad t>0, \\ &v(0) = PTu_0, \quad v'(0) = (PTu)'_{t=0}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $v \in X$ и P – оператор из H в X. Для погрешности $z = v - Pu$ из (2),(I) получаем следующую задачу Коши

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \tilde{A}(z) = \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}, \quad t > 0,$$

$$z(0) = PTu_0 - Pu_0, \quad z'(0) = (PTu - Pu)', \quad t = 0, \tag{3}$$

где

$$\psi(t) = \int_0^t P(Tu''(\xi) - u''(\xi))(t-\xi)\, d\xi . \tag{4}$$

Теорема I. Пусть выполнены условия теоремы 2, §2 и условие перестановочности $\tilde{A}(t)$ со своей производной $\tilde{A}'(t)$

$$\tilde{A}(t)\tilde{A}'(t) = \tilde{A}'(t)\tilde{A}(t), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Тогда для разности $z = v - Pu$ будет справедлива оценка

$$\int_0^t \Big[\| \tilde{A}^{-1}(\xi) \int_0^\xi \tilde{A}(\eta) z(\eta)\, d\eta \|^2 + \| \int_0^\xi (\xi-\eta)\tilde{A}(\eta) z(\eta)\, d\eta \|^2_{\tilde{A}^{-1}(\xi)} \Big] d\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon \exp\Big[\max(\mu, 0) + \frac{1}{4\varepsilon}\Big] t \int_0^t (t-\xi) \|\tilde{\psi}(\xi)\|^2 d\xi . \tag{6}$$

Если A – постоянный оператор, то вместо (6) имеет место неравенство:

$$\left\{\max_{0\le t\le T}\left[\Big\|\int_0^t z(\xi)d\xi\Big\|^2+\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\int_0^t(t-\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2\right]\right\}^{1/2}\leqslant \tag{6'}$$
$$\leqslant 2\sqrt{T}\left[\int_0^T\|P(Tu-u)\|^2d\xi\right]^{1/2}.$$

<u>Доказательство</u>: Проинтегрируем обе части уравнения (3) дважды по t, а затем скалярно умножим на выражение $\widetilde{A}^{-1}(t)\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)\,d\xi$, тогда получим

$$\frac{d}{dt}\Big\|\widetilde{A}^{-1}(t)\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2+\frac{d}{dt}\Big\|\int_0^t(t-\xi)\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2_{\widetilde{A}^{-1}(t)}=$$
$$=2\Big((\widetilde{A}^{-1}(t))'\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi,\ \widetilde{A}^{-1}(t)\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big)+ \tag{7}$$
$$+\Big((\widetilde{A}^{-1}(t))'\int_0^t(t-\xi)\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi,\ \int_0^t(t-\xi)\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big)+$$
$$+2\Big(\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{A}^{-1}(t)\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big).$$

Если проинтегрировать обе части последнего равенства от 0 до t, воспользоваться условиями теоремы и применить ε – неравенство, то в результате получим

$$\Big\|\widetilde{A}^{-1}(t)\int_0^t\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2+\Big\|\int_0^t(t-\xi)\widetilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2_{\widetilde{A}^{-1}(t)}\leqslant$$
$$\leqslant\Big[2\max(\mu,0)+\frac{1}{2\varepsilon}\Big]\int_0^t\Big[\Big\|\widetilde{A}^{-1}(\xi)\int_0^\xi\widetilde{A}(\eta)z(\eta)d\eta\Big\|^2+ \tag{8}$$
$$+\Big\|\int_0^\xi(\xi-\eta)\widetilde{A}(\eta)z(\eta)d\eta\Big\|^2_{\widetilde{A}^{-1}(\xi)}\Big]d\xi+2\varepsilon\int_0^t\|\widetilde{\varphi}(\xi)\|^2d\xi.$$

Наконец, интегрируя (8) по t и применяя лемму Гронуолла, приходим к априорной оценке (6).

Если A – постоянный оператор, то (7) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\Big\|\int_0^t z(\xi)d\xi\Big\|^2+\frac{d}{dt}\Big\|\int_0^t (t-\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2_{\tilde A}=2\Big(\tilde\varphi(t),\int_0^t z(\xi)d\xi\Big),$$

откуда следует

$$\Big\|\int_0^t z(\xi)d\xi\Big\|^2+\Big\|\int_0^t (t-\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2_{\tilde A}\leqslant 2\Big[\int_0^t\|\tilde\varphi(\xi)\|^2d\xi\Big]^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big[\int_0^t\Big\|\int_0^\xi z(\eta)d\eta\Big\|^2d\xi\Big]^{1/2}\leqslant 2\sqrt{T}\Big[\int_0^T\|\tilde\varphi(\xi)\|^2d\xi\Big]^{1/2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\Big[\Big\|\int_0^t z(\xi)d\xi\Big\|^2+$$

$$+\Big\|\int_0^t (t-\xi)z(\xi)d\xi\Big\|^2_{\tilde A}\Big]^{1/2},$$

что и приводит к (6). Лемма доказана полностью.

<u>Замечание.</u> Из (8) следует оценка

$$\max_{0\leqslant\xi\leqslant t}\Big[\Big\|\tilde A^{-1}(\xi)\int_0^\xi\tilde A(\eta)z(\eta)d\eta\Big\|^2+\Big\|\int_0^\xi(\xi-\eta)\tilde A(\eta)z(\eta)d\eta\Big\|^2_{\tilde A^{-1}(\xi)}\Big]=$$

$$=g(t)\leqslant\Big[2\max(\mu,0)+\frac{1}{2\varepsilon}\Big]\int_0^T g(\xi)d\xi+2\varepsilon\int_0^T\|\tilde\varphi(\xi)\|^2d\xi,$$

которая с помощью леммы Гронуолла дает следующий результат

$$\max_{0\le t\le T}\left[\|\tilde{A}^{-1}(t)\int_0^t \tilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\|^2+\|\int_0^t (t-\xi)\tilde{A}(\xi)z(\xi)d\xi\|^2_{\tilde{A}^{-1}(t)}\right]\le$$

$$\le \exp\left\{T\left[2\max(\mu,0)+\frac{1}{2\varepsilon}\right]\right\}2\varepsilon\int_0^T\|\psi(\xi)\|^2 d\xi \,. \qquad (9)$$

Дадим применение теоремы I к установлению скорости сходимости метода прямых для первой краевой задачи в случае уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x)u=f(x,t)\,,\ x\in(0,1),\ t>0$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ \ u(x,0)=w_1(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=w_2(x)\,. \qquad (10)$$

С помощью операторов T^x и P из § 2 строим схему метода прямых вида:

$$\frac{d^2 v}{dt^2}-\left(\frac{1}{a}v_{\bar{x}}\right)_x+dv=PT^x(f(\cdot,t)),\ x\in\omega_h\ ,\ t>0$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0\,,$$

$$v(x,0)=PT^x(w_1(\cdot))\,,\ \frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}=PT^x(w_2(\cdot))\,. \qquad (11)$$

Согласно неравенству (6′) из теоремы I для погрешности $z=v-Pu$ будет иметь место априорная оценка

$$\left\{\max_{0\le t\le T}\left[\|\int_0^t z(\xi)d\xi\|_0^2+\left(\frac{1}{a}\,,\left(\int_0^t (t-\xi)z(\xi)\,d\xi\right)^2_{\bar{x}}\right]\right\}^{1/2}\le$$

$$\le 2\sqrt{T}\left[\int_0^T\|P(T^x(u(\cdot,\xi))-u(x,\xi))\|_0^2 d\xi\right]^{1/2}. \qquad (12)$$

Неравенство (I2) вместе с леммой 2,§ I приводят к справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. а) Пусть выполнены условия (А) из § I, $\max\limits_{x\in[0,1]}|q(x)|\leq\mu_1$, $f(x,t)\in L_{2,1}(Q_T)$, $w_1(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $w_2(x)\in L_2(0,1)$, тогда для погрешности схемы метода прямых (II) будет справедлива оценка:

$$\left\{\max_{0\leq t\leq T}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)d\xi\right\|_0^2+\left(\frac{1}{a},\left(\int_0^t(t-\xi)z(\xi)d\xi\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leq \qquad (I3)$$
$$\leq Ch\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{2,Q_T}$$

б) пусть кроме условий из п.а) выполняются дополнительные условия $|k'(x)|<\mu_2$, $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\in L_{2,1}(Q_T)$, $w_1(x)\in W_2^2(0,1)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $w_2(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, тогда для погрешности схемы метода прямых (II) будет справедлива оценка

$$\left\{\max_{0\leq t\leq T}\left[\left\|\int_0^t z(\xi)d\xi\right\|_0^2+\left(\frac{1}{a},\left(\int_0^t(t-\xi)z(\xi)d\xi\right)_{\bar{x}}^2\right]\right\}^{1/2}\leq \qquad (I4)$$
$$\leq Ch^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{2,Q_T}.$$

При доказательстве данной теоремы мы воспользовались результатами о гладкости обобщенных решений уравнений гиперболического типа из [I3] , гл.4, §§3,4.

§ 4. Сходимость метода прямых для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим первую краевую задачу для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H

$$\frac{d^2u}{dx^2} - A(x)u = f(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1. \tag{I}$$

Здесь $A(x): H \to H$ – линейный оператор с независящей от x областью определения D, плотной в H, и удовлетворяющий условию $A(x) = A^*(x) \geq \nu E > 0$.

Предположим, как и раньше, что существует такой линейный оператор $T(x): H \to H$, который обладает свойствами (2′), (2″), § 2. Вместо краевой задачи (I) рассмотрим ее "приближение" в гильбертовом пространстве X (более "простом" по сравнению с H):

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \tilde{A}(x)v = \tilde{f}(x), \quad x \in (0,1),$$
$$v(0) = PTu_0, \quad v(1) = PTu_1, \tag{2}$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и ранее. Тогда для погрешности $z = v - Pu$ будем иметь задачу:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \tilde{A}(x)z = \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}, \quad x \in (0,1),$$
$$z(0) = P(Tu_0 - u_0), \quad z(1) = P(Tu_1 - u_1), \tag{3}$$

где

$$\psi(x) = -\int_0^x \int_x^1 \int_\xi^\eta P\left[T(\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} - \frac{d^2u}{d\zeta^2}\right] d\zeta\, d\eta\, d\xi. \tag{4}$$

Формулу (4) можно переписать также в виде

$$\psi(x)=\int_0^1 G(x,\xi)P\left[T(\xi)u''(\xi)-u''(\xi)\right]d\xi\,, \tag{4'}$$

где

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1-x)\xi\,, & x\geqslant\xi\,,\\ (1-\xi)x\,, & x<\xi\end{cases} \tag{5}$$

Заменим в уравнении (3) переменную x на ξ, затем умножим обе части на функцию $G(x,\xi)$ и наконец проинтегрируем по ξ от 0 до 1, тогда получим

$$z(x)-\widetilde{A}(x)\int_0^1 G(x,\xi)\,t(\xi)\,d\xi=-\int_0^1 G(x,\xi)\left[\widetilde{A}(x)-\widetilde{A}(\xi)\right]z(\xi)\,d\xi+\widetilde{\psi}(x);$$

$$\widetilde{\psi}(x)=\psi(x)+x\,z(1)+(1-x)z(0)\,.$$

Из последнего соотношения следует оценка

$$\|z(x)\|_*^2=\left\|\left[\frac{d^2}{dx^2}-\widetilde{A}(x)\right]\int_0^1 G(x,\xi)\,\dot{z}(\xi)\,d\xi\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\|\widetilde{\Psi}(x)\|^2+\mu\int_0^1\|z(\xi)\|^2\,d\xi\,, \tag{6}$$

где предполагается, что

$$\mu=2\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 G^2(x,\xi)\,\|\widetilde{A}(x)-\widetilde{A}(\xi)\|^2\,d\xi<1\,. \tag{7}$$

Неравенство (6) приводит к оценке

$$\|z(x)\|_*^2\leqslant 2\|\widetilde{\Psi}(x)\|^2+\mu\int_0^1\|\widetilde{z}(\xi)\|^2\,d\xi\,. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$g(x) = \max_{0 \le \xi \le x} \|\tilde{z}(\xi)\|^2$$

тогда из (8) следует

$$g(1) \le 2 \max_{0 \le x \le 1} \|\tilde{\Psi}(x)\|^2 + \mu \int_0^1 g(\xi) d\xi ,$$

что с учетом (7) приводит к априорной оценке

$$\max_{0 \le x \le 1} \left\| \left(\frac{d^2}{dx^2} - \tilde{A}(x)\right) \int_0^1 G(x,\xi) z(\xi) d\xi \right\|^2 \le \tag{9}$$

$$\le 2 \max_{0 \le x \le 1} \|\tilde{\Psi}(x)\|^2 (1-\mu)^{-1} .$$

В качестве следствия из (9) получаем неравенство вида

$$\int_0^1 \|z(\xi)\|^2 d\xi \le \int_0^1 \left\| \left(\frac{d^2}{dx^2} - \tilde{A}(x)\right) \int_0^1 G(x,\xi) z(\xi) d\xi \right\|^2 dx \le \tag{9 }$$

$$\le 2 \max_{0 \le x \le 1} \|\tilde{\Psi}(x)\|^2 (1-\mu)^{-1}$$

Таким образом, доказана

<u>Теорема I.</u> Пусть линейный оператор $A(x)$ в задаче (I) имеет область определения D, не зависящую от x и плотную в H, и удовлетворяет условию

$$0 < \nu E \le A(x) = A^*(x) , \quad x \in [0, 1] ,$$

причем ν не зависит от x. Тогда, если существует такой линейный оператор $T(x) : H \to H$, который удовлетворяет условиям $(2')$, $(2'')$, § 2 и выполнено (7), то для $z(x)$ будут справедливы оценки (9), (9). Если же A - постоянный оператор, то для $z(x)$ будут иметь место неравенства

$$\int_0^1 \|z(\xi)\|^2 d\xi \leqslant \int_0^1 \left\| \left(\frac{d^2}{dx^2} - \tilde{A}(x)\right) \int_0^1 G(x,\xi) z(\xi)\, d\xi \right\|^2 \leqslant \leqslant 2 \int_0^1 \|\tilde{\psi}(x)\|^2 dx \,. \tag{10}$$

Доказательство первой части теоремы приведено выше, а доказательство второй части следует из (6), полагая $\mu = 0$.

Рассмотрим применение теоремы I к оценке скорости сходимости метода прямых для задачи Дирихле в случае уравнения эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - q(y)u = f(x,y), \quad 0<x,y<1 \tag{11}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y)\in \Gamma,$$

где Γ - граница квадрата $G = \{(x,y) : x\in(0,1),\ y\in(0,1)\}$.

Используя операторы T^y и P из § 2 строим схему метода прямых вида:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{1}{a} v_{\bar{y}}\right)_y - dv = PT^y(f(x,\cdot)), \quad x\in(0,1),\ y\in\omega_h, \\ v(x,0) = \varphi(x,0), \quad v(x,1) = \varphi(x,1) \\ v(0,y) = PT^y(\varphi(0,\cdot)), \quad v(1,y) = PT^y(\varphi(1,\cdot)). \end{gathered} \tag{12}$$

Согласно неравенству (10), будет иметь место оценка

$$\left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2 d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a}, \left(\int_0^1 G(x,\xi) z(\xi) d\xi\right)_{\bar{y}}^2 \right] dx \right\}^{1/2} \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant \sqrt{2} \left\{ \int_0^1 \| P[T^y(u(\xi,\cdot)) - u(\xi,y)] \|_0^2 d\xi \right\}^{1/2}.$$

Неравенство (I3) вместе с леммой 2, § I приводит к справедливости следующего утверждения:

<u>Теорема 2.</u> a) Пусть выполнены условия (A) из § I $\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} |q(y)| \leqslant \mu$, $f(x,y) \in L_2(G)$, $\varphi(x,y) \in W_2^1(G)$ тогда для погрешности схемы метода прямых (I2) будет справедлива оценка:

$$\left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2 d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a}, \left(\int_0^1 G(x,\xi) z(\xi) d\xi\right)_{\bar{y}}^2 \right] dx \right\}^{1/2} \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant Ch \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{2,G}.$$

б) Пусть кроме условий из п.а) выполняются дополнительные условия $|k'(y)| < \mu_2$, $\varphi(x,y) \in W_2^2(G)$ тогда для погрешности схемы метода прямых (I2) будет иметь место оценка

$$\left\{ \int_0^1 \|z(\xi)\|_0^2 d\xi + \int_0^1 \left(\frac{1}{a}, \left(\int_0^1 G(x,\xi) z(\xi) d\xi\right)_{\bar{y}}^2 \right] dx \right\}^{1/2} \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant Ch^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{2,G}.$$

При доказательстве теоремы 2 необходимо воспользоваться результатами о гладкости обобщенных решений уравнений эллиптического типа (см. [9], гл.3, §§ 5,I0).

Литература

I. О.А.Лисковец. Метод прямых (обзор). Дифференциальные уравнения, I, № I2, I965, I662-I678.

2. Ю.Р.Акопян, Л.А.Оганесян. Скорость сходимости вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений. В сб. "Вариационно-разностные методы решения задач математической физики". Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, 27-36.

3. А.А.Злотник. Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений. Ж.вычисл. матем. и матем. физики, 1978, I8, № 6, I454-I465.

4. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности. Докл. АН СССР, I960, I3I, № 3, 5I4-5I7.

5. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., I96I, I, № 3, 425-440.

6. В.Л.Макаров, И.П.Макаров, В.Г.Приказчиков. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. АН УССР, 1978, серия "А", № 4, 302-305.

7. Ш.А.Бурханов, Н.А.Гуминская, В.Л.Макаров, В.Г.Приказчиков. О точных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Докл. АН УССР, 1978, серия "А", № 9, 778-78I.

8. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", I97I.

9. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные

уравнения эллиптического типа. М., "Наука", 1964.

10. П.П.Забрейко и др. Интегральные уравнения. СМБ, М., "Наука"; 1968.

11. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск СО АН СССР, 1962.

12. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. "Наука", М., 1967.