161

ПРЕПР.
0-11

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский.

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Препринт № 161 за 1979 г.

Москва.

УДК 517.946:536.24:533.9

АННОТАЦИЯ

Исследуются неограниченные решения (т.е. не существующие в "целом") задачи Коши для полулинейных параболических уравнений. Для общего уравнения с выпуклой нелинейностью методом операторного оравнения определены условия неограниченности его решений. С помощью построения верхних и нижних решений уравнений с некоторыми частными видами нелинейностей устанавливаются ограничения на краевые данные, обеспечивающие глобальное существование решений. Для уравнения с логарифмической нелинейностью определены условия существования локализованных неограниченных решений и дан метод описания эволюции их структуры с помощью построения автомодельных решений соответствующей "усеченной" задачи.

Ключевые слова и фразы: операторное сравнение, верхнее и нижнее решение, локализованное неограниченное решение.

ABSTRACT

Nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for semilinear parabolic equations is investigated. The conditions of nonexistence of global solutions for these equations with convex nonlinearities are determined. The conditions for existence of global solutions for some equations are determined with the assistence of building of upper and lower solutions. The conditions of existence of localizated unbounded solutions for the equations with logarithmic nonlinearity are determined. The method of describtion of evolution of there's structure is given with the assistance of similarity solutions of the appropriate "abbreviate" equations.

Key words and phrases: operating comparison, upper and lower solutions, localizated unbounded solutions.

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Введение 3
§ I. Постановка задачи и теоремы сравнения 7
I. Постановка задачи 7
2. Теоремы сравнения 9
§ 2. Общая теорема существования неограниченных решений 11
I. Общая теорема 11
2. Неограниченные решения некоторых квазилинейных уравнений 14
§ 3. О решениях нелинейного уравнения $u_t = \Delta u + u^p$ 16
I. Построение нижнего решения 17
2. Построение верхнего решения 18
3. Некоторые оценки 18
§ 4. О решениях полулинейного уравнения $u_t = \Delta u + (1+u)\ln^p(1+u)$ 21
I. Построение нижнего решения 21
2. Построение верхнего решения 22
§ 5. Локализация неограниченных решений 23
I. Структурная устойчивость неограниченных решений 24
2. Существование автомодельных решений "усеченного" уравнения 25
3. Три типа неограниченных решений 26
4. Структурная устойчивость ограниченных решений при $p > 3$ 26
5. Качественная теория осреднения 28
6. Заключение 29
Литература 32

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию неограниченных решений задачи Коши для полулинейных параболических уравнений

$$u_t = \Delta u + Q(u)\ ,\ Q(u)>0\ ,\ u>0\ ;\ Q(0)=0\ ,$$
$$u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0\ ,\ x\in\mathbb{R}^N\ ,\ u_0(x)\in C(\mathbb{R}^N)\ . \qquad (A)$$

Неограниченными решениями задачи (А) мы называем такие решения, которые обращаются в бесконечность за конечное время.

Уравнение (А) при условии $Q(0)=Q(1)=0$, $Q(u)\equiv 0$ при $u>1$ изучалось в известной работе [29] и в большом количестве последующих работ, которые посвящены распространению бегущих волн в биологических, химических и других процессах.

В отличие от этого круга работ в рассматриваемом случае ограничение на рост $Q(u)$ отсутствует, что в ряде случаев приводит к появлению неограниченных решений (в терминологии [13]-[15] - режимов с обострением).

Отметим, что вопрос о неограниченных решениях уравнений параболического типа рассматривался рядом авторов в связи с проблемой существования решений в "целом" [1],[4],[9].

Наш интерес к неограниченным решениям связан, прежде всего, с целым рядом их необычных свойств. Так, в работах [12]-[16] на примере одного частного случая уравнения $u_t = (k(u)u_x)_x + Q(u)$, $k(u)>0$ при $u>0$, $k(0)=0$ было показано, что развитие режимов с обострением приводит к метастабильной локализации тепла и горения в нелинейной среде, образованию и взаимодействию тепловых структур (если u - температура среды, $k(u)$ - коэффициент теплопроводности, $Q(u)$ - мощность источников выделения энергии). В данной работе некоторые аналогичные результаты получены для случая полулинейных параболических уравнений.

В работе определяются достаточные условия неограниченности решений задачи (А) в зависимости от функций $Q(u)$ и $u_0(x)$. Устанавливаются точные оценки сверху для времени существования решений (величины T_0). Рассмотрен также вопрос о существовании в "целом" решений некоторых уравнений типа (А), которые в то же

время (в зависимости от $u_0(x)$) допускают и неограниченные решения. Для уравнений (А) специального вида получены условия локализации неограниченных решений (§ 5), резонансного взаимодействия элементарных возмущений (§ 3, п.3) и дано описание асимптотической стадии (при $t \to T_0^-$) развития неограниченных решений (§ 5).

В § I формулируются вспомогательные утверждения; в частности, теорема сравнения решений различных параболических уравнений ([5],[6],[I2]), которая позволяет распространить некоторые результаты настоящей работы на широкий класс квазилинейных уравнений.

В § 2 методом операторного сравнения решений различных уравнений получен следующий результат:
Пусть $F(\lambda) = \int_\lambda^\infty d\xi / Q(\xi) < \infty$ при $\lambda > 0$ и $F(0) = \infty$.
Пусть, кроме того, $Q''(u) \geq 0$ при всех $u > 0$. Если

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{(N+2)/N} / Q(\sigma) = \omega < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx > [2\pi N \omega]^{N/2},$$

то решение задачи (А) является неограниченным. Для доказательства этого утверждения выводится специальная поточечная оценка решения.

В §§ 3,4 методом построения верхних и нижних решений уравнения (А) при $Q(u) = u^\beta$ и $Q(u) = (1+u)\ln^\beta(1+u)$ соответственно определяются условия на функцию $u_0(x)$, обеспечивающие неограниченность или существование в "целом" решений задачи. В § 3 также рассматривается задача резонансного взаимодействия элементарных возмущений, постановка которой непосредственно связана с результатами работ [I4]-[I6]. Установлены оценки энергии и линейного размера системы, состоящей из двух одинаковых элементарных ($\tilde{\delta}$ - образных) возмущений, обуславливающие их слияние и неограниченный рост решения в точке симметрии системы.

В § 5 исследуются условия локализации неограниченных решений уравнения

$$u_t = u_{xx} + (1+u)\ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1 \qquad (B)$$

В соответствии с [13]-[15] локализованными называются такие неограниченные решения, которые обращаются в бесконечность на множестве конечной меры (то есть функция $u(T_0^-,x)$ существует всюду в $\mathbb{R}^1 \setminus G$, где $\operatorname{mes} G < \infty$).

Показано, что при $\beta \in (1,2)$ решения не являются локализованными ($u(T_0^-,x) = \infty$ всюду в $\mathbb{R}^1$), при $\beta = 2$ $u(T_0^-,x) = \infty$ на множестве из $\mathbb{R}^1$ с мерой равной 2π и при $\beta > 2$ неограниченные решения обращаются в бесконечность на множестве меры нуль (например, в одной точке).

В § 5 также выясняется вопрос о структурной устойчивости неограниченных и существующих в "целом" решений уравнения (В). Показано, что при $t \to T_0^-$ асимптотика неограниченных решений описывается временными закономерностями автомодельных решений следующего "вырожденного" "усеченного" уравнения Гамильтона-Якоби

$$u_t = u_x^2/(1+u) + (1+u)\ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1; \qquad (C)$$

причем при $t = T_0^-$ структуры автомодельных представлений этих решений совпадают. Аналогичный вывод сделан для решений, существующих в "целом". Установлено, что эти решения при $t \to \infty$ имеют в качестве усеченного (но уже не вырожденного) такое уравнение

$$u_t = u_{xx} - u_x^2/(1+u) + (1+u)\ln^\beta(1+u), \quad \beta > 3. \qquad (Д)$$

Структуры существующих в "целом" решений уравнений (В) и (Д) совпадают. Таким образом, асимптотические характеристики решений уравнения (В) совпадают с временными закономерностями автомодельных решений совсем других уравнений. Заметим, что точных автомодельных решений, в построении которых обычно состоит традиционный аппарат исследования, уравнение (В) не имеет [21]. Приложения и исследование эффекта локализации можно найти также в [31]-[39].

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

1. Постановка задачи

Рассмотрим в $Q_{T_0}^{N+1} = [0,T_0) \times \mathbb{R}^N$ задачу Коши для уравнения

$$\mathcal{A}u = u_t - \Delta u - Q(u) = 0, \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) \qquad (1)$$

о начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0 \ , \ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$

Будем считать, что функция $Q(u)$ в уравнении (I) определена для $u \geqslant 0$, $Q(u) > 0$ при $u > 0$, $Q(0) = 0$ и $Q(u) \in C^2([m, \infty))$ для $\forall\, m > 0$. Также предполагаем, что функция $u_0(x)$ в (2) принадлежит класу $C(\mathbb{R}^N)$, причем $\| u_0(x) \| < \infty$, где символом $\| \cdot \|$ обозначается норма в C по пространству $\mathbb{R}^N$, так что $\| u(t,x) \| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} [u(t,x)]$ (в этом выражении t фиксировано).

<u>Определение.</u> Решение задачи (I)-(2) называется неограниченным в $Q^{N+1}_{T_0}$, если $\| u(t,x) \| < \infty$ при $\forall\, t \in (0, T_0)$ и $\lim\limits_{t \to T_0} \| u(t,x) \| = \infty$. Конотанту T_0 в этом случае будем называть временем существования решения. В соответствии с терминологией, введенной в [I3]-[I5], неограниченные решения будем также называть режимами с обострением, а время существования – моментом обострения.

В этом параграфе будут определены условия существования неограниченных решений задачи (I)-(2).

Необходимым условием существования неограниченных решений (см. критерий Осгуда [I]) является ограниченность интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} dz / Q(z) \ , \ \lambda > 0 \ . \qquad (3)$$

При этом для T_0 справедлива оценка снизу

$$T_0 \geqslant F(\overline{u}^0_m) \ , \ \overline{u}^0_m = \| u_0(x) \| \ . \qquad (4)$$

В том случае, когда $\underline{u}^0_m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) > 0$, установление факта о неограниченности решения задачи (I)-(2) является тривиальным и справедлива оценка сверху

$$T_0 \leqslant F(\underline{u}^0_m) \ . \qquad (5)$$

Вследствие этого будем считать, что $\underline{u}^0_m = 0$ (этому условию удовлетворяют, например, финитные функции: $\operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0(x) < \infty$).

Отметим, что функции (3) при $\forall m > 0$ удовлетворяет включению $F(\lambda) \in C^3([m, \infty))$.

2. Теоремы сравнения

Здесь будут сформулированы некоторые вспомогательные утверждения

I. Оценка решения снизу в области с криволинейными границами. Обозначим через H_T^{N+1} область, заданную неравенствами $0 < t < T$, $\underline{x}_j(t) < x_j < \overline{x}_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, где функции $\underline{x}_j$, $\overline{x}_j$ – непрерывные. Через ∂H_T^{N+1} обозначим ее параболическую границу.

Лемма I. Пусть $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T^{N+1})$ – решение задачи (I)-(2), а $\underline{v}(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(H_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}) \cap C(\overline{H}_T^{N+1})$ причем $u(t,x) \geqslant \underline{v}(t,x)$ при всех $(t,x) \in \partial H_T^{N+1}$, а в $H_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}$ выполнено неравенство $\mathcal{A}\underline{v}(t,x) \leqslant 0$. Тогда $u(t,x) \geqslant \underline{v}(t,x)$ всюду в H_T^{N+1}.

Функцию $\underline{v}(t,x)$ в соответствии с [2],[3][23] будем называть нижним решением задачи (I)-(2) в H_T^{N+1}.

2. Аналогичная лемма имеет место при оценке решения сверху.

Лемма 2. Пусть $u(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T^{N+1})$ – решение задачи (I)-(2), а $\overline{v}(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(H_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}) \cap C(\overline{H}_T^{N+1})$, причем $u(t,x) \leqslant \overline{v}(t,x)$ при всех $(t,x) \in \partial H_T^{N+1}$, а в $H_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}$ выполнено неравенство $\mathcal{A}\overline{v}(t,x) \geqslant 0$. Тогда $u(t,x) \leqslant \overline{v}(t,x)$ всюду в H_T^{N+1}.

Функцию $\overline{v}(t,x)$ будем называть верхним решением задачи (I)-(2) в H_T^{N+1}. Заметим, что область H_T^{N+1} может быть неограниченной по отдельным направлениям, а также совпадать с Q_T^{N+1}. Доказательство лемм I и 2 проводится методами, изложенными, например, в[4],[5].

2. Сравнение с решением другого уравнения. Рассмотрим в Q_T^{N+1} две задачи Коши для равномерно параболических уравнений ($\nu = 1,2$)

$$v_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(v^{(\nu)}, \nabla v^{(\nu)}, \Delta v^{(\nu)}) \qquad (6)$$

с начальными условиями

$$v^{(\nu)}(0,x) = v_0^{(\nu)}(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^N, v_0^{(\nu)}(x) \in C(\mathbb{R}^N). \qquad (7)$$

Будем считать функции $L^{(\nu)}(p,q,z)$, $q=(q_1,\dots,q_N)$ дифференцируемыми по всем аргументам. Справедлива следующая теорема сравнения.

Теорема I. Пусть при $\nu=1,2$ $u^{(\nu)}(t,x)\in C^{1,2}_{t,x}(Q_T^{N+1})$, $v_0^{(2)}\geqslant v_0^{(1)}$ при всех $x\in\mathbb{R}^N$. Пусть, кроме того, для всех функций $f(t,x)\in C^{1,2}_{t,x}(Q_T^{N+1})$ $\mathcal{L}^{(2)}(f)\geqslant\mathcal{L}^{(1)}(f)$. Тогда $u^{(2)}(t,x)\geqslant u^{(1)}(t,x)$ всюду в Q_T^{N+1}.

Доказательство этой теоремы проводится методами [4]. Теорема I в ряде случаев позволяет сравнивать решения таких уравнений (6), операторы которых удовлетворяют условию

$$\mathcal{L}^{(2)}(f)=\mathcal{L}^{(1)}(f)+\ell(f,\Delta f),$$

в котором функция ℓ не зависит от Δf. В противном случае необходимо иметь поточечную оценку $\Delta v^{(2)}$ через $\nabla v^{(2)}$ и $v^{(2)}$. Такой подход к сравнению решений параболических уравнений излагается ниже.

Рассмотрим в Q_T^{N+1} две задачи Коши для равномерно параболических уравнений ($\nu=1,2$)

$$v_t^{(\nu)}=\mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)})=k^{(\nu)}(v^{(\nu)})\Delta v^{(\nu)}+k^{(\nu)\prime}(v^{(\nu)})(\nabla v^{(\nu)})^2+Q^{(\nu)}(v^{(\nu)}) \quad (8)$$

с начальными условиями (7). Будем считать, что функции $k^{(\nu)}(v)>0$ при $v\geqslant 0$, $k^{(\nu)}(v)\in C^3([m,\infty))$, $Q^{(\nu)}(v)\in C^1([m,\infty))$ для $\forall m>0$. Для вывода априорных оценок старшей производной нам понадобится следующее определение.

Определение. Начальное распределение в задаче (8),(7) при $\nu=2$ назовем критическим, если всюду в Q_T^{N+1} справедливо неравенство $v_t^{(2)}(t,x)\geqslant 0$.

Лемма 3. Пусть $v_0^{(2)}(x)\in C^2(\mathbb{R}_0^N(v))\cap C(\mathbb{R}^N)$, где $\mathbb{R}_0^N(v_0)=\mathbb{R}^N\cap\{x: v_0(x)>0\}$, $v^{(2)}(t,x)\in C^{2,1}_{t,x}(Q_T^{N+1})$.
Тогда для критичности начального распределения (7), $\nu=2$ необходимо и достаточно, чтобы в $\mathbb{R}^N$ было справедливо неравенство

$$\mathcal{L}^{(2)}(v_0^{(2)}(x))=k^{(2)}(v_0^{(2)})\Delta v_0^{(2)}+k^{(2)\prime}(v_0^{(2)})(\nabla v_0^{(2)})^2+Q^{(2)}(v_0^{(2)})\geqslant 0. \quad (9)$$

Следствие. В условиях леммы 3 всюду в Q_T^{N+1} справедлива поточечная оценка старшей производной (лапласиана) решения задачи (8),(7) ($\nu=2$) через младшие

$$\Delta v^{(2)} \geqslant -(k'(v^{(2)})/k(v^{(2)}))(\nabla v^{(2)})^2 - Q^{(2)}(v^{(2)})/k^{(2)}(v^{(2)}) . \quad (10)$$

На основе оценки (10) формулируется следующая теорема сравнения по коэффициентам.

<u>Теорема 2.</u> Пусть $v^{(1)}(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T^{N+1})$, $v^{(2)}(t,x) \in C^{2,1}_{t,x}(Q_T^{N+1})$ и краевые условия (7) для $\nu = 2$ являются критическими (при этом $v_0^{(2)}(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$). Пусть, кроме того, справедливы неравенства

$$v_0^{(2)}(x) - v_0^{(1)}(x) \geqslant 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^N \ ;$$

$$k^{(2)}(v) - k^{(1)}(v) \geqslant 0 \ , \ [k^{(2)}(v)/k^{(1)}(v)]' \geqslant 0 \ , \quad (11)$$

$$Q^{(2)}(v)/k^{(2)}(v) - Q^{(1)}(v)/k^{(1)}(v) \geqslant 0 \ , \ 0 < v < \infty \ . \quad (12)$$

Тогда $v^{(2)}(t,x) \geqslant v^{(1)}(t,x)$, $(t,x) \in Q_T^{N+1}$.

Уравнения (8) в приведенной теории сравнения решений выбраны в качестве модельных. Изложенный метод работает в других, более общих, ситуациях([5], [12]).

§ 2. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

1. <u>Общая теорема</u>

Наряду с задачей (1)-(2) рассмотрим в Q_T^{N+1} задачу Коши для уравнения

$$v_t = \Delta v \quad (13)$$

с начальным условием (2). Решение этой задачи представимо в виде

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,y)\, u_0(x+y)\, dy \ , \quad (14)$$

где $\Gamma(t,y)$ - фундаментальное решение оператора теплопроводности

$$\Gamma(t,y) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\{-\|y\|^2/(4t)\}, t \geqslant 0 \ , \ y \in \mathbb{R}^N . \quad (15)$$

Пусть $E(p,\tau)$ – некоторая функция, осуществляющая при каждом $\tau\in(0,T)$ отображение множества $\{p: 0\leq p<\infty\}$ на себя. Пусть, кроме того, это отображение монотонно и для $\forall m>0$ $E(p,\tau)\in C^{2,1}_{p,\tau}([m,\infty)\times(0,T))$. Функция $E(p,\tau)$ (пока неизвестная) будет использована для операторного сравнения решений задач (I)–(2) и (I3),(2). Суть этого метода сравнения состоит в следующем. В результате замены

$$u(t,x) = E(U(t,x),t) \quad , \quad (t,x)\in Q^{N+1}_T \tag{I6}$$

уравнение (I) применительно к новой функции U приобретает вид

$$U_t = \Delta U + [E''_{uu}/E'_u](\nabla U)^2 + (Q(E)-E'_t)/E'_u \tag{I7}$$

В силу теоремы I, § I сравнение решений уравнений (I3),(I7 (пока без учета условий на краевые данные) имеет место в том случае, когда при $\forall$ (p,τ)

$$E''_{pp}(p,\tau)\geqslant 0 \quad , \quad Q(E(p,\tau))-E'_\tau(p,\tau)\geqslant 0 \quad . \tag{I8}$$

<u>Лемма 4.</u> Пусть функция $Q(u)$ в (I) – выпуклая (то есть $Q''(u)\geqslant 0$ при $u>0$). Тогда функция

$$E(p,\tau) = F^{-1}(F(p)-\tau) \tag{I9}$$

является решением системы обыкновенных дифференциальных неравенств (I8) (функция F определяется формулой (3)).

<u>Доказательство.</u> Функция (I9) превращает второе неравенство (I8) в тождество. Первое неравенство (I8) запишем в эквивалентном виде

$$F''(p) + Q'(F^{-1}(F(p)-\tau))F'^2(p) \geqslant 0 \ .$$

При $\tau=0$ это неравенство превращается в тождество. Поэтому оно выполняется в силу выпуклости Q и монотонности F (F – монотонно убывающая). Лемма доказана.

Оператор (I9) оставляет в неподвижности множество, соответствующее $\tau=0$. Поэтому $U(0,x)\equiv u_0(x)$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция $Q(u)$ в уравнении (I) выпуклая. Тогда для решения задачи (I)-(2) справедлива оценка в Q_T^{N+1}

$$u(t,x) \geqslant F^{-1}\{F(v(t,x)) - t\} \quad , \tag{20}$$

в которой функция $v(t,x)$ вычисляется по формулам (I4)-(I5).

Замечание. Неравенство (20) эквивалентно следующему

$$F(v(t,x)) - F(u(t,x)) \geqslant t \quad , \ (t,x) \in Q_T^{N+1} . \tag{20 }$$

При $Q(u) = u^{\beta}$, $\beta > 1$ $F(\lambda) = \lambda^{1-\beta}/(\beta-1)$, $\lambda > 0$ и неравенство (20) принимает вид

$$v^{1-\beta} - u^{1-\beta} \geqslant (\beta-1)t \quad , \ (t,x) \in Q_T^N \tag{2I}$$

Это неравенство было также получено в [7]-[8] способом, отличным от применяемого здесь.

Символом $\|\cdot\|_1$ будем обозначать норму в $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, так что

$$\|v(t,x)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |v(t,y)|dy$$

На основе неравенство (20) сформулируем следующую общую теорему существования неограниченных решений.

Теорема 4. Пусть $F(0) = \infty$. Пусть, кроме того, $Q''(u) \geqslant 0$ при $\forall u > 0$ и выполнено предельное равенство

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^{\frac{N+2}{N}} / Q(\sigma) = \omega < \infty \quad . \tag{22}$$

Тогда, если функция (2) удовлетворяет неравенству

$$\|u_0(x)\|_1 > [2\pi N \omega]^{N/2} \quad , \tag{23}$$

то существует такое $T_0 < \infty$, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи (I)-(2) будет неограниченным.

Доказательство. В силу условия $F(0) = \infty$ из неравенства (20) следует, что $u(t,x)$ не существует (неограничена) в тех точках Q_T^{N+1} , в которых $F(v(t,x)) - t \leq 0$. Анализируя асимптотику функции $F(v(t,x))/t$ при $t \to \infty$, получим, что

$$\lim_{t\to\infty} F(v(t,x))/t = 2\pi N \|u_0(x)\|_1^{-2/N} \lim_{\sigma\to 0}\{\sigma^{\frac{N+2}{N}}/Q(\sigma)\},$$

откуда в силу (22) и (23) следует утверждение теоремы.

Следствие. Как следует из неравенства (23), в случае, когда $\omega = 0$, любое начальное возмущение с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ приведет к существованию неограниченного решения (этот же результат доказан другим способом в [8]), при $\omega \in (0,\infty)$ появляется понятие некоторой минимальной энергии: $\|u_0(x)\|_1 > [2\pi N\omega]^{N/2}$ и лишь при $\omega = \infty$ вопрос о неограниченности решения задачи (I)-(2) остается открытым (не асимптотический анализ неравенства (20) будет проведен в следующем параграфе для одного частного случая уравнения (I)).

Замечание. Для случая $Q(u) = u^{\beta}$, $\beta > 1$ теорема 4 устанавливает неограниченность любого ($\|u_0(x)\|_1 > 0$) решения задачи (I)-(2) при $\beta \in (1,(N+2)/N)$. Этот же результат получен в [7] (см. также [9]-[II], где такой результат получен для частных случаев N и β); в [22] для случая $N=1$ и $N=2$ доказана неограниченность любого решения при $\beta = (N+2)/N$. В [30] проведена классификация некоторых методов отыскания неограниченных решений.

2. Неограниченные решения некоторых квазилинейных уравнений

I. С помощью теоремы 4 мы распространим некоторые результаты предыдущего пункта на квазилинейные уравнения вида (функции K и q удовлетворяют требованиям на $K^{(j)}$ и $Q^{(j)}$ в (8))

$$v_t = \mathcal{L}_1(v) = \nabla(K(v)\nabla v) + q(v) \quad . \tag{24}$$

Рассмотрим в Q_T^{N+1} задачу Коши для уравнения (24) с начальным условием (2). Тогда, сравнивая решение этой задачи с решением исходной (I)-(2) и пользуясь при этом теоремой 2, получим, что $v(t,x) \geqslant u(t,x)$ всюду в Q_T^{N+1}, если функция $u_0(x)$ является критической в $C^2(\mathbb{R}_0^N(u_0)) \cap C(\mathbb{R}^N)$ и выполнены неравенства

$$K(p) \geqslant 1 \ , \ K'(p) \geqslant 0 \ , \ q(p) \geqslant K(p)Q(p) \ , \ 0<p<\infty \ . \tag{25}$$

Выполнение всех этих условий обеспечивает неограниченность решения задачи (24),(2) в том случае, если решение исходной задачи

также неограничено. При этом время существования $v(t,x)$ не превосходит T_0 функции $u(t,x)$. Например, если выполнены неравенства (25) и $\lim_{\varepsilon\to 0}\{\varepsilon^{(N+2)/N}/Q(\varepsilon)\}=0$, то любое критическое начальное распределение (2) приведет к неограниченности решения задачи Коши (24),(2). Это утверждение прямо следует из теоремы 4.

2. Ниже мы определим один класс критических начальных распределений. Предварительно заметим, что критичность функции $u_0(x)$ обеспечивает неубывание решения задачи всюду в Q_T^{N+1}. Как следует из неравенства (9) все критические функции $u_0(x)\in C^2(\mathbb{R}^N_0(u_0))\cap C(\mathbb{R}^N)$ можно получить из уравнения

$$\nabla(K(u_0)\nabla u_0)+q(u_0)=d(x)\quad, x\in\mathbb{R}^N, \tag{26}$$

в котором $d(x)$ – произвольная неотрицательная функция. Мы ограничимся рассмотрением зависящих только от $\|x\|$ и монотонно убывающих (т.е. $u_{x_i}(t,x)\,\mathrm{sign}\,x_i\le 0$ почти всюду в Q_T^{N+1}) критических начальных распределений. Этот класс описывается уравнениями

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}K(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)+q(u_0)=\delta(u_0)\,,\ r\in\mathbb{R}^1_+, \tag{26 }$$

в которых $r=\|x\|$, а функция $\delta(u_0)$ – неотрицательная при $u_0\in(0,\infty)$, и краевыми условиями

$$u_0(0)=\overline{u}^0_m\,,\ \frac{\partial}{\partial r}u_0(0)=0\,,\ \overline{u}^0_m=\max_{r\in\mathbb{R}^1_+}u_0(r)\ . \tag{27}$$

Рассмотрим одномерный аналог задачи (26)-(27), т.е. случай $N=1$. Положим для удобства $\delta(u_0)=\gamma(u_0)q(u_0)$, где функция γ неотрицательная и удовлетворяет при всех $\eta\le\overline{u}^0_m$ неравенству

$$\int_\eta^{\overline{u}^0_m}K(\xi)Q(\xi)(1-\gamma(\xi))\,d\xi\ge 0\ .$$

Тогда задача (26)-(27) всегда имеет решение и с помощью функции

$$R_\gamma(\lambda)=\int_\lambda^{\overline{u}^0_m}K(\eta)\,d\eta\Big/\left\{2\int_\eta^{\overline{u}^0_m}K(\xi)Q(\xi)(1-\gamma(\xi))\,d\xi\right\}^{1/2},\quad 0\le\lambda\le\overline{u}^0_m \tag{28}$$

ее решение записывается в виде $\underline{u}_0(x) = R_\gamma^{-1}(\xi)$. Из (28) получаем, что при фиксированном $\overline{u}_m^0$ всегда выполнено неравенство $R_\gamma^{-1}(\xi) \geq R_0^{-1}(\xi)$ при $\forall \xi \in \mathbb{R}_+^1$. Таким образом, в классе монотонных симметричных критических начальных распределений с фиксированным максимумом минимальным является решение стационарного уравнения ($\gamma \equiv 0$). Для этой оценки введем обозначение $\underline{u}_0(x)$. Нетрудно показать, что $\underline{u}_0(x)$ является вообще минимальной среди всех критических начальных распределений, удовлетворяющих условию $u_0(0) \geq \overline{u}_m^0$. Отметим некоторые свойства минимального распределения. Например:

$$\operatorname{mes} \operatorname{supp} \underline{u}_0(x) = 2R_0(0), \quad \|\underline{u}_0(x)\|_1 = \int_0^{\overline{u}_m^0} R_0(\eta)\, d\eta . \quad (29)$$

Таким образом, для того, чтобы начальное распределение с фиксированным $\overline{u}_m^0$ обеспечило рост решения всюду в Q_T^{N+1} оно должно обладать носителем и "энергией" не меньшим, чем вычисляемые по формулам (29).

Особенно просто выглядит функция (28) при $\gamma \equiv 0$ в случае $k(p) \equiv 1$ и $Q(p) = p^\beta$

$$R_0(\lambda) = \overline{u}_m^{0\,(1-\beta)/2} [2(\beta+1)]^{-1/2} B_y((\beta+1)^{-1}, 1/2) ,$$

где $y = (\lambda / \overline{u}_m^0)^{\beta+1}$, $B_y(m,n)$ – неполная бета-функция

$$B_y(m,n) = \int_y^1 s^{m-1}(1-s)^{n-1} ds , \quad 0 \leq y \leq 1 .$$

В этом случае

$$\operatorname{mes} \operatorname{supp} \underline{u}_0(x) = \overline{u}_m^{0\,(1-\beta)/2} [2\pi(\beta+1)^{-1}]^{1/2} \Gamma((\beta+1)^{-1}) / \Gamma((\beta+1)^{-1} + 1/2) ,$$

$$\|u_0(x)\|_1 = \overline{u}_m^{0\,(3-\beta)/2} [2(\beta+1)^{-1}]^{1/2} \int_0^1 \eta^{-\beta(\beta+1)^{-1}} B_\eta((\beta+1)^{-1}, 1/2)\, d\eta .$$

§ 3. О РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ $u_t = \Delta u + u^\beta$.

Рассмотрим задачу (I)–(2) для случая $Q(u) = u^\beta$. В этом параграфе методом построения нижнего и верхнего решений указанного уравнения будут получены некоторые оценки его неограниченных и и ограниченных решений. При этом для анализа свойств будет использовано неравенство (2I).

Пусть функция $u_0(x)$ в (2) зависит только от $\|x\|$. Тог-

да уравнение (I) в результате замены $r=\|x\|$ приобретает вид

$$\mathcal{A}u = u_t - \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - u^{\beta} = 0\ ,\quad \beta > 1\ . \tag{30}$$

Рассмотрим задачу (30),(2)

I. <u>Построение нижнего решения</u>

Рассмотрим в $Q_T^2 = (0,T)\times\mathbb{R}^1$ функцию

$$\underline{u}(t,x) = (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}}\,\underline{\theta}(\xi)\ ,\quad \xi = r(T-t)^{-1/2}\ .$$

Пусть $\underline{\theta}(\xi)\in C^2(\mathbb{R}^1)$ и симметрична относительно преобразования $\xi\to-\xi$. Для того, чтобы эта функция была в $\mathbb{R}^1$ нижним решением уравнения (30), необходимо, чтобы в $\mathbb{R}^1$

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}\left(\xi^{N-1}\underline{\theta}'\right)' - \frac{1}{2}\underline{\theta}'\xi - \frac{1}{(\beta-1)}\underline{\theta} + \underline{\theta}^{\beta} \geqslant 0\ ,\ \left(' = \frac{d}{d\xi}\right)\ . \tag{31}$$

Положим $\underline{\theta}(\xi) = A\exp\{-\alpha\xi^2\}$, где константы $A>0, \alpha>0$ будут определены позднее. Неравенство (31) после деления обеих его частей на $\underline{\theta}(\xi)$ принимает вид

$$\alpha(4\alpha+1)\xi^2 + A^{\beta-1}\exp\{\alpha(1-\beta)\xi^2\} \geqslant 2\alpha N + 1/(\beta-1)\ .$$

На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

<u>Теорема 5.</u> Пусть в задаче (I)-(2) начальное распределение таково, что в $\mathbb{R}^N$ выполнено неравенство

$$u_0(x) \geqslant T^{-(\beta-1)^{-1}} A\exp\{-\alpha\|x\|^2 T^{-1}\}\ ,$$

где $T>0$, $\alpha>0$, $A \geqslant [2\alpha N + (\beta-1)^{-1}]^{(\beta-1)^{-1}}\exp\{[2\alpha N + (\beta-1)^{-1}]/(4\alpha+1)\}$. Тогда существует такое $T_0 \leq T$, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи неограничено, причем справедлива оценка

$$u(t,x) \geqslant (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}} A\exp\{-\alpha\|x\|^2(T-t)^{-1}]\ ,\ (t,x)\in Q_{T_0}^{N+1}\ .$$

<u>Замечание.</u> Из оценок теоремы 5 получается уже известный результат о неограниченности любого решения задачи (I)-(2) с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ при $\beta<(N+2)/N$. Для этого достаточно показать, что функция $v(t,x)$, определяемая формулами (I4)-(I5), будет по истечении конечного времени удовлетворять условию последней теоремы.

2. Построение верхнего решения

Как следует из теоремы 4 (см. замечание к ней) ограниченного верхнего решения уравнения (I) при $\beta<(N+2)/N$ построить нельзя. Рассмотрим случай $\beta>(N+2)/N$. Верхнее решение уравнения (30) в Q_T^2 будем искать в виде

$$\bar{u}(t,x)=(T+t)^{-(\beta-1)^{-1}}\bar{\theta}(\xi)\ ,\quad \xi=z(T+t)^{-1/2}\ ,$$

где $\bar{\theta}(\xi)=\bar{\theta}(-\xi)$ и $\theta(\xi)\in C^2(\mathbb{R}^1)$. Для того, чтобы эта функция была верхним решением, в $\mathbb{R}^1$ должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\bar{\theta}')'+\frac{1}{2}\bar{\theta}'\xi+\frac{1}{\beta-1}\bar{\theta}+\bar{\theta}^{\beta}\leq 0\ . \tag{32}$$

Положим $\bar{\theta}(\xi)=A\exp(-\alpha\xi^2)$, где $A>0$, $\alpha>0$. Неравенство (32) в этом случае приобретает вид

$$\alpha(4\alpha-1)\xi^2+A^{\beta-1}\exp\{\alpha(1-\beta)\xi^2\}\leq 2\alpha N-1/(\beta-1)\ ,$$

откуда выбираются величины коэффициентов A и α. Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. Пусть в задаче (I)-(2) $\beta>(N+2)/N$ и пусть начальное распределение таково, что в $\mathbb{R}^N$

$$u_0(x)\leq T^{-(\beta-1)^{-1}}A\exp\{-\alpha\|x\|^2T^{-1}\}$$

где $[2N(\beta-1)]^{-1}<\alpha\leq 1/4$, $A\leq[2\alpha N-(\beta-1)^{-1}]^{(\beta-1)^{-1}}$.
Тогда решение задачи существует в Q_∞^{N+1}, причем оправедлива оценка

$$u(t,x)\leq(T+t)^{(\beta-1)^{-1}}A\exp\{-\alpha\|x\|^2(T+t)^{-1}\}\ .$$

Замечание. В работе [7] (см. также [9]) другим, более сложным способом, получена оценка теоремы 6 для частного случая $\alpha=1/4$.

3. Некоторые оценки

Рассмотрим неравенство (2I). В § 2 установлено, что, если при некоторых $(t^*,x^*)\in Q_T^{N+1}$ выполняется неравенство $v(t^*,x^*)\geq(\beta-1)^{-(\beta-1)^{-1}}t^{*-(\beta-1)^{-1}}$, то решение задачи (I)-(2) будет неограниченным, причем $T_0\leq t^*$. Это же неравенство позволяет определить величину x^*, т.е. координату точки, в которой решение стало неограниченным в первую очередь. Переписывая (2I), с учетом (I4)-I5) получим неравенство

$$I = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\{-\|y\|^2/(4t)\}\, u_0(x+y)\, dy \geq M t^{\frac{N}{2}-\frac{1}{\beta-1}}, \qquad (33)$$

где $M = (4\pi)^{N/2}(\beta-1)^{-(\beta-1)^{-1}}$. Точно решить (33) удается в самых редких случаях, поэтому возникает вопрос о приближенном его решении для некоторых частных начальных распределений (2).

I. Анализ элементарного возмущения. Зададим $u_0(x)$ в "элементарном" виде: $u_0(x) = \delta$ при $\|x\| \leq a$ и $u_0(x) \equiv 0$ при $\|x\| > a$, где $\delta > 0$ и $a > 0$ – заданные константы. Используя оценку $\exp\{-\|y\|^2/(4t)\} > 1 - \|y\|^2/4t$, получим для интеграла I в (33) оценку снизу

$$I \geq \int_{\|y\|<b} \{1 - \|y\|^2/4t\}\, u_0(x+y)\, dy, \quad b = \min\{a, 2t^{1/2}\}.$$

Очевидно, что в этом случае $x^* = 0$. Предположим сначала, что $t^* > a^2/4$. Тогда $b = a$ и верхняя граница времени существования решения определяется из уравнения

$$\|u_0(x)\|_1 - M_1 t^{-1} = M t^{\frac{N}{2}-\frac{1}{\beta-1}}, \quad M_1 = a^{N+2}\pi^{N/2}/2\Gamma(N/2)(N+2).$$

Для некоторых β это уравнение можно решать точно. Например, при $\beta = (N+2)/N$, $t^* = M_1/(\|u_0(x)\|_1 - M)$, для $\beta = (4+N)/(2+N)$ получаем $t^* = (M+M_1)/\|u_0(x)\|_1$, для $\beta = (3+N)/(1+N)$ $t^* = [M/2\|u_0(x)\|_1] + [(M/2\|u_0(x)\|_1)^2 + M_1]^{1/2}$ и т.д.

Пусть теперь $t^* \leq a^2/4$. Тогда $b = 2t^{1/2}$ и решение неравенства (33) (при $x = 0$) определяется по формуле $t^* = [M/M_2\|u_0(x)\|_1]^{\beta-1}$, где $M_2 = 2^{N+1}/(N+2)\, a^N$. Заметим, что эта оценка справедлива лишь при $\|u_0(x)\|_1 \geq (a^2/4)^{-(\beta-1)^{-1}} M/M_2$.

2. Для оценки времени существования решения можно воспользоваться при $t > 1$ несколькими членами разложения интеграла I по степеням $1/t$. При этом предполагаем, что функция $u_0(x)$ является финитной. Тогда получаем

$$I = \|u_0(x)\|_1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k E_{2k}/k!\, t^k + O(t^{-n-1}), \quad E_{2k} = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\|y\|^{2k} dy.$$

Коэффициенты E_{2k} суть моменты начального распределения относительно точки $x = 0$. Фиксируя в последнем выражении $n = 1$, для

$\beta = (N+4)/(N+2)$ получаем решение (33) в следующем виде $t^* \simeq (M+E_2)/\|u_0(x)\|_1$. Эта оценка справедлива при $\|u_0(x)\|_1 > M + E_2$.

3. Взаимодействие элементарных возмущений. Зададим функцию в виде двух "узких" элементарных возмущений, симметричных относительно точки $x=0$ (см.рис.I). Например, пусть $u_0(x) \sim \exp\{-[(x_1-a)^2+x_2^2+\ldots+x_N^2]\} + \exp\{-[(x_1+a)^2+x_2^2+\ldots+x_N^2]\}$, $a>0$. Пусть энергия каждого из них равна $\|u_0(x)\|_1/2$.

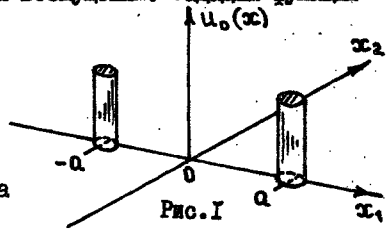

Рис.I

С точки зрения вопросов, рассмотренных в [I3]-[I6], принципиальной является задача определения условий их резонанасного взаимодействия, то есть определения тех требований на a, $\|u_0(x)\|_1$, выполнение которых обеспечивает неограниченный рост решения в точке $x=0$ (взаимодействие возмущений), а не в окрестностях их первоначального задания (отсутствие взаимодействия). Нетрудно видеть, что $x_2^* = \ldots = x_N^* = 0$. Поэтому интеграл в (33) можно считать равным

$$I = [\|u_0(x)\|_1/2][\exp\{-(x_1-a)^2/4t\} + \exp\{-(x_1+a)^2/4t\}] .$$

Функция I достигает максимума по x_1 в точке $x_1 = 0$ при $t \geq a^2/2$. В этом случае $\max_{x_1} I = \|u_0(x)\|_1 \exp\{-a^2/4t\}$. При $t < a^2/2$ резонансное взаимодействие невозможно. Корни неравенства (33) обеспечивающие взаимодействие возмущений, определяются условиями

$$\|u_0(x)\|_1 \exp\{-a^2/4t\} = M t^{N/2-(\beta-1)^{-1}}, \quad t \geq a^2/2 . \quad (34)$$

При $\beta = (N+2)/N$ уравнение (34) решается точно, его корень $t^* = a^2/4 \ln(\|u_0(x)\|_1/M)$ имеет смысл при $\|u_0(x)\|_1 > M$. Учитывая второе условие (34), а также условие существования неограниченных решений (см. тесрему 4), получим, что резонансное взаимодействие возмущений осуществляется при

$$(2\pi N)^{N/2} < \|u_0(x)\|_1 \leq (2\pi N)^{N/2} \exp\{1/2\} .$$

Заметим, что эти условия не содержат линейного размера системы - величины a, а зависят только от ее энергии $\|u_0(x)\|_1$.

Пусть теперь $\beta < (N+2)/N$. Тогда резонансное взаимо-

действие осуществляется при всех

$$0 < \|u_0(x)\|_1 \leq M\,(a^2/2)^{N/2-(\beta-1)^{-1}} \exp\{1/2\}\ .$$

Резонансное взаимодействие для $\beta > (N+2)/N$ осуществляется, если выполнены неравенства

$$M\,[a^2/4\,(N/2-(\beta-1)^{-1})]^{N/2-(\beta-1)^{-1}} \exp\{-\tfrac{N}{2}+(\beta-1)^{-1}\} \leq \|u_0(x)\|_1 \leq M\,(a^2/2)^{\frac{N}{2}-(\beta-1)^{-1}} \exp\{1/2\}\ .$$

При этом справедлива оценка $t^* \leq a^2/4\,(N/2-(\beta-1)^{-1})$. Ограничение снизу на энергию возмущений связано с условием существования неограниченных решений при $\beta > (N+2)/N$ (см. теорему 4).

§ 4. О РЕШЕНИЯХ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ $u_t = \Delta u + (1+u)\ln^{\beta}(1+u)$

Рассмотрим в Q_T^{N+1} задачи Коши (I)-(2) для случая $Q(u) = (1+u)\ln^{\beta}(1+u)$, $\beta > 1$. Исследование этого уравнения представляет большой интерес с точки зрения вопросов, рассмотренных в следующем параграфе. Поскольку в этом случае функция $Q(u)$ выпуклая, $F(\lambda) < \infty$ при $\lambda > 0$ и $F'(0) = \infty$ (см. (3)), из теоремы 4 следует, что при $\beta < (N+2)/N$ любое начальное возмущение с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ приводит к существованию неограниченного решения, при $\beta = (N+2)/N$ и $\|u_0(x)\|_1 > (2\pi N)^{N/2}$ решение также становится неограниченным и лишь при $\beta > (N+2)/N$ пока неизвестны условия существования неограниченных или ограниченных решений. В этом параграфе методом построения верхних и нижних решений будут получены эти условия.

Пусть $u_0(x)$ является функцией только $\|x\|$. Введем новую функцию $U(t,x) = \ln(1+u(t,x))$, которая является решением задачи Коши для уравнения ($r = \|x\|$)

$$\mathcal{M}U = U_t - \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N-1}\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - U^{\beta} = 0\,,\ (t,x) \in Q_T^2 \quad (35)$$

с краевым условием в $\mathbb{R}^1$: $U(0,x) = U_0(x) = \ln(1+u_0(x))$.

Дальнейший анализ будем проводить применительно к этой задаче.

I. <u>Построение нижнего решения</u>

Рассмотрим в $H_T^2 = \{(t,r): 0<t<T,\ 0 \leq r \leq a(T-t)^{(\beta-2)/2(\beta-1)}\}$, где $T>0$, $a>0$ – некоторые константы, функцию

$$\underline{U}(t,x) = (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}}\,\underline{\theta}(\xi)\,,\ \xi = r(T-t)^{-(\beta-2)/2(\beta-1)}\ .$$

Для того, чтобы эта функция была нижним решением уравнения (35) в H_T^2, необходимо, чтобы $\theta(\xi)\in C^2((-a,a))$ и

$$(T-t)^{(\beta-1)^{-1}}\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\underline{\theta}')'+\underline{\theta}'^2-\frac{\beta-2}{2(\beta-1)}\underline{\theta}'\xi-\frac{1}{\beta-1}\underline{\theta}+\underline{\theta}^{\beta}\geqslant 0,\ \left('=\frac{d}{d\xi}\right) \quad (36)$$

при $\forall\,\xi\in(-a,a)$. Обозначим $h(t)=(T-t)^{(\beta-1)^{-1}}$ и будем искать функцию $\underline{\theta}(\xi)$ в виде $\underline{\theta}(\xi)=A(a^2-\xi^2)$, где $A>0$. Тогда неравенство принимает вид

$$-[2h(t)N+a^2/(\beta-1)]+\xi^2(4A+1)+A^{\beta-1}(a^2-\xi^2)^{\beta}\geqslant 0 .$$

На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

<u>Теорема 7.</u> Пусть в задаче (I)-(2) начальное распределение таково, что в $\mathbb{R}^N$ выполнено неравенство

$$u_0(x)\geqslant \exp\{T^{-(\beta-1)^{-1}}A[a^2-\|x\|^2T^{-(\beta-2)/(\beta-1)}]\}-1,\quad \|x\|<a,$$

где $A>(2-\beta)/4(\beta-1)$, $A^{\beta-1}a^{2\beta}[1-(\beta-1)^{-1}(1+4A)^{-1}]^{\beta}\geqslant 2T^{(\beta-1)^{-1}}N+a^2/(\beta-1)$. Тогда существует $T_0\leqslant T$ такое, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи неограниченно, причем справедлива оценка

$$u(t,x)\geqslant \exp\{(T-t)^{-(\beta-1)^{-1}}A[a^2-\|x\|^2(T-t)^{-(\beta-2)/(\beta-1)}]\}-1 .$$

2. <u>Построение верхнего решения</u>

Верхнее решение уравнения (35) будем строить при $\beta>(N+2)/N$. Рассмотрим в Q_{∞}^{N+1} функцию

$$\overline{U}(t,x)=(T+t)^{-(\beta-1)^{-1}}\overline{\theta}(\xi),\quad \xi=z(T+t)^{-1/2}.$$

Пусть $\overline{\theta}(\xi)\in C^2(\mathbb{R}^1_+)$. Функция $\overline{U}(t,x)$ будет верхним решением, если в $\mathbb{R}^1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\overline{\theta}')'+(T+t)^{-(\beta-1)^{-1}}\overline{\theta}'^2+\frac{1}{2}\overline{\theta}'\xi+\frac{1}{\beta-1}\overline{\theta}+\overline{\theta}^{\beta}\leqslant 0 . \quad (37)$$

Положим $\overline{\theta}(\xi)=A\exp\{-\alpha\xi^2\}$, где $A>0$, $\alpha>0$ – некоторые постоянные величины. Неравенство (37) принимает вид

$$-2\alpha N+1/(\beta-1)+\alpha(4\alpha-1)\xi^2+A^{\beta-1}\exp\{-\alpha(\beta-1)\xi^2\}+4\alpha^2Ah(t)\xi^2\exp\{-\alpha\xi^2\}\leqslant 0,$$

где введено обозначение $h(t)=(T+t)^{-(\beta-1)^{-1}}$. На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

Теорема 8. Пусть в задаче (I)-(2) $\beta > (N+2)/N$ и пусть начальное распределение таково, что

$$u_0(x) \leq \exp\{T^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp\{-\alpha\|x\|^2 T^{-1}\}\} - 1 ,$$

где $1/2N(\beta-1) < \alpha \leq 1/4$, $A^{\beta-1} + 4\alpha A T^{-(\beta-1)^{-1}} \exp\{-1\} \leq 2\alpha N - 1/(\beta-1)$. Тогда решение задачи существует в Q^{N+1}_{∞} , причем справедлива оценка

$$u(t,x) \leq \exp\{(T+t)^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp\{-\alpha\|x\|^2 (T+t)^{-1}\}\} - 1 .$$

§ 5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В этом параграфе излагаются результаты исследования решений задачи Коши для одномерного полулинейного уравнения

$$u_t = u_{xx} + (1+u)\ln^{\beta}(1+u) , (t,x) \in Q^2_T , \beta > 1 \qquad (38)$$

с начальным условием $u(0,x) = u_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, причем функция $u_0(x)$ такова, что $u_0(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Эта задача описывает, в частности, процесс горения в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности и нелинейным источником тепла. Заметим, что ограничение на начальное раопределение обеспечивает условие $u(t,x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ всюду в области существования решения.

Определение. Пусть в $Q^2_{T_0}$ решение задачи является неограниченным. Тогда будем говорить, что оно локализовано, если для всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon} = \sup_{t \in (0,T_0)} \operatorname{mes}\{x : u(t,x) \geq \varepsilon\} < \infty . \qquad (39)$$

В противном случае будем говорить, что решение не является локализованным.

Фактически, условие (39) обуславливает существование всюду в $\mathbb{R}^1$ за исключением множества, имеющего конечную меру, функции $u(T_0^-,x)$ (см.рис.2). Если же $u(T_0^-,x)=\infty$

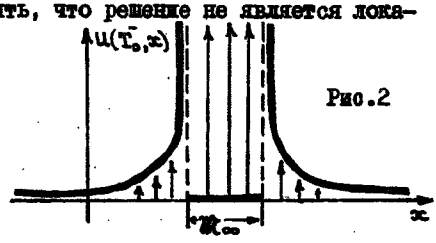

Рис.2

всюду в $\mathbb{R}^1$, то локализация решения отсутствует.

Цель настоящего параграфа – определить, при каких условиях решение сформулированной задачи локализовано или не локализовано. Ранее подобная задача исследовалась в работах [13]–[15] применительно к уравнению

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta \ , \ \sigma > 0 \ , \ \beta > 1 \ .$$

В частности, было установлено, что при $\beta < \sigma+1$ локализация отсутствует ($\mathfrak{M}_\varepsilon = \infty$ при $\forall \varepsilon > 0$), при $\beta \geq \sigma+1$ существует локализация неограниченных решений, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = L_T = 2\pi(\sigma+1)^{1/2}/\sigma$ для $\beta = \sigma+1$ (т.е. решение становится неограниченным сразу на множестве с ненулевой мерой) и $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 0$ для $\beta > \sigma+1$ (решение обращается в бесконечность на множестве меры нуль).

Сделаем в уравнении (38) замену $U = \ln(1+u)$, которая преобразует его к виду

$$U_t = U_{xx} + U_x^2 + U^\beta \ , \ U(0,x) = U_0(x) = \ln(1+u_0(x)) \quad x \in \mathbb{R}^1 \qquad (38')$$

и будем исследовать решения этой задачи.

1. Структурная устойчивость неограниченных решений

Задача (38′) является, вообще говоря, некорректной (см. результаты § 3), т.е. ее неограниченные решения не являются устойчивыми относительно малых изменений краевых данных. Поэтому, в соответствии с понятием структурной устойчивости неограниченных автомодельных решений, введенным в [14], для описания эволюции во времени решений задачи (38′) мы определяем автомодельное представление неограниченного решения.

Определение. Функцию $\theta^{(\alpha)}(t,\xi)$ будем называть автомодельным представлением решения задачи (38′), если

$$\theta^{(\alpha)}(t,\xi) = A\|U(t,x)\| U(t, A^{\frac{\alpha}{2}-1}\|U(t,x)\|^{1-\frac{\alpha}{2}}\xi) \ , (t,x) \in Q_T^2 \ ,$$

где $A > 0$ и α – некоторые константы.

Смысл термина "автомодельное представление" будет ясен из дальнейшего изложения. Численное решение задачи в частных производных (38′) показывает, что $\theta^{(\beta)}(t,\xi)$ при $t \to T_0^-$ стремится к пространственным профилям автомодельных решений "усеченного", вырожденного уравнения типа Гамильтона–Якоби (ср. (38′))

$$V_t = V_x^2 + V^\beta$$

которые имеют вид $V(t,x)=(T_0-t)^{-(\beta-1)^{-1}}\theta(\xi)$, $\xi=x(T_0-t)^{-\frac{(\beta-2)}{2(\beta-1)}}$, а функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'^2-\frac{\beta-2}{2(\beta-1)}\theta'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^\beta=0\ ,\ \left(' =\frac{d}{d\xi}\right) \qquad (40)$$

и краевым условиям $\theta'(0)=0$, $\theta(\infty)=0$. Таким образом, неограниченные решения задачи (39) структурно устойчивы в том смысле, что

$$\lim_{t\to T_0^-}\|\theta^{(\beta)}(t,\xi)-\theta(\xi)\|=0\ ,\ A=(\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}}. \qquad (41)$$

2. Существование автомодельных решений "усеченного" уравнения

Покажем, что решение уравнения (40), которое при $\beta\neq 2$ можно построить лишь численно, существует и единственно. Уравнение (40) перепишем в эквивалентном виде

$$\theta'=\frac{\beta-2}{4(\beta-1)}\xi-\left\{\left[\frac{\beta-2}{4(\beta-1)}\right]^2\xi^2+\frac{1}{\beta-1}\theta-\theta^\beta\right\}^{1/2}, \qquad (42)$$

где знак "–" перед радикалом выбран из первого краевого условия. Доказательство существования проводится на основе анализа поля интегральных кривых этого уравнения. Поскольку $\theta'(0)=-\left\{\frac{1}{\beta-1}\theta(0)-\theta^\beta(0)\right\}^{1/2}$, то первому краевому условию удовлетворяют лишь те кривые, для которых $\theta(0)=A=(\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}}$ (см.формулу (41)). На рисунках 3,4 схематически представлены поля интегральных краевых уравнения (42) для случаев $\beta\in(1,2)$ и $\beta>2$ соответственно. Жирными линиями выделено искомое решение, пунктирными – кривая $\xi=$ $=|4(\beta-1)/(\beta-2)|\left\{\theta^\beta-\theta/(\beta-1)\right\}^{1/2}$, выше которой интегральные кривые не существуют, штрих-пунктирной – изоклина нуля.

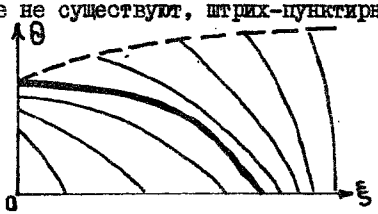

Рис.3

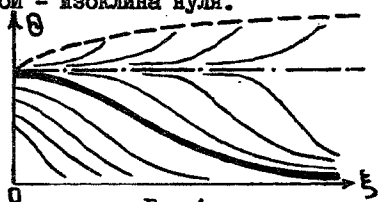

Рис.4

Асимптотика решения в окрестности $\xi = 0$ имеет вид $\theta(\xi) = (\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}} - 1/4(\beta-1)\xi^2 + O(\xi^4)$. При $\beta \in (1,2)$ $\theta(\xi) \equiv 0$ для $\forall\ \xi > \xi_0(\beta)$. Асимптотика $\theta(\xi)$ вблизи $\xi = \xi_0$ – линейная $\theta(\xi) \simeq (2-\beta)/2(\beta-1)\xi_0(\xi_0-\xi)$, $\xi \to \xi_0^-$. При $\beta > 2$ функция $\theta(\xi)$ положительна всюду в $\mathbb{R}^1$, причем асимптотика для больших ξ имеет вид $\theta(\xi) \simeq C(\beta)\,\xi^{-2/(\beta-2)}$, где $C(\beta) > 0$. При $\beta = 2$ усеченная задача имеет аналитическое решение

$$\theta(\xi) = \cos^2(\xi/2)\ ,\ |\xi| < \pi\ ;\ \theta(\xi) \equiv 0\ ,\ |\xi| > \pi \qquad (43)$$

с периодом $\Delta\xi = 2\pi$ и асимптотикой $\theta(\xi) \simeq 1/4(\pi - |\xi|)^2$ при $|\xi| \to \pi^-$.

3. Три типа неограниченных решений

Формула (41) характеризует структурную устойчивость неограниченных решений задачи (38). На рис.5 приведены результаты численного расчета этой задачи при $\beta = 2$ и показано, что $\theta^{(\beta)}(t,\xi) \to \theta(\xi)$ при $t \to T_0^-$ (функция $\theta(\xi)$ в этом случае вычисляется по формуле (43)). Временные закономерности автомодельных решений усеченного уравнения позволяют сделать вывод о локализации неограниченных решений при $\beta \geqslant 2$, причем для $\beta = 2$ $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 2\pi$ ($\mathfrak{M}_\varepsilon$ определяется по формуле (39)) и при $\beta > 2$ $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 0$. При $\beta \in (1,2)$ локализация неограниченного решения отсутствует и $U(t,x) \to \infty$ при $t \to T_0^-$ всюду в $\mathbb{R}^1$.

4. Структурная устойчивость ограниченных решений при $\beta > 3$

В § 3 показано, что при $\beta > 3$ существуют ограниченные решения задачи (38). Численные расчеты этой задачи показывают, что они структурно устойчивы, причем при некотором $A > 0$, зависящем только от величины β, справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \to \infty} \| U^{(\beta+1)}(t,\xi) - f(\xi) \| = 0\ ,$$

в котором $f(\xi)$ – автомодельное представление автомодельного решения уравнения (ср.(38)) $V_t = V_{xx} + V^\beta$. Это решение имеет вид $V(t,x) = t^{(\beta-1)^{-1}} f(\xi)$, $\xi = x t^{-1/2}$, а функция $f(\xi)$ является

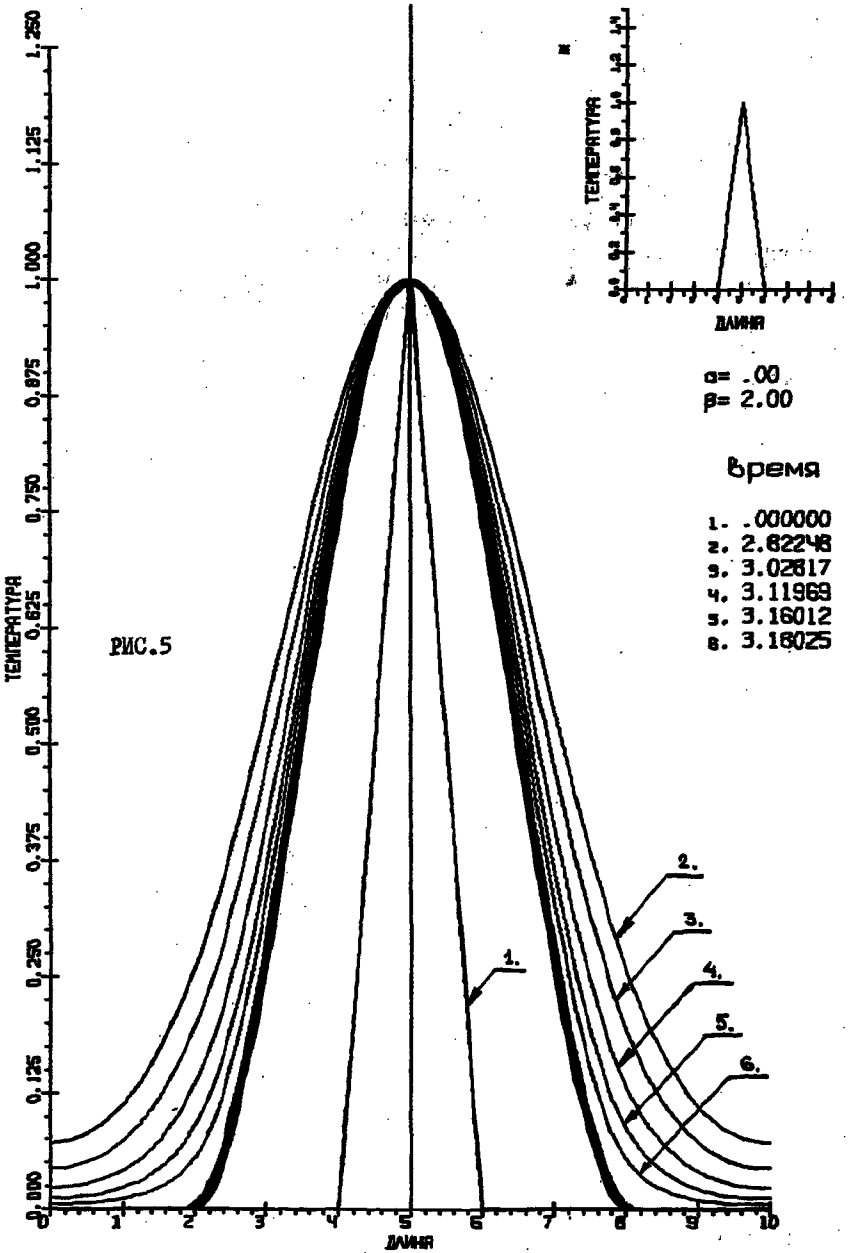
ТЕМПЕРАТУРА
ДЛИНА
α= .00
β= 2.00
Время
1. .000000
2. 2.62248
3. 3.02817
4. 3.11969
5. 3.16012
6. 3.16025
1.
2.
3.
4.
5.
6.

РИС.5

решением уравнения

$$f'' + \frac{1}{2} f' \xi + (\beta-1)^{-1} f + f^{\beta} = 0 \qquad (44)$$

с краевыми условиями $f'(0) = 0$, $f(\infty) = 0$. Численные расчеты уравнения (44) показывают, что его решение при $\beta > 3$ существует, причем асимптотика при больших ξ имеет вид $f(\xi) \simeq C(\beta)\xi^{-1} \cdot \exp\{-\xi^2/4\}$, где $C(\beta) > 0$ – некоторая константа. На рис.6 приведены некоторые кривые, полученные в результате численного расчета этой задачи при β =3.7. На рисунке жирной линией выделено решение задачи, которому соответствуют $A = f(0) = 0.603$ и $C = 2.35$.

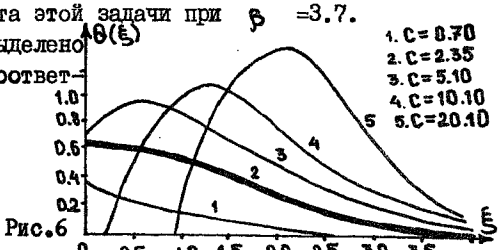

Рис.6

5. Качественная теория осреднения

Для исследования эволюции решений задачи (38′) применим качественную теорию осреднения, предложенную в [20]. Следуя этой работе, "приближенное" решение задачи будем искать в виде $\tilde{U}(t,x) = \varphi(t)\, M(\eta)$, где $\eta = x/g(t)$. Пусть функция $M(\eta)$ такова, что $M(\eta) = M(-\eta)$, $M'(\eta) < 0$ при $0<\eta<1$, $M'(0) = 0$, $M(0) = 1$; $M(\eta) \equiv 0$, $|\eta| > 1$. Тогда подлежащие определению функции $\varphi(t)$ и $g(t)$ описывают эволюцию амплитуды (т.е. $\|\tilde{U}\|$) и полуширины решения, то есть координаты точки, в которой $\tilde{U}(t,x) = \frac{1}{2}\tilde{U}(t,0)$. Интегрируя уравнение в (38′) по $\mathbb{R}^1$ сначала с весом $\rho \equiv 1$, а затем с $\rho = \tilde{U}$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\varphi g)' = g^{-1}[\nu_1\varphi^2 + \nu_2\varphi^{\beta} g^2], \quad \frac{1}{2}(\varphi^2 g)' = \varphi g^{-1}[-\nu_3\varphi + \nu_4\varphi^2 + \varphi^{\beta} g^2 \nu_5], \quad \left(' = \frac{d}{dt}\right), \qquad (45)$$

в котором введены обозначения $\nu_1 = \int M'^2 d\eta / \int M d\eta$, $\nu_2 = \int M^{\beta} d\eta / \int M d\eta$, $\nu_3 = \int M'^2 d\eta / \int M d\eta$, $\nu_4 = \int M M'^2 d\eta / \int M^2 d\eta$, $\nu_5 = \int M^{\beta+1} d\eta / \int M^2 d\eta$. Система уравнений (45) сводится к фазовому виду

$$\frac{d\varphi}{dg} = \varphi g^{-1}[\varphi^{\beta-1} g^2 a_1 + \varphi b_1 - 1] / [\varphi^{\beta-1} g^2 a_2 + \varphi b_2 - 1] , \qquad (46)$$

где $a_1 = (2\nu_5 - \nu_2)/2\nu_3$, $b_1 = (2\nu_4 - \nu_1)/2\nu_3$, $a_2 = (\nu_2 - \nu_5)/\nu_3$, $b_2 = (\nu_1 - \nu_4)/\nu_3$. Уравнение (46) имеет три особые траектории: изоклину нуля – $g_0(\varphi) = [(1 - b_1\varphi) a_1^{-1} \varphi^{1-\beta}]^{1/2}$, изоклину бесконечности – $g_\infty(\varphi) = [-(1 + b_2\varphi)^{-1} a_2 \varphi^{1-\beta}]^{1/2}$ и сепаратрису – $g_*(\varphi) \simeq \left[\frac{(2-\beta)b_1 - 2b_2}{2a_2 + a_1(\beta-2)}\right]^{1/2} \varphi^{(3-\beta)/2}$ при $\varphi \to \infty$ и $g_*(\varphi) \simeq \left[\frac{\beta-3}{2a_2 + a_1(\beta-1)}\right]^{1/2} \varphi^{(3-\beta)/2}$ при $\varphi \to 0$.

. Из условий существования этих особых линий следуют ограничения на коэффициенты: $a_1 > 0$, $b_1 < 0$, $a_2 < 0$, $b_2 > 0$. На рис. 7-10 приведены схематические изображения фазовой плоскости уравнения (46) для случаев $\beta \in (1,2)$, $\beta = 2$, $\beta \in (2,3)$, $\beta > 3$ – соответственно. Асимптотика сепаратрисы при $\varphi \to \infty$ $g_*(\varphi) \sim \varphi^{(2-\beta)/2}$, к которой сходятся все интегральные кривые, совпадают с временными закономерностями автомодельных решений усеченной задачи (40). Рис.10 демонстрирует тот факт, что ограниченные решения задачи (38) могут существовать лишь при $\beta > 3$, причем асимптотика этих решений при $\varphi \to 0$ $g_*(\varphi) \sim \varphi^{(1-\beta)/2}$ совпадает с временными закономерностями автомодельных решений усеченной задачи (44). Таким образом, качественная теория подтверждает все предыдущие выводы, в частности, вывод о локализации неограниченных решений при $\beta \geq 2$ и об ее отсутствии при $\beta \in (1,2)$.

6. Заключение

В этом параграфе установлено, что асимптотика при $t \to T_0^-$ неограниченных решений уравнения (38) определяется временными закономерностями автомодельных решений "усеченного" "вырожденного" уравнения Гамильтона-Якоби (см.(40))

$$u_t = u_x^2/(1+u) + (1+u)\ln^\beta(1+u) , \quad \beta > 1 . \qquad (47)$$

Уравнение (47) по сравнению с исходным (38) имеет другой порядок, на асимптотической стадии эволюции неограниченного решения происходит своеобразное "вырождение" уравнения – его порядок понижается на единицу (аналогичное явление имеет место в некоторых граничных задачах для уравнения $u_t = u_{xx}$ [17]-[19]).

Асимптотика при $t \to \infty$ ограниченных решений уравнения (38) определяется временными закономерностями другого "усеченного" (но

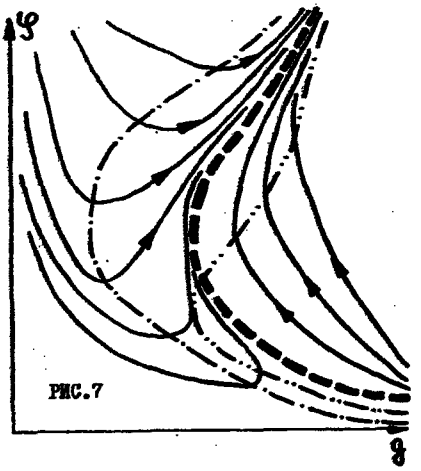

РИС.7

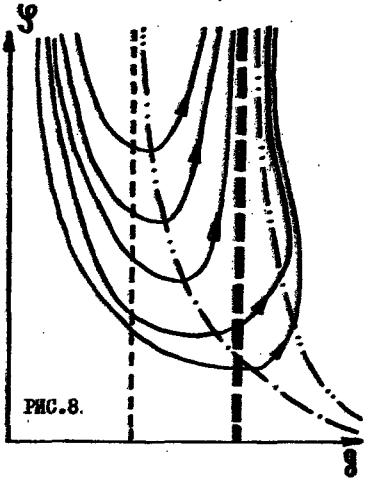

РИС.8.

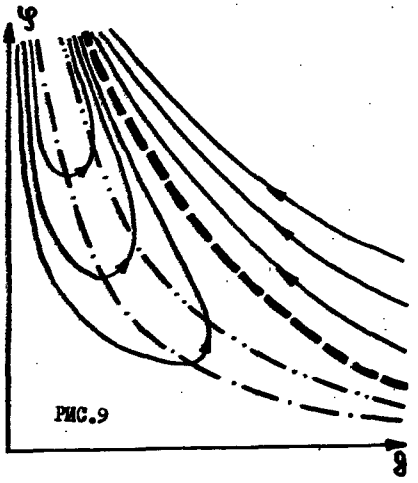

РИС.9

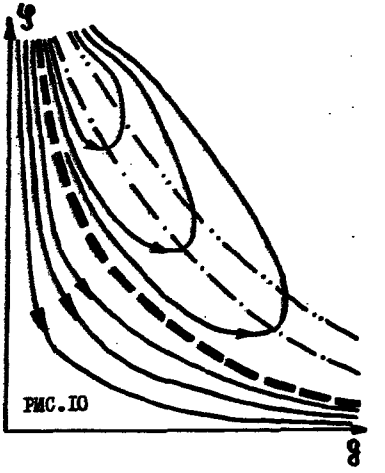

РИС.10

уже не "вырожденного") уравнения (см.(44))

$$u_t = u_{xx} - u_x^2/(1+u) + (1+u)\ln^{\beta}(1+u), \ \beta > 3 \ . \qquad (48)$$

В заключение заметим, что выбор уравнения (38) в качестве объекта исследования связан с нетривиальными свойствами его решений при различных β (при $\beta \in (1,2)$ неограниченные решения не локализованы, при $\beta \geq 2$ – локализованы). Представляет неоомненный интерес способ описания эволюции решений уравнения (38) с помощью автомодельных решений "усеченного" (совсем другого) уравнения.

Исследование более простого уравнения $u_t = u_{xx} + u^{\beta}$ не имеет этой нетривиальности – его неограниченные решения всегда локализованы, $u(T_0^-, x) = \infty$ всегда на множестве меры нуль, а асимптотика при $t \to T_0^-$ описывается временными закономерностями точных автомодельных решений этого уравнения:

$$u(t,x) = (T_0 - t)^{-(\beta-1)^{-1}} f(\xi) \ , \quad \xi = x(T_0 - t)^{-1/2} \ ,$$

$$f'' - \frac{1}{2} f' \xi - \frac{1}{\beta - 1} f + f^{\beta} = 0 \ , \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right) ,$$

$$f'(0) = 0 \ , \quad f(\infty) = 0 \ .$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука". 1967.

2. Sattinger D ,H .Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J., 1972, 21, 979-1000.

3. Pao C, V. Positive solution of a nonlinear boundary-value problem of parabolic type. J. Diff. Equat., 1976, 22, 145-163.

4. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М.,"Мир", 1968.

5. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 21.

6. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. О сравнении решений параболических уравнений. ДАН, 1979 (в печати).

7. Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Faculty Science, U. of Tokyo, 1966, 13, 109-124.

8. Fujita H. On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations. Proc. Symp. Pur. Math. 18. Nonlinear Functional Analysis, 1968, Ann. Math. Soc.

9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., "Мир", 1972.

10. Portnoy S. Transience and solvability of a non-linear diffusion equation. Annals of Probability, 1975, 3, 465-477.

11. Portnoy S. On solution to $u_t = \Delta u + u^2$ in two dimensions. J. Math. Anal. Appl., 1976, 55, 291-294.

12. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений. Ж.вычисл.мат.матем.физ., 1979, 19, N 6

13. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. ДАН, 1976, 227, № 2, 321-324.

14. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 106.

15. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. ДАН, 1977, 237, № 6, 1330-1333.

16. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Взаимодействие тепловых структур. Препринт ИПМ АН СССР, 1978. № 77.

17. Галактионов В.А. Локализация тепла в среде с постоянной теплопроводностью. Труды МФТИ, 1979 (в печати).

18. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами. ДАН, 1979. 247, № 2 , 349-353.

19. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью. Препринт ИПМ АН СССР, 1979, № 28.

20. Еленин Г.Г., Плохотников К.Э. Об одном способе качественного исследования квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником. Препринт ИПМ АН СССР, № 91, 1977.

21. Дородницын В.А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником и стоком. Препринт ИПМ АН СССР, № 57, 1979.

22. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic differential equations. Proc. Japan Acad., 1973, 49, 503-505.

23. Keller H. B., Cohen D. S. Some positone problems suggested by nonlinear heat generation. J. Math. Mech., 1967, 16, 1361-1376.

24. Fujita H. On the nonlinear equations $\Delta u + e^{u} = 0$ and $\partial v/\partial t = \Delta v + e^{v}$. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, 75, 132-135.

25. Sugitani S. On non-existence of global solutions for some nonlinear integral equations. Osaka J. Math., 1975, 12, 45-51.

26. Ewer J. P., Peletier L. A. On the asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equations. SIAM J. Appl. Math., 1975, 28, 43-53.

27. Fujita H. On the asymptotic stability of solutions of the equation $v_t = \Delta v + e^{v}$. Proc. Internat. Conf. on Funotional Analysis and Related Topics(Tokyo, 1969), pp. 252-259, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

28. Pao C. V. Nonexistence of global solutions and bifuroation analysis for a boundary-value problem of paraboli type. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 65, 2, 245-251.

29. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ, 1937, т.I, № 6, I-26.

30. Похожаев С.И. Вопросы отсутствия решений нелинейных краевых задач. Труды Всесоюзн.конф. по уравн. с частн. произв.,посв. 75-летию академика И.Г. Петровского, Москва, изд. МГУ, 1978, 200-203.

31. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. Препринт ИПМ АН СССР, № 29, 1979.

32. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. N и S режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. ПМТФ, 1977, I, 3-18.
33. Самарский А.А., Курдюмов С.П. Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС. Труды каф. волн. газ. дин., мехмат МГУ, № 3, 1979.
34. Курдюмов С.П. Локализация диффузионных процессов и возникновени структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением. Докторская диссертация, 1979.
35. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, вып. 9, 620.
36. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами. Препринт ИПМ АН СССР, № 16, 1979.
37. Самарский АА, Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. ЖВМ и МФ, 1963, 3, № 4, 702.
38. Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Плохотников К.Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой "кристалл". Препринт ИПМ АН СССР, № 22, 1977.
39. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. ДАН СССР, 1975, 223, № 6, 1344.