Труды Международного Конгресса Математиков
Хельсинки, 1978

Численное Решение Задач Математической Физики

А. А. Самарский

Доклад посвящен, в основном, вопросам общей теории разностных методов и построения разностных схем для линейных и нелинейных задач. Излагаются результаты, полученные в последние годы автором и его сотрудниками.

1. Устойчивость операторно-разностных схем. Основная теорема. Рассмотрим, следуя [1], двухслойную операторно-разностную схему

(1) $$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0,\ n=0,1,\ldots,\ \text{задан}\ y_0\in H,$$

с линейными ограниченными операторами A, B, зависящими от параметров $h, \tau>0$ и $t_n=n\tau$ и заданными в гильбертовом пространстве $H=H_h$. Теория устойчивости схем (1) разработана в [1]—[3]. Цель теории — найти необходимые и достаточные условия устойчивости и априорные оценки без предположений о структуре A и B. Схема (1) называется устойчивой в пространстве H_D со скалярным произведением $(y, v)_D=(Dy, v)$, где $D\colon H\to H$, $D^*=D>0$, если для решения задачи (1) и любых $y_0\in H$

(2) $$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leq (Dy_n, y_n)\| \text{ или } \|y_{n+1}\|_D \leq \|y_n\|_D.$$

Теорема 1. *Пусть A и B не зависят от n, $A^*=A>0$ и B^{-1} существует. Тогда для устойчивости схемы (1) в H_A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство $B_0=\mathrm{Re}\,B\geq 0.5\tau A$.*

2. Устойчивость в случае несамосопряженных операторов A и B. Требуется указать свойства операторов A и B схемы (1), устойчивой в каком-либо прострaнстве H_D. Показано, например, что при $A^*=-A$, $B^*=B>0$ или $A^*=A>0$, $B^*=-B$ схема (1) не является устойчивой ни в одной из норм H_D (абсолютно неустойчива).

Теорема 2 ([4]). *Пусть $A^*=A$, $B^*=B$ и хотя бы один из операторов A или B положителен. Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве H_D, то выполняется операторное неравенство $B\geqslant(\tau/2)A$.*

Требование самосопряженности A и B существенно (имеется пример устойчивой схемы с $A^*=A>0$, не удовлетворяющей условию $B\geqslant(\tau/2)A$).

Теорема 3 (А. В. Гулин). *Пусть $B=D+\tau AC$, $D^*=D>0$, существуют операторы C^{-1}, B^{-1}. Тогда устойчивость* (1) *в H_D эквивалентна выполнению операторного неравенства $A_0+\tau A^*((C-0.5E)D^{-1})_0A\geqslant 0$, где $A_0=\operatorname{Re} A=0.5(A^*+A)$, E — единичный оператор. Если $A^*=-A$, A^{-1} существует, то условие $DC+C^*D\geqslant D$ необходимо и достаточно для устойчивости в H_D.*

Результаты теории могут быть использованы, например, для исследования устойчивости двухпараметрического семейства схем

$$u_t+\sigma_1\hat{P}_{\bar{x}}+(1-\sigma_1)P_{\bar{x}}=0,\quad \frac{1}{c_0^2}P_t+\sigma_2\hat{u}_x+(1-\sigma_2)u_x=0$$

(обозначения см. [1]), аппроксимирующих систему уравнений акустики $\partial u/\partial t+\partial P/\partial x=0$, $(1/c_0^2)\partial P/\partial t+\partial u/\partial x=0$. Найдены операторы D и C, при которых $B=D+\tau AC$; условие устойчивости $DC+C^*D\geqslant D$ приводит к неулучшаемым условиям для σ_1, σ_2:

$$\sigma_1+\sigma_2\geqslant 1,\quad 1+4\gamma^2(\sigma_1-0.5)(\sigma_2-0.5)\geqslant 0,\quad \gamma=\tau c_0/h.$$

Устойчивость трехслойных схем с несамосопряженными операторами исследована в [4].

4. Итерационные методы. Общая теория итерационных методов для решения линейного операторного уравнения $Au=f$, $A\colon H\to H$ в гильбертовом пространстве H изложена в [1], [3]. Двухслойный (одношаговый) итерационный метод записывается в канонической форме

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f,\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \forall y_0\in H;\quad B\colon H\to H. \tag{3}$$

Если $A^*=A>0$, $B^*=B>0$ и заданы γ_1,γ_2 из условий $\gamma_1B\leqslant A\leqslant\gamma_2B$, то существует набор оптимальных параметров $\tau_1^*,\tau_2^*,\ldots,\tau_n^*$ при котором метод вычислительно устойчив и число итераций, гарантирующих точность $\varepsilon>0$, есть $n\geqslant n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon)=\ln(2/\varepsilon)/2\xi$, $\xi=\gamma_1/\gamma_2$. Оператор B выбирается из условия максимума ξ и минимума числа операций при определении y_{n+1} из (3). Выбирая матрицу B в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц (см. [1])

$$B=(E+\omega R_1)(E+\omega R_2),\quad R_1+R_2=A_1,\quad R_2^*=R_1,$$

получаем универсальный попеременно-треугольный метод (ПТМ) (А. А. Самарский, 1964; см. [1]). Так как $B^*=B>0$, то для ПТМ можно использовать оптимальный чебышевский набор $\{\tau_k^*\}$. Если предположить, что $A \geqslant \delta E$, $R_1R_2 \leqslant (\Delta/4)A$, $\delta, \Delta>0$, то выбирая $\omega=2/\sqrt{\delta\Delta}$ и параметры $\{\tau_k^*\}$, получим

$$n_0(\varepsilon) \approx \ln\frac{2}{\varepsilon}/(2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}),$$

где $\eta=\delta/\Delta$. В частности,

$$n_0(\varepsilon) \approx 0.28\ln\frac{2}{\varepsilon}/\sqrt{h}$$

в случае разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном p-мерном ($p \geqslant 2$) кубе на кубической сетке с шагом h.

А. Б. Кучеровым и Е. С. Николаевым в [5], [6] предложена модификация ПТМ:

$$B=(D+\omega R_1)D^{-1}(D+\omega R_2), \quad D^*=D>0; \quad R_1^*=R_2, \quad R_1+R_2=A.$$

Если $A \geqslant \delta D$, $\delta>0$, $R_1D^{-1}R_2 \leqslant (\Delta/4)A$, то при $\omega=2/\sqrt{\delta\Delta}$ и $\{\tau_k=\tau_k^*\}$ оценка для $n_0(\varepsilon)$ остается в силе. В качестве $D=(d_{ij})$ можно взять диагональную матрицу, выбирая d_{ij} из условия максимума $\eta=\delta/\Delta$. Модифицированный ПТМ оказался весьма эффективным при решении разностной задачи Дирихле в произвольной области для уравнения $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)=f$ с сильно меняющимся коэффициентом $k=k(x)$; так, в случае уравнения Пуассона число итераций практически совпадает с числом итераций для той же задачи в квадрате, сторона которого равна диаметру области. Для третьей краевой задачи и для уравнения со смешанными производными в прямоугольнике число итераций $n_0(\varepsilon) \approx ((1/\sqrt{h})\ln 2)/\varepsilon$.

5. Разностные методы для задач с негладкими решениями. Производные решений эллиптических задач могут быть неограничены в окрестностях точек смены типа краевых условий, разрыва краевых значений и правой части, в угловых точках линии разрыва коэффициентов, в многоугольнике в окрестностях вершин углов и т.д. Это приводит к понижению погрешности аппроксимации и точности схемы. Возникают две проблемы: 1) исследование известных разностных схем для указанных задач; 2) разработка новых более эффективных методов решения.

Лаасонен в [7] показал, что разностная задача Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области с углом $\nu\pi$ при $\nu>1$ в случае пятиточечной схемы и непрерывной граничной функции имеет погрешность $O(h^{2/\nu-2\varepsilon}/r^{1/\nu-\varepsilon})$, где h — шаг сетки, r — расстояние до вершины угла, $\varepsilon=\mathrm{const}>0$ — любое число, и $O(h^{1/\nu-2\varepsilon}/r^{1/\nu-\varepsilon})$ в случае разрывной граничной функции.

Цикл работ по исследованию классических схем для отыскания негладких решений выполнен В. Б. Андреевым и Е. Ю. Архиповой в [8], [9]. В [8] изучена задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y>0$ с граничным условием $u = \operatorname{sign} x$, имеющим разрыв в начале координат, и показано, что в случае пятиточечной схемы ее погрешность есть $O(h/r)$, если разрыв не в узле сетки, и $O(h^2/r^2)$, если разрыв попадает в узел сетки. Указан способ повышения точности путем сглаживания (немонотонного) граничной функции. Для смешанной задачи Неймана—Дирихле получена оценка погрешности $O(h/\sqrt{r})$ и указан способ исправления краевых условий, при котором погрешность есть $O(h^2/r^{3/2})$.

Разработка новых более эффективных методов отыскания негладких решений идет по трем направлениям: 1) использование обычных схем с выбором в окрестности особых точек специальных полярных сеток с измельчением (по степенному закону) шага по радиусу (Е. А. Волков [10]); 2) выделение особенности и использование метода конечных элементов, что приводит к нелокальным сеточным аппроксимациям (Фикс и Стренг, [11]); 3) построение на обычных шаблонах разностных схем, несущих особенность (И. В. Фрязинов [12]). В [12] уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, $u = u(x_1, x_2)$ аппроксимируется разностной схемой $(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = \varphi$ с переменными коэффициентами a_1, a_2, причем a_1 и a_2 отличны от 1, а φ — от нуля лишь в конечной окрестности особой точки. Главная часть разложения функции u в окрестности особой точки удовлетворяет разностному уравнению. Эта схема дает хорошую точность как в малой окрестности особой точки, так и вне нее. Аналогично строятся схемы для уравнения Пуассона в многоугольнике.

6. Векторные схемы ([13], [14]). Изучение И. В. Фрязиновым краевых задач для эллиптических уравнений общего вида в областях произвольной формы, а также экономичных схем для многомерных параболических уравнений привело к понятию векторной разностной схемы и существенно расширило класс разностных схем. Это расширение связано с построением схем в пространстве сеточных функций более сложной структуры, являющемся прямой суммой нескольких сеточных пространств. Пусть заданы сетки $w_h^{(s)}$, зависящие от h, и соответствующие пространства $H_h^{(s)}$ сеточных функций $y^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $H_h = H_h^{(1)} \oplus H_h^{(2)} \oplus \cdots \oplus H_h^{(m)}$ — прямая сумма пространств $H_h^{(s)}$ и вектор $\bar{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}) \in H_h$ с компонентами $y^{(s)} \in H_h^{(s)}$; $s = 1, 2, \ldots, m$.

Под векторной разностной схемой будем понимать операторное или операторно-разностное (разностное по аргументу $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$) уравнение с операторами в H_h (см. [14]). Формальный прием построения векторных схем состоит в следующем. Задаче для исходного уравнения ставится в соответствие эквивалентная корректная задача для системы дифференциальных уравнений: единственным ее решением является вектор-функция, все компоненты которой совпадают с решением исходной задачи. Аппроксимируя каждое из уравнений этой системы на соответствующей сетке $w_h^{(s)}$, приходим к векторной схеме. Если векторная схема корректна, то каждая ее компонента приближает соответствующую компоненту эквивалентной системы, а значит и исходной задачи. Семейство векторных схем существенно более широкое, чем семейство различных аппроксимаций исходной задачи для одного уравнения на одной сетке. Большое число векторных схем для эллиптических и параболических уравнений построено И. В. Фрязиновым. Сюда относятся, в частности, экономичные аддитивные схемы, обладающие аппроксимацией в суммарном смысле [1], для решения многомерных уравнений параболического типа.

В случае нерегулярных сеток разностные схемы для эллиптического уравнения

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) = -f(x), \quad x\in(x_1, x_2),$$

обычно строятся методом конечных элементов. Однако эти схемы (особенно простейшие из них) можно, как показано И. В. Фрязиновым, получить методом баланса (интегроинтерполяционным методом [1]). Они являются векторными схемами.

7. Вариационно-разностные схемы для уравнений газодинамики и магнитной гидродинамики (МГД). Для этих уравнений хорошей точностью обладают полностью консервативные схемы [15], для которых на сетке выполняется не только закон сохранения полной энергии, но и уравнения баланса внутренней и кинетической энергии, а также энергии электромагнитного поля. Для вывода полностью консервативных разностных схем в переменных Лагранжа эффективным оказался вариационный подход, основанный на полудискретном аналоге принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского [16], [17]. Получающиеся при этом вариационно-разностные схемы (ВРС) имеют второй порядок аппроксимации на гладких решениях, обладают полной консервативностью, легко алгоритмизируются. ВРС имеют ковариантную форму записи, так что при переходе от одной системы координат к другой изменяется только вид выражения объема лагранжевой ячейки как функции координат ее вершин. Это обеспечивает возможность расчета течений в системах координат, автоматически подстраивающихся к рассчитываемому потоку. ВРС позволяют ввести искусственную вязкость в ковариантной форме, не зависящей ни от числа измерений, ни от системы координат [18]. Для других часто встречающихся многомерных уравнений математической физики (теплопроводности, диффузии магнитного поля и т. д.) также могут быть получены разностные схемы, имеющие ковариантную форму записи, обладающие вторым порядком аппроксимации и сохраняющие свойство самосопряженности и знакоопределенности.

ВРС для многомерных МГД уравнений с теплопроводностью позволяет решить ряд модельных и прикладных задач в различных системах координат: о развитии неустойчивости Рэлея—Тейлора в несжимаемой жидкости [19], о магнитной кумуляции [20], о симметрии сферических мишеней при сжатии их лазерным излучением [21] и др.

Литература

1. А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, «Наука», Москва, 1971.

2. А. А. Самарский и А. В. Гулин, *Устойчивость разностных схем*, «Наука», Москва, 1973.

3. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, «Наука», Москва, 1977.

4. А. В. Гулин и А. А. Самарский, *О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости разностных схем*, Мат. Сб. **99 (141)** (1976) № 3, 299—330.

5. А. Б. Кучеров и Е. С. Николаев, *Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. (ЖВМ и МФ) **16** (1976), № 5, 1164—1174.

6. ——, *Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области*, ЖВМ и МФ **17** (1977), № 3, 664—675.

7. P. Laasonen, *On the discretization error of the Dirichlet problem in a plane region with corners*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI № **408** (1961).

8. В. Б. Андреев и Е. Ю. Архипова, *Об использовании разностных схем для решения уравнения Лапласа с разрывными граничными условиями 1-го рода*, ЖВМ и МФ **15** (1975), № 6, 1466—1481.

9. В. Б. Андреев, *Смешанная задача для сеточного уравнения Лапласа в полуплоскости*, Доклады АН СССР **234** (1977), № 5, 997—1000.

10. Е. А. Волков, *Метод регулярных составных сеток решения смашанной краевой задачи для уравнения Лапласа*, Доклады АН СССР **196** (1971), № 2, 266—269.

11. Г. Стренг и Дж. Фикс. *Теория метода конечных элементов*, «Мир», Москва, 1977.

12. И. В. Фрязинов, *Разностные схемы для уравнения Пуассона и уравнения теплопроводности в многоугольнике при различных типах краевых условий на различных частях границы*, Препринт ИПМ АН СССР, № 25 (1977).

13. ——, *Об одной разностной аппроксимации задач для эллиптического уравнения*, ЖВМ и МФ **16** (1976), № 1, 102—108.

14. А. А. Самарский и И. В. Фрязинов, *О разностных аппроксимациях задач математической физики*, Успехи мат. наук **31** (1976), № 6 (192), 167—197.

15. А. А. Самарский и Ю. П. Попов, *Разностные схемы газовой динамики*, «Наука», Москва, 1975.

16. В. М. Головизнин, А. А. Самарский и А. П. Фаворский, *Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике*, Доклады АН СССР **235** (1977), № 6, 1285—1288.

17. ——, *Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики*, Препринт ИПМ АН СССР, № 65 (1976).

18. ——, *Об искусственной вязкости и устойчивости разностных уравнений газовой динамики*, Препринт ИПМ АН СССР, № 70, (1976).

19. В. А. Гасилов, В. М. Головизнин, В. Ф. Тишкин и А. П. Фаворский, *Численное решение одной модельной задачи о релейтейлоровской неустойчивости*, Препринт ИПМ АН СССР, № 119 (1977).

20. Р. А. Волкова, В. М. Головизнин, Ф. Р. Улинич и А. П. Фаворский, *Численное моделирование обжатия магнитного поля кумулирующим лайнером*, Препринт ИПМ АН СССР, № 111 (1976).

21. П. П. Волосевич и др, *Деумерные эффекты при лазерном сжатии стеклянных оболочек*. Письма в ЖЭТФ **24** (1976), вып. 5, 283—286.

Институт Прикладной Математики им. М. В. Келдыш
Академии Наук СССР
Москва