



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

Е.Г. Гамалий, В.Б. Розанов, А.А. Самарский,
В.Ф. Тишкин, Н.Н. Тюрина, А.П. Фаворский.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТИЯ
СФЕРИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ МИШЕНЕЙ

Препринт № 117 за 1978г.

Москва.

А н н о т а ц и я

Проведено исследование гидродинамической устойчивости сжатия лазерных мишеней простейшего типа — газонаполненных оболочек, как на линейной, так и на нелинейной стадии развития возмущений. Обнаружен эффект смены фаз возмущения на стадии свободного полета, который может быть использован для стабилизации сжатия. Показано, что при уменьшении длины волны возмущения возникает нелинейное насыщение инкремента неустойчивости. Немонохроматичность начального спектра возмущений может привести к значительному изменению инкремента нелинейной стадии.

A b s t r a c t s

Hydrodynamic stability of laser pellet compression is investigated for case of gasfilled shells in both linear and nonlinear stages of disturbances. The phase change effect is obtained, which may be used for compression stabilization. Nonlinear saturation of instability increment while shortening of disturbance wavelength is shown. Nonlinear instability increment is significantly changed due to the multimode structure of disturbance spectrum.

ОГЛАВЛЕНИЕ /

	Стр.
Введение	4
§ 1. Приближенная дисперсионная кривая для Рэлей-Тэйлоровской неустойчивости	5
§ 2. Неустойчивость одномерного сферически-симметричного течения	7
§ 3. Неустойчивость границы оболочки, сжимающей газ	11
§ 4. Нагревание, сжатие и устойчивость стеклянной оболочечной мишени в осесимметричном случае (двумерный численный эксперимент)	15
§ 5. Обсуждение результатов и выводы	22
Список рисунков	25
Литература	26

Введение

Теоретические исследования возможности сжатия вещества под действием лазерного излучения показывают /1, 2/, что в условиях сферически симметричного сжатия в принципе могут быть достигнуты высокие плотности плазмы $10^3 \div 10^4$ г/см³. В действительности, неизбежные вариации интенсивности облучения, отклонения плотности материала мишени от однородной, искажения формы мишени приводят к отличию сжатия от сферически симметричного. Ясно, что допустимая величина начального возмущения поверхности сжимаемой сферы должна уменьшаться с ростом объемного сжатия. В самом деле, если потребовать, чтобы в конечном, сжатом состоянии амплитуда искажения поверхности "а" была много меньше ее радиуса $R_{\text{кон}}$, то тогда конечное состояние можно считать сферически симметричным.

$$a \ll R_{\text{кон}} = R_0 \left(\frac{R_{\text{кон}}^3}{R_0^3} \right)^{1/3} = R_0 \delta^{1/3} \quad (1)$$

Здесь $\delta = \frac{V_0}{V_k}$ - величина объемного сжатия.

Из (1) следует, что относительная амплитуда начального возмущения поверхности мишени должна быть тем меньше, чем большую степень сжатия мы хотим получить. Если же процесс сжатия неустойчив, то амплитуда возмущения, которую мы в оценке (1) полагали неизменной во времени, может возрасти за время сжатия. В конечном итоге, не только величина начальной амплитуды возмущения, но и в значительной степени скорость ее роста в процессе неустойчивости ограничивают величину максимально достижимого сжатия вещества.

Изучение природы и способов подавления гидродинамической неустойчивости сжатия лазерных мишеней и, следовательно, определение требований к симметрии облучения и формы мишени одна из центральных задач лазерного синтеза. Этим задачам посвящено большое число работ, использующих как линейное по величине амплитуды возмущения приближения /3, 4, 28, 29/, так и двумерные численные эксперименты /5, 6, 8, 30/.

Известно, что неустойчивость сжатия лазерных мишеней — это неустойчивость Рэлей-Тейлоровского типа /4, 7, 8/ развивающаяся на фоне интенсивных тепловых, гидродинамических и электромагнитных явлений в нестационарной плазме. Независимо от конкретной структуры мишени неустойчивость развивается по крайней мере на двух стадиях движения: в "короне", вблизи границы испарения или фронта тепловой волны; и во внутренних областях мишени на стадии торможения вещества.

Цель настоящей работы — дать единую картину развития неустойчивостей в лазерной мишени простейшего типа — стеклянной газонаполненной оболочке, как на линейной так и на нелинейной стадии развития возмущений. Работа является продолжением исследования устойчивости мишеней, изучаемых в современных экспериментах /10/, начатого в /9/. Приводятся результаты решения задач в линейном приближении и решения двумерной двухтемпературной гидродинамической задачи в приближении осевой симметрии. Проанализирована временная и пространственная история развития возмущений начиная от стадии испарения до максимального сжатия газа.

§ 1. Приближенная дисперсионная кривая для Рэлей-Тейлоровской неустойчивости

Зависимость инкремента от волнового числа возмущений можно получить, используя решение ряда задач о Рэлей-Тейлоровской неустойчивости в линейном приближении. В случае неустойчивости границы раздела двух несжимаемых жидкостей в поле постоянного ускорения /11/ инкремент неограниченно растет с увеличением волнового числа возмущения K .

$$\gamma^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}; \quad a = a_0 \exp \{ \gamma t \} \quad (2)$$

Здесь g — ускорение, направленное от более легкой к тяжелой жидкости; ρ_2 и ρ_1 — соответственно плотности тяжелой и легкой жидкости. В этой задаче отсутствуют вязкость и теплопроводность. Возмущений, растущие с инкрементом (2), называются тейлоровскими модами.

Введение вязкости приводит к "обрезанию" дисперсионной кривой $\gamma(K)$ со стороны больших K . В случае, когда $\rho_2 \gg \rho_1$, и кинематические вязкости обеих жидкостей одинаковы ($\nu = \frac{\mu_1}{\rho_1} = \frac{\mu_2}{\rho_2}$), Чандрасекаром /12/ получено выражение для γ_{\max} и границы "обрезания" K_V

$$\gamma_{\max} = 0.46 \left(\frac{g^2}{\nu} \right)^{1/3}, \quad K_V = 0.49 \left(\frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad (3)$$

Максимальный инкремент в данном случае достигается, когда возмущение давления компенсируется вязкими напряжениями.

Температурные неоднородности сглаживаются за счет электронной теплопроводности /3, 4, 7/. Время выравнивания возмущения температуры на характерной длине $\sim K^{-1}$ можно оценить из уравнения теплопроводности

$$\tau_T \sim \frac{\kappa}{M_i} \rho (\alpha_0 T^{5/2})^{-1} K^{-2} \quad (4)$$

Из (4) видно, что наиболее эффективное выравнивание возможно в условиях лазерной "короны" (ρ мало, T_e велико). Если $\tau_T \sim \gamma^{-1}$, то, используя (2) можно получить (при $\rho_2 \gg \rho_1$)

$$K_T \sim \left[\frac{\kappa}{M_i} \frac{\rho}{\alpha_0 T_e^{5/2}} \right]^{2/3} g^{1/3}; \quad \gamma \sim g^{2/3} \left[\frac{\kappa}{M_i} \frac{\rho}{\alpha_0 T_e^{5/2}} \right]^{1/3} \quad (5)$$

Температурные неоднородности с $K > K_T$ эффективно выравниваются теплопроводностью.

Если неустойчивость развивается в плазме с конечным градиентом плотности, то тогда максимальный инкремент определяется величиной градиента /12 + 14/

$$\gamma_{\max}^2 \sim g (\nabla \ln \rho) \quad (6)$$

Ясно, что максимальное волновое число возмущения в этом случае

$$K_V \sim \nabla \ln \rho$$

Приведенные выше выражения получены в линейном приближении. Например, для возмущения ускорения это означает, что

$$\frac{d^2 a}{dt^2} \ll g$$

Отсюда $\gamma^2 a \ll g$ или, используя (2) (при $\rho_2 \gg \rho_1$), получим условия применимости линейного приближения [11]

$$a k \ll 1 \quad (7)$$

Когда нарушается условие (7) и начинается нелинейная стадия, скорость роста амплитуды возмущения уменьшается по сравнению с экспоненциальной (2), возникает нелинейное взаимодействие разных мод возмущений.

Качественная зависимость $\gamma(k)$ с учетом указанных эффектов приведена на рис. 1.

Количественный анализ развития неустойчивости в мишени в полной мере может быть сделан лишь на основе двумерных численных экспериментов. Прежде чем перейти к изложению результатов таких экспериментов мы приведем решения более простых задач в линейном приближении, которые качественно описывают неустойчивость как в "короне" мишени, так и на стадии сжатия и торможения и полезны для интерпретации численных расчетов.

§ 2. Неустойчивость одномерного сферически-симметричного течения

Рассмотрим задачу об устойчивости течения, описываемого уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{oz}}{\partial t} + v_{oz} \frac{\partial v_{oz}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v_{oz} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_0}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z^2 v_{oz} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\vec{v} = \{v_{oz}, 0, 0\}; \quad \rho_0, v_{oz}, p_0 - \text{функции } z, t$$

Пусть все параметры испытывают малые возмущения

$$\begin{aligned} v_z &= v_{oz} + u(t, z, \theta, \varphi); \quad |v_{oz}| \gg |u| \\ v_\theta &= v(t, z, \theta, \varphi); \\ v_\varphi &= w(t, z, \theta, \varphi); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(t, z, \theta, \varphi); \quad \rho_0 \gg \delta\rho \quad (9)$$

$$P = P_0 + p(t, z, \theta, \varphi); \quad P_0 \gg p$$

Возмущение испытывает и граница раздела двух сред

$$R = R_0 + \Delta(t, z, \theta, \varphi);$$

Произвольное возмущение разлагаем в ряд по сферическим гармоникам (разложение по нормальным модам /12, 16/)

$$\{u, v, w, \delta\rho, p\} \sim \sum_n f_n(z, t) Y_n(\theta, \varphi) \quad (10)$$

где $Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)$

С учетом (8), (9) линеаризация трехмерных уравнений гидродинамики в сферических координатах приводит к следующей системе линейных уравнений

для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\delta\rho}{\rho_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v_{0z} v}{z} &= - \frac{1}{\rho_0 z} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v_{0z} w}{z} &= - \frac{1}{\rho_0 z \sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial \delta\rho}{\partial z} + \frac{\delta\rho}{z^2} \frac{\partial z' v_{0z}}{\partial z} + u \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{v} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) должна быть дополнена еще одним уравнением. Будем считать что поля скоростей невозмущенной и возмущенной жидкости являются потенциальными.

$$\operatorname{div} \bar{v}_0 = \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} z^2 v_{0z} = 0; \quad v_{0z} = - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \quad (12)$$

Аналогично

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0; \quad \bar{v} = -\nabla \psi; \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (13)$$

Условие (13) приводит к выражению для потенциала возмущений скорости в

сферическом случае /16/

$$\Psi = \sum_n (A_n(t) z^n + B_n(t) z^{-(n+1)}) Y_n(\theta, \varphi) \quad (14)$$

Используя (10), (12), (13) и (14) систему (11) можно привести к следующим уравнениям для коэффициентов разложения (10) по сферическим гармоникам

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial v_{02}}{\partial z} + v_{02} \frac{\partial u_n}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_n}{\partial z} + \frac{\delta \rho_n}{\rho_0^2} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z^2 u_n}{\partial z} \right) + v_{02} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z^2 u_n}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} n(n+1) p_n \\ \frac{\partial \delta \rho_n}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial \delta \rho_n}{\partial z} + u_n \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (14) второе уравнение из (15) можно привести к виду

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} p_n \quad (16)$$

Рассмотрим с помощью уравнений (15) некоторые частные случаи.

Пусть капля легкой жидкости радиусом r_0 погружена в тяжелую жидкость^{*}). Обозначим для удобства $q = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial z}$. Будем искать временное решение в виде $u_n \sim \exp\{\gamma t\}$. Тогда система (15) сведется к одному уравнению, являющемуся обобщением уравнения Чандрасекара /12/ на сферический случай

$$\rho_0 \gamma u_n = \frac{\gamma}{n(n+1)} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} z^2 u_n + \frac{u_n}{\gamma} q \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (17)$$

Выберем потенциал (14) в каждой из жидкостей таким образом, чтобы в центре сферы и на бесконечности он обращался в нуль, а на границе раздела возмущение скорости было бы непрерывным.

Интегрируя (17) по бесконечно малому отрезку радиуса, включающему границу раздела, получим выражение для инкремента

^{*}) Близкая к рассматриваемой постановке этой задачи рассматривалась в /26/.

$$\gamma^2 = g \frac{n+1}{z_0} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\left[\rho_2 + \frac{n+1}{n} \rho_1 \right]} \quad (18)$$

которое является обобщением результата Тэйлора /11/ на сферический случай.

Применим теперь уравнения (15) для описания неустойчивости в "коро-не". Известно /7/, что ширина зоны неустойчивости в этом случае значительно меньше радиуса, поэтому здесь оправдано плоское приближение. Тогда второе уравнение из системы (15) примет вид

$$P_n = - \frac{\rho_0}{K^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad (19)$$

K - волновое число.

Для упрощения уравнений (15) и (19) удобно перейти в систему координат, движущуюся со скоростью v_{0z} .

$$z' = z - \int_0^t v_{0z} dt; \quad t' = t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_{0z} \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 - \int_0^t \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} dt \quad (20)$$

Предположим, что $\int_0^t \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} dt \ll 1$. Тогда вместо (17) мы получим уравнение

$$\rho_0 \left(\gamma + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \right) u_n = \frac{\gamma}{K^2} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{u_n \frac{\partial \rho_0}{\partial z} g}{\gamma + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z}} \quad (21)$$

Откуда при $K \rightarrow \infty$ имеем

$$\gamma = \pm \left[g \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} \right]^{1/2} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \quad (22)$$

В (22) малый по сравнению с первым членом градиент скорости оставлен для того, чтобы указать на тенденцию: наличие положительного градиента скорости является стабилизирующим фактором (конвективная стабилизация). Из (22) следует также важный вывод: течение неустойчиво, если ускорение и градиент плотности имеют одинаковый знак (или градиенты давления и плотности противоположный). Выражение (22) справедливо, если ширина

зоны неустойчивости $\Delta z \ll \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^{-1}$ много меньше характерного размера градиента плотности. В противоположном случае максимальное волновое число есть $K_{\max} \sim (\Delta z)^{-1}$, а $\gamma_{\max}^2 \sim g (\Delta z)^{-1}$. В случае скачка плотности, интегрируя по бесконечно малому участку радиуса, содержащему скачок, получаем следующее выражение для инкремента

$$\gamma = \pm \left[\frac{K g (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_{0z}}{\partial z}$$

Таким образом, при наличии положительного градиента скорости, инкремент роста гармоник с любым волновым числом оказывается меньше, чем у Тейлоровских мод. Как показывает сравнение с результатами решения линеаризованной задачи устойчивости с учетом вязкости и теплопроводности /17/ с решениями для изотермического /14/ и адиабатического случая /13/, а также с двумерными расчетами /9/, сделанные выше выводы о признаке устойчивости коротковолновых возмущений справедливы в широком диапазоне длин волн, что позволяет использовать выражение для инкремента в виде (22) для анализа сложных течений.

§ 3. Неустойчивость границы оболочки, сжимающей газ

Рассмотрим задачу об устойчивости границы сферического пузырька с газом, расположенного в безграничной несжимаемой жидкости. Невозмущенное движение представляет собой сжатие газа под действием сферически симметричного давления, убывающего на бесконечности так, что полная энергия конечна.

Закон движения границы газа и жидкости можно получить из закона сохранения энергии в предположении, что кинетическая энергия газа много меньше кинетической энергии жидкости и внутренней энергии газа, а сжатие газа происходит адиабатически.

Из этого условия легко получить ^{*})

*) Изложенные предположения о характере невозмущенного движения и решение (23) принадлежит Е.И. Забабахину (см. ссылки /18/).

$$v_0 = \frac{dR}{dt} = \left(\frac{E_0}{2\pi\rho_0} \right)^{1/2} \frac{(R^2 - R_{\min}^2)^{1/2}}{R^{5/2}} \quad (23)$$

Здесь E_0 — полная энергия; R , R_{\min} — соответственно текущий и минимальный радиус полости; ρ_0 — плотность жидкости.

Развитие возмущений в несжимаемой жидкости определяется уравнениями (15). Для решения задачи с заключенным внутри газом, вообще говоря, система (15) должна быть дополнена уравнениями, описывающими возмущения в газе, и соответствующими граничными условиями. Следует учесть, что на начальной стадии газ является малоплотным и не оказывает влияния на сжатие, а на конечной стадии газ нагрет до высокой температуры и выравнивание возмущений в теплопроводном газе происходит с гораздо большей скоростью, чем в окружающей среде. Поэтому представляется разумным предположение, что возмущения в газе равны нулю, а влияние газа на развитие возмущений границы можно учесть в граничных условиях.

Первое граничное условие есть условие непрерывности скорости на границе раздела

$$u_n = - \left. \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right|_R = \left(\frac{d\Delta_n}{dt} + \Delta_n \frac{\partial v_0}{\partial z} \right)_R \quad (24)$$

Δ_n — коэффициент в разложении возмущения границы по сферическим гармоникам. Второе граничное условие получается из равенства давлений в жидкости и газе на границе (возмущение давления в газе равно нулю)

$$p_n \Big|_R = (\rho_0 - \rho_2) \Delta_n \frac{d v_0}{dt} \Big|_R; \quad \rho_2 = \rho_{02} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (25)$$

Физический смысл условия (25) заключается в том, что возмущение давления p_n уравнивается разницей гидростатических давлений жидкости и газа в поле ускорения $\frac{d v_0}{dt}$.

p_n определяется из (16), нужно только перейти в систему координат, движущуюся вместе с границей со скоростью v_0 .

$$p_n = \rho_0 \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \quad (26)$$

Потенциал возмущения скорости из (14) ищется в виде

$$\psi_n = B_n(t) r^{-(n+1)} \quad (27)$$

чтобы удовлетворить условиям на бесконечности ($\Delta_n \rightarrow 0$; $\psi_n \rightarrow 0$).

Тогда из (24) - (27) можно получить уравнение для амплитуды возмущения границы /18/

$$R \frac{d^2 \Delta_n}{dt^2} + 3v_0 \frac{d \Delta_n}{dt} + \left[2 - \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0} (n+1) \right] \frac{dv_0}{dt} \Delta_n = 0 \quad (28)$$

Уравнение (28) является дифференциальным уравнением в обыкновенных производных и легко может быть проинтегрировано численно для произвольного закона движения $v_0(R)$. Мы приведем некоторые аналитические решения.

1. В случае $\rho_0 \gg \rho_2$ и $n = 1$ ($Y_1 = A_0 + (A_1 \cos \varphi + B_{11} \sin \varphi) \cdot \frac{\sin \theta}{2}$) имеем для произвольного $v_0(R)$

$$\Delta_1 = \Delta_1(R_0) + \left(\frac{d \Delta_1}{dt} \right)_0 \int \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 dt \quad (29)$$

Таким образом, амплитуда возмущения первой гармоники растет с увеличением степени сжатия.

2. Если $\rho_0 \gg \rho_2$ и газ не оказывает влияния на движение жидкости, то тогда закон движения границы (23) совпадает с решением задачи Рэлея /19/ о захлопывании сферической полости в несжимаемой жидкости.

$$v_0 = \left[\frac{E_0}{2\pi \rho_0} \right]^{1/2} R^{-3/2} \quad (30)$$

Решение в этом случае есть ($n \geq 2$)

$$\Delta_n(R) = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/4} \left\{ \frac{\Delta_n'(R_0) \cdot R_0 + \frac{1}{4} \Delta_n(R_0)}{[3/2(n-1) - 1/8]^{1/2}} \sin(\varphi_0 - \varphi) + \Delta_n(R_0) \cos(\varphi_0 - \varphi) \right\} \quad (31)$$

R_0 ; $\Delta_n(R_0)$; $\Delta_n'(R_0) = \left. \frac{d \Delta_n}{dR} \right|_{R_0}$ - радиус границы полости, амплитуда возмущения и ее производная в начальный момент времени,

$\varphi = [3/2(n-1) - 1/8]^{1/2} \ln R$. Т.к. $R = R(t)$, то в (28) сделана замена $t \rightarrow R$.

Абсолютная величина амплитуды по (31) слабо растет (как $R^{-1/2}$), а фаза меняется по мере сжатия. Если $\Delta'_n(R_0) = 0$, то в моменты времени, определяемые из соотношения

$$(2K+1)\frac{\pi}{2} = \left[\frac{3}{2}(n-1) - \frac{1}{8} \right]^{1/2} \ln \frac{R_0}{R_K(t)}; \quad K = 0, 1, 2 \quad (32)$$

амплитуда минимальна и ее значение есть

$$\left[\Delta_n(R_K) \right]_{\min} = \left(\frac{R_0}{R_K} \right)^{1/4} \frac{\Delta_n(R_0)}{4 \left[\frac{3}{2}(n-1) - \frac{1}{8} \right]^{1/2}} \quad (33)$$

Например, при $n = 10$ амплитуда уменьшается по сравнению с начальной почти в 10 раз даже при тысячекратном объемном сжатии ($\frac{R_0}{R_K} = 10$).

3. Решение для произвольного закона движения можно получить и для коротковолновых возмущений ($n \gg 1$). При ускоренном к центру движении ($\frac{dV_0}{dt} < 0$ или $\frac{d \ln V_0}{d \ln R} < 0$, $\rho_0 > \rho_2$) это решение есть

$$\Delta_n = \Delta_n(R_0) \frac{R_0}{R} \left[\frac{V_0(R_0)}{V_0} \right]^{1/2} \left[\frac{d \ln V_0}{d \ln R} \right]_R^{1/2} \left[\frac{d \ln V_0}{d \ln R} \right]_R^{-1/2} \cos \left\{ n^{1/2} \int_{R_0}^R \left[- \frac{(\rho_0 - \rho_2)}{\rho_0} \frac{d \ln V}{d \ln R} \right]^{1/2} \frac{dR}{R} \right\} \quad (34)$$

При $V_0 \sim R^{-3/2}$ и $n \gg 1$ (34) совпадает с (31). Как только более легкий газ начинает тормозить жидкость ($\frac{dV}{dt} > 0$; $\frac{d \ln V}{d \ln R} > 0$), рост возмущений становится экспоненциальным. Если сделать обратный переход к переменной t , то мы увидим, что это неустойчивость Рэлея-Тейлора

$$\Delta_n \sim \exp \left\{ \int_0^t \left[\frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0} \frac{n}{R} \left| \frac{dV}{dt} \right| \right]^{1/2} dt \right\} \quad (35)$$

Итак, развитие возмущений границы сжимающегося газового пузырька в несжимаемой жидкости проходит две стадии. При ускоренном движении граница испытывает квазипериодические колебания с переменной фазой и слабо возрастающей амплитудой. После начала торможения рост амплитуды становится экспоненциальным. Основное увеличение амплитуды происходит на второй стадии. В принципе, эффект смены фазы и уменьшения амплитуды на первой стадии может быть использован для стабилизации сжатия. Рост моды с

максимальной амплитудой в спектре начальных возмущений может быть значительно уменьшен, если режим сжатия подобран таким образом, что минимум амплитуды (33) достигается для этой моды к моменту начала торможения.

§ 4. Нагревание, сжатие и устойчивость стеклянной оболочечной мишени в осесимметричном случае (двумерный численный эксперимент)

В этом разделе приведены результаты исследований по нагреванию, сжатию и разлету сферической мишени, полученные с помощью численных решений двумерных уравнений двухтемпературной одножидкостной гидродинамики и электронной теплопроводности в приближении осевой симметрии. Исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \bar{v} ; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla)$$

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -q \operatorname{grad} (P_e + P_i)$$

(36)

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} + P_e \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{Q}{\rho} - C_1 \rho^2 T_e^{3/2} - \operatorname{div} \bar{q} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\alpha_e T_e \nabla T_e)$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} + P_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{Q}{\rho}$$

\bar{q} - поток лазерного излучения

$Q = C_0 \rho^2 \frac{T_e - T_i}{T_e^{3/2}}$ - обмен энергией между электронами и ионами в форме

Ландау-Спитцера /20/.

$P_e, \varepsilon_e ; P_i, \varepsilon_i$ - соответственно давление и удельная энергия электронов и ионов.

На оси симметрии ($\theta = 0 ; \theta = \pi$) ставится следующее граничное условие

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial T_{e,i}}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial P_{e,i}}{\partial \theta} = 0$$

Форма внешней поверхности и границ между слоями мишени является функцией угла $R = R(\theta)$. Для изучения различных длин волн возмущения формы

эта функция выбиралась в виде

$$R(\theta) = R_0 + \sum_n \frac{a_n}{R_0} \cos n\theta \quad (37)$$

Лазерный поток также является функцией угла

$$q(\theta, t) = q_0(t) + \sum_n \frac{q_n}{q_0} \cos n\theta$$

Лазерное излучение поглощается на критической плотности, теплопроводность Спитцеровская /20/. В большей части расчетов уравнения состояния плазмы — идеальный газ.

В основу методики численного решения положены полностью консервативные разностные схемы, позволяющие перенести основные законы сохранения, справедливые для исходной системы дифференциальных уравнений, на ее дискретные аналоги /21, 22, 23/. Использование подвижных криволинейных сеток с сохранением одного из семейств лагранжевых линий позволяет проследить развитие неустойчивости границ вплоть до существенно нелинейной стадии движения.

Проверка методики на системе текстов показала, что численные решения качественно и количественно правильно воспроизводят динамику развития возмущений.

В частности, в задаче об устойчивости поверхности тонкого слоя жидкости под действием силы тяжести получено вполне удовлетворительное согласие численного и аналитического решений /24/. Достаточно хорошее совпадение численного и аналитического решений имеет место как на линейной стадии (рис. 2а), так и на нелинейной, когда скорость проваливающегося "пика" в жидкости со временем выходит на асимптотический режим свободного падения с ускорением силы тяжести (рис. 2б).

Исследуемые мишени представляют собой стеклянные микросферы, заполненные газом с малым начальным давлением ($P \approx 0,5$ атм.). На примере таких мишеней легче изучить основные физические явления, связанные с неустойчивостью. На рис. 3 представлены типичные параметры мишени и лазерного импульса в одном из расчетов, а также диаграммы движения внут-

ренной границы оболочки и границы испарения, полученные в одномерном расчете. На рисунке хорошо видны фазы ускорения и торможения оболочки, с которыми связаны периоды неустойчивости. Ниже мы проанализируем динамику развития возмущений разного типа, с разной длиной волны и амплитудой в процессе сжатия мишени.

а) Неустойчивость вблизи границы испарения

Распределение плазменных параметров по пространству вблизи границы испарения формулируется при взаимодействии волны разрежения, возникающей за фронтом идущей к центру мишени ударной волны, с тепловой волной, распространяющейся из зоны поглощения лазерного потока вблизи критической плотности. Характерные пространственные распределения плотности, скорости, электронной температуры и давления плазмы в "короне", полученные в одномерном расчете, представлены на рис. 4 для нескольких моментов времени. Видно, что граница испарения и максимальный градиент плотности расположены в плазме, движущейся к центру мишени с дозвуковой*) скоростью. Ясно, что только возмущения из области дозвукового течения могут оказать влияние на сжатие. Возмущения, попавшие в сверхзвуковой поток, уносятся от мишени и не представляют опасности для сжатия центра. Для качественного анализа устойчивости движения в "короне" полезно привлечь приведенные выше (§2) решения линеаризованной задачи. Используя (22), можно увидеть, что при $R > R_{\text{крит}}$ течение устойчиво ($\gamma < 0$). Зона неустойчивости ($\gamma > 0$) расположена между максимумами давления и плотности и является для рассматриваемой мишени весьма узкой $0,2 \div 0,3$ мкм. Заметим, что ширина этой зоны меняется со временем. Начиная с момента, когда внешняя граница перестает ускоряться к центру (после выхода на нее отраженной от центра мишени ударной волны), движение в "короне" становится устойчивым ($\gamma < 0$, см. рис. 4).

*) Сравнивается скорость течения и местная изотермическая скорость звука в веществе $v_s = \sqrt{\frac{\gamma}{M} (T_e + T_i)}$.

Количественную картину развития неустойчивости в "короне" можно построить по результатам двумерного численного эксперимента, проследив за движением лагранжевой части (в симметричном случае — это тонкий сферический слой), которая вначале вместе с неиспаренной частью оболочки двигалась к центру мишени, затем была захвачена тепловой волной, испарена и вынесена в разлетающуюся "кору". На рис. 5 приведена усредненная по углу траектория движения такой частицы и относительная амплитуда возмущения на ней $\frac{R_{max} - R_{min}}{R_{max} + R_{min}}$ из расчета, где в начальный момент времени на внешней и внутренней границах оболочки заданы возмущения одинаковой амплитуды (0,01 от начальной толщины оболочки) и длины волны ($N = 10$). На стадии, когда частица находится в неиспаренной части оболочки, ее движение устойчиво, что согласуется с предсказанием линейной теории ($\gamma < 0$). По мере того, как тепловая волна охватывает частицу, скорость движения ее к центру падает. На этой фазе движения частица находится в зоне неустойчивости (см. рис. 4). Скорость роста возмущений резко возрастает с возникновением замедления и начинает заметно уменьшаться по мере увеличения скорости разлета. Рост возмущений практически прекращается в области сверхзвукового течения. При этом средний инкремент оказывается несколько меньше, чем у Тэйлоровских мод, что является следствием конвективной стабилизации. Тем не менее амплитуда возмущения на лагранжевой частице, судьбу которой вблизи границы испарения мы проследили, возрастает более, чем в 10^2 раз. Возмущения максимальной амплитуды сосредоточены вблизи границы испарения (или зона неустойчивости). К моменту достижения максимальной амплитуды возмущения в "короне" амплитуда возмущения на внутренней границе оболочки всего лишь в несколько раз превышает начальную и много меньше, чем в "короне". Таким образом, возмущения из "короны" не успевают проникнуть за время развития неустойчивости на внутреннюю границу. Это хорошо видно по искривлению лагранжевых линий в разных областях оболочки (рис. 6). Для того, чтобы выяснить

механизм и скорость распространения возмущений по оболочке, был выполнен расчет, в котором начальные возмущения были заданы на внешней границе оболочки. Сравнение с предыдущими результатами показывает, что амплитуда возмущения на внутренней границе к моменту начала торможения в обоих случаях одинакова. Это означает, что возмущения переносятся с внешней границы на внутреннюю первой ударной волной, возникающей при включении лазерного импульса^{*}). Последующее влияние "короны" на внутреннюю границу может передаваться звуковыми возмущениями, но скорость звука в оболочке мала, так как температура в оболочке незначительна — порядка нескольких электронвольт и влияние звукового переноса мало. Итак, инкремент неустойчивости в "короне" несколько меньше чем в Тэйлоровских мод за счет конвективного выноса плазмы из зоны неустойчивости. Кроме того инкремент определяется не ускорением оболочки как целого, а локальным ускорением гидродинамической частицы, определяемым испарением и разлетом.

б) Неустойчивость на внутренней границе оболочки

Как следует из двумерного расчета на стадии свободного полета (до начала торможения) возникают почти периодические колебания внутренней границы оболочки, фаза которых зависит от времени, а амплитуда растет незначительно. Эти результаты находятся в хорошем согласии с аналитическим решением, приведенным выше (§ 3). Такие колебания связаны с адиабатическим сокращением поверхности оболочки при сжатии (см. рис. 7).

Неустойчивость на внутренней границе возникает, когда заключенный внутри газ начинает тормозить оболочку. Относительная амплитуда возмущений, соответствующих разным номерам гармоник, как функция времени, представлена на рис. 8. Видно, что экспоненциальный рост начинается с момента

^{*}) Это физически очевидное утверждение содержалось также в работе /8/, где исследовались возмущения плотности оболочки и потока.

начала торможения. Сравнение инкремента с вычисленным по формуле (35) показывает, что низкие гармоники с $n \leq 10$ растут с примерно той же скоростью, что и Тэйлоровские моды. При $n > 12$ скорость роста амплитуды возмущения существенно уменьшается, а для $n \geq 20$ выходит на насыщение. Это обстоятельство особенно хорошо может быть выявлено, если относительную амплитуду возмущения представить, как функцию номера гармоники, взяв время в качестве параметра (рис. 9). Анализ показывает, что насыщение инкремента с увеличением номера гармоники связано с нелинейными эффектами. В самом деле, условие линейности ($\Delta \cdot K \ll 1$), которое для $n = 10$ нарушается лишь к моменту максимального сжатия, для $n \geq 15$ не выполняется уже на ранних стадиях движения. Таким образом, для оболочечных мишеней с отношением начального радиуса оболочки к ее толщине ~ 20 максимальная скорость роста возмущений достигается при $n \approx 15$ и практически не растет с увеличением номера гармоники при монохроматическом спектре начальных возмущений.

Весьма интересным и важным является вопрос о взаимодействии различных гармоник на нелинейной стадии, поскольку реальный спектр начальных возмущений не является монохроматическим. Здесь мы приведем лишь предварительные результаты исследования нелинейного взаимодействия мод при неустойчивости в "короне" мишени. Сравнение результатов расчетов с начальным моносpekтром, содержащим 24 гармонику, с аналогичным расчетом для 60 гармоники показывает, что в обоих случаях реализуется нелинейное насыщение роста амплитуды со временем. В случае начального спектра, содержащего обе гармоники, результат не является суперпозицией результатов для отдельных гармоник. Более того нелинейное взаимодействие мод приводит к проникновению возмущения на внутреннюю границу до начала ее торможения. Этот результат показывает, что нельзя переносить данные, полученные для отдельных гармоник, на случай сложных начальных спектров возмущений.

Изучение возмущений лазерного потока различной длины волны и амплитуды показало, что эти возмущения приводят к меньшим искажениям внутренней границы, чем соответствующая (той же длины волны и относительной амплитуды) асимметрия формы оболочки. Очевидным симметризирующим фактором здесь является угловое теплопроводное выравнивание температурной неоднородности в "короне". Так сравнение максимальной амплитуды возмущения внутренней границы на момент максимального сжатия показывает, что возмущения формы приводят к вдвое большим конечным амплитудам, чем неоднородность потока (начальная относительная амплитуда возмущения 0,01, длина волны одинакова, рис. 10). Этот эффект известен [3, 4, 8, 9].

в) Влияние неустойчивости на конечное состояние
оболочки и газа

Относительная толщина неиспаренной части оболочки в симметричном случае возрастает к моменту максимального сжатия примерно в 8 раз. Однако и амплитуда возмущения как на внутренней границе оболочки, так и в "короне" в этот момент (при начальной относительной амплитуде 0,01) сравнима с толщиной оболочки. Однако это обстоятельство еще не свидетельствует о разрыве оболочки. В самом деле, анализ состояния оболочки на момент максимального сжатия показывает (рис. 11), что лагранжевые линии, соответствующие середине неиспаренного слоя, возмущены значительно слабее, чем периферийные. Плотность центрального слоя достаточно высока и близка к средней плотности в сферическом случае. Таким образом, значительная величина искажения внутренней границы свидетельствует о том, что часть материала оболочки проникла во внутреннюю полость. Это может привести к перемешиванию части газа вблизи границы, с материалом оболочки, снижению парциальной плотности дейтерия и температуры в перемешанной массе газа и, следовательно, уменьшения нейтронного выхода термоядерной реакции. Сравнение средних по возмущенному несферическому объему плотности и температуры внутреннего газа с соответствующими величинами

для симметричного случая показывает, что это отличие не слишком велико ($n = 12$).

$$T_{неесимм} \approx 0.8 T_{симм}; \quad \rho_{неесимм} \approx 0.65 \rho_{симм}$$

Однако разница в нейтронном выходе может быть гораздо существенней.

Так как $N \sim \rho T^m$, то

$$\frac{N_{неесимм}}{N_{симм}} \sim 0.65 \cdot (0.8)^m$$

Особенно большой эта разница может быть при $T \lesssim 1$ кэВ, где $m \sim (5 \div 6)$. Таким образом, даже малые относительные возмущения формы оболочки 0,01 могут привести к значительному отклонению ряда параметров мишени (плотность и форма оболочки, нейтронный выход) от сферически симметричных из-за развития неустойчивости.

§ 5. Обсуждение результатов и выводы

Рассмотренные в данной работе задачи позволяют сделать ряд общих выводов относительно развития неустойчивости в лазерных мишенях. Ниже мы сформулируем эти выводы и сравним их с результатами опубликованных работ.

1. Инкремент роста возмущений в "короне" меньше инкремента Тэйлоровских мод из-за стабилизирующего влияния конвективного выноса плазмы из зоны неустойчивости и углового теплопроводного выравнивания. Повидимому, это утверждение является сейчас общепринятым /3, 4, 6, 7, 25/. Анализ, проведенный в данной работе, согласуется с высказанными ранее качественными соображениями /7/ и результатами многих численных расчетов.

2. Перенос возмущения из "короны" на внутреннюю поверхность мишени осуществляется, в основном, первой ударной волной. Аналогичное утверждение было сделано в /8/ для случая возмущений плотности оболочки.

3. На стадии свободного полета внутренняя граница оболочки испытывает почти периодические колебания с фазой, зависящей от закона движения

оболочки, а амплитуда практически не растёт (при $\frac{R_0}{R} = 10; \Delta \approx 2 \cdot \Delta_0$). Это обстоятельство позволяет, в принципе, путем специального выбора закона движения уменьшить рост наиболее опасной моды в спектре начальных возмущений.

Приведенные результаты следуют как из аналитического решения, так и из двумерных экспериментов и ранее не приводились. Эти результаты качественно согласуются с данными численных расчетов /27/, в которых, однако, подробный анализ этой стадии не проводился.

4. Рэлей-Тэйлоровская неустойчивость на внутренней границе, связанная, в основном, со значительными перепадом плотностей оболочки и газа, приводит к существенному искажению формы оболочки на момент максимального сжатия и отличия параметров от полученных в симметричном случае даже для малых ($\sim 0,01$) относительных амплитуд возмущения формы оболочки. Основной рост возмущений происходит на стадии торможения оболочки. Эти данные также находятся в качественном согласии с результатами работ /5, 6, 27/.

Нужно отметить, что в численных расчетах /8/ при потоках $\bar{q} = 10^{14} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$ наблюдался линейным по времени рост возмущений в течение всего времени движения, что отличается от выводов пунктов 3, 4.

5. При увеличении номера гармоники возмущения наступает нелинейное насыщение амплитуды при монохроматическом начальном спектре возмущений. Для рассмотренного типа мишеней с отношением начального радиуса к толщине оболочки ~ 20 это насыщение наступает при $h \approx 15$. Однако при начальном спектре, содержащем две высокочастотные составляющие ($N = 24$ и $N = 60$), нелинейное взаимодействие приводит к увеличению скорости роста и распространению возмущений и искажений внутренней границы еще до периода торможения. Изучение этого эффекта будет продолжено.

Когда настоящая статья была закончена, нам стали известны результаты работы /25/, в которой также обнаружено в численном эксперименте нелинейное насыщение и затем уменьшение инкремента с уменьшением длины

волны монохроматического начального возмущения, что качественно согласуется с результатами данной работы.

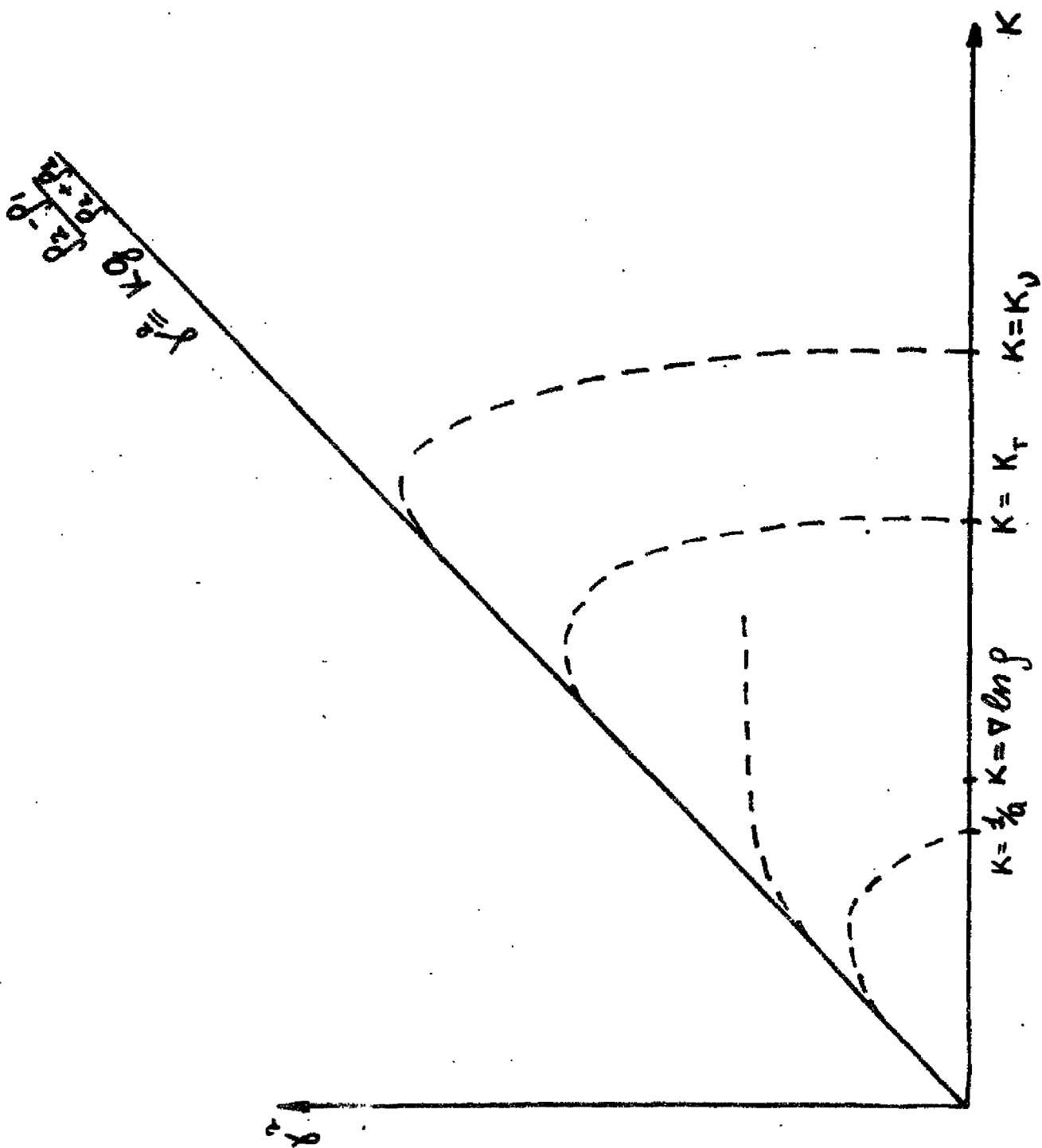
Приведенные результаты означают, что для определения допустимого спектра начальных возмущений необходимо изучение нелинейной стадии развития высокочастотных возмущений при немонахроматических спектрах начальных возмущений формы и потока.

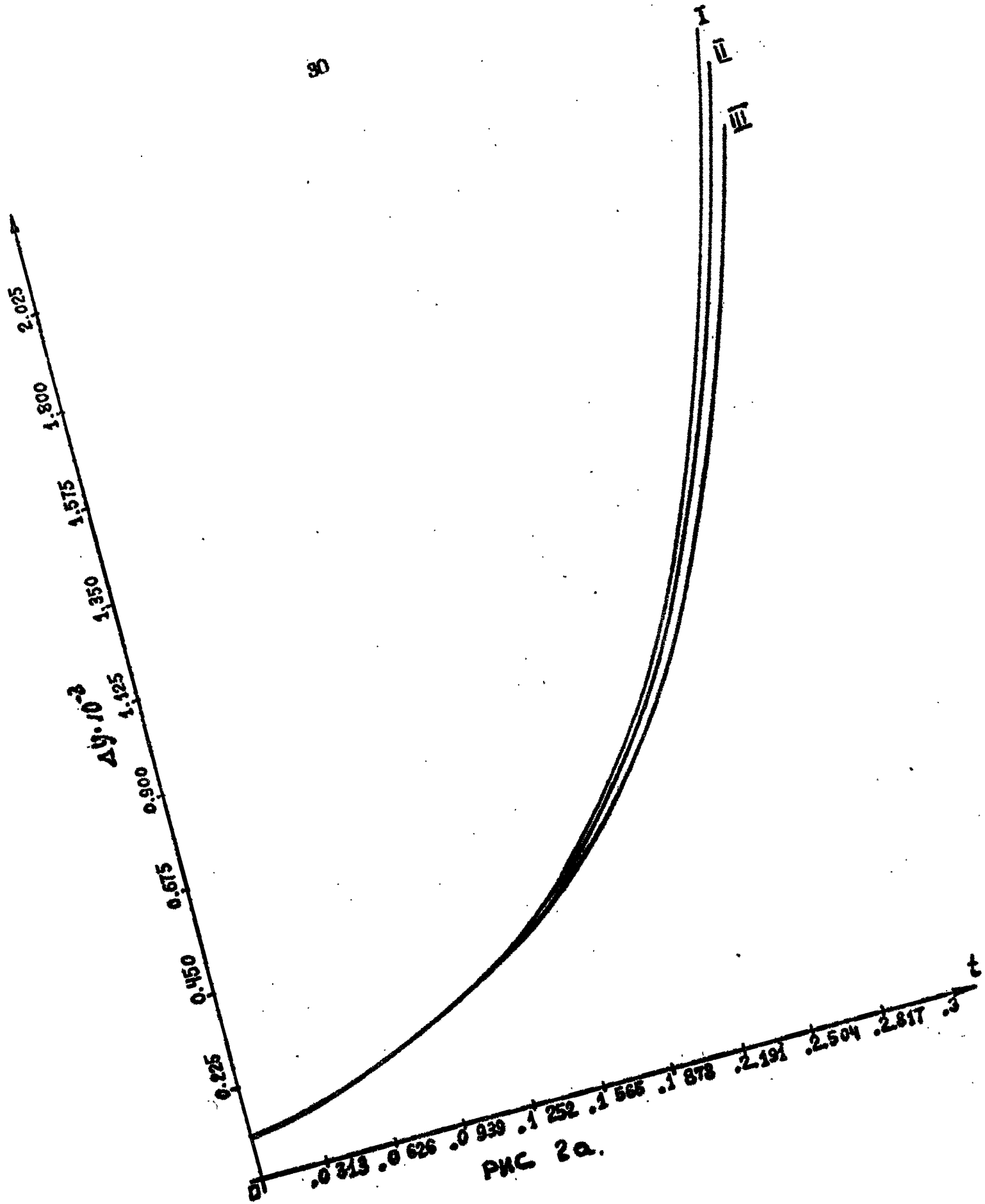
Л И Т Е Р А Т У Р А

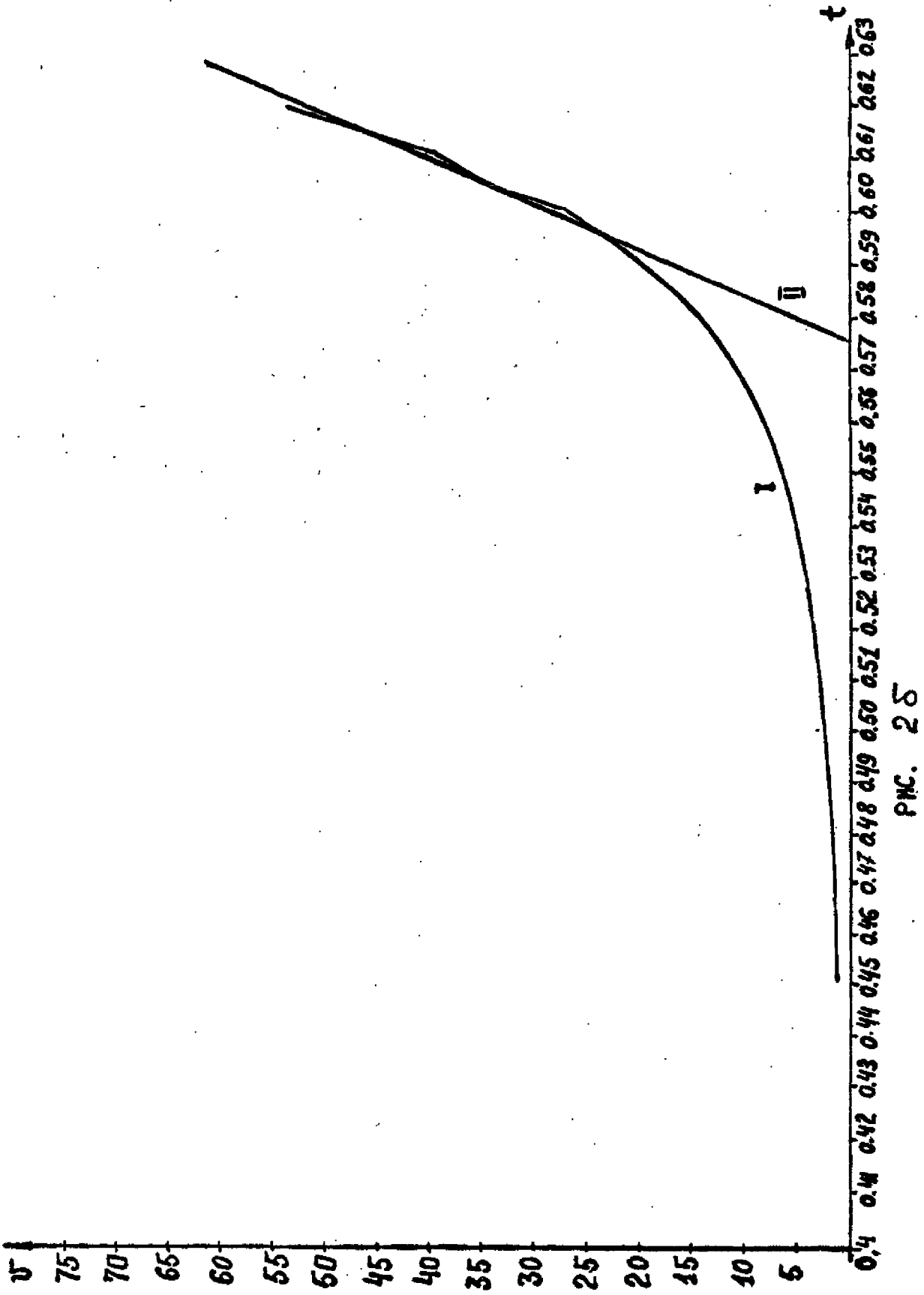
1. J.Nuckolls, L.Wood, A. Thiessen, G. Zimmerman. Nature, 239 , (1972).
2. Ю.В. Афанасьев, Н.Г. Басов, П.П. Волосевич, Е.Г. Гамалий, С.П. Курдюмов, О.Н. Крохин, Е.И. Леванов, В.Б. Розанов, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Plasma Physics and controlled nuclear research vol. II, IAEA, Vienna, 1975.
3. D.B. Henderson, and R.L. Morse. Phys.Rev.Lett, 32 , 355, 1974. D.B. Henderson, R.L. McCrory and R.L. Morse, Phys. Rev.Lett, 33 , 205, 197 .
4. Н. Бракнер, С. Джорна. Управляемый лазерный синтез. Москва, Атомиздат, 1977.
5. W.C. Mead and J.B. Lindl. Preprint VCR-L-78459, 1976.
6. W.C. Mead, J.D. Lindl, J.H. Nuckolls, J.T. Larsen, D.S. Bailey, Y.L. Pan, Preprint VCR-L-80005, 1977.
7. Ю.В. Афанасьев, Н.Г. Басов, Е.Г. Гамалий, О.Н. Крохин, В.Б. Розанов. "Письма в ЖЭТФ", 23 , (617), 1976.
8. Н.Н. Боков, А.А. Бунатян, В.А. Лыков, В.В. Неуважаев, А.П. Строцева, В.Д. Фролов. "Письма в ЖЭТФ", 26 , (630), 1977.
- 8^a А.А. Бунатян, В.Е. Неуважаев, В.Д. Фролов, Л.П. Строцева, Препринт ИПМ № 71, 1975.
9. П.П. Волосевич, Е.Г. Гамалий, А.В. Гулин, В.Б. Розанов, А.А. Самарский, Н.Н. Тюрина, А.П. Фаворский. "Письма в ЖЭТФ", 24 , (283-286), 1976.
10. Н.Г. Басов, А.А. Кологривов, О.Н. Крохин, А.А. Рупасов, Г.В. Склизов, А.С. Шиканов. "Письма в ЖЭТФ", 23 (474), 1976.
11. G. Taylor. Proc. Roy. Soc. ser. A, 201 , (192), 1950.

12. S. Chandrasekhar "Hydrodynamic and Hydromagnetic stability". Clarendon Press, Oxford, 1961.
13. Е.Г. Гамалий, В.Е. Неуважаев, Л.И. Шибаршов. В Сб. Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 1, 47, 1976.
14. Е. Фрадкин. Труды ФИАН, т. 29, 1965.
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред.
16. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. "Уравнения математической физики". Физматгиз, Москва 1972.
17. П.П. Волосевич, Е.Г. Гамалий, В.А. Гасилов, В.Ф. Тишкин. Препринт ИПМ АН СССР № 24, 1978.
18. Е.Г. Гамалий. Кр. сообщения по физике ФИАН, 5, 23, 1976.
19. Lord Raileigh Phil. Mag. 34, 200, 94-98 (1917).
20. Л. Спитцер. Физика полностью ионизированного газа.
21. А.А. Самарский. "Введение в теорию разностных схем". М., "Наука", 1971.
22. В.М. Головинин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Препринт ИПМ АН СССР, № 16, 1977.
23. В.Ф. Тишкин, Н.Н. Тюрина, А.П. Фаворский. Препринт ИПМ АН СССР, № 23, 1978.
24. В.А. Гасилов, В.М. Головинин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Препринт ИПМ АН СССР, № 119, 1977.
25. S.F. Bodner, J.P. Boris, G. Cooperstein et al Report at 7th Int. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Reserch, Innsbruck, Austria, 23 - 30 aug, 1978.
26. M.S. Plesset. Journ. of Appl. Phys. v.25, N1, 96, 1954.
27. W.C. Mead and J.D. Lindl Preprint UCRL-77057, 1975.
28. R.E. Kidder. Nucl. Fusion 16, 1, 3 (1976).

29. С.И. Анисимов, Н.А. Иногамов. "Письма в ЖЭТФ", 20, 74, (1974).
30. Ю.В. Афанасьев, Н.Г. Басов и др. Препринт ФИАН, № 167, (1977).







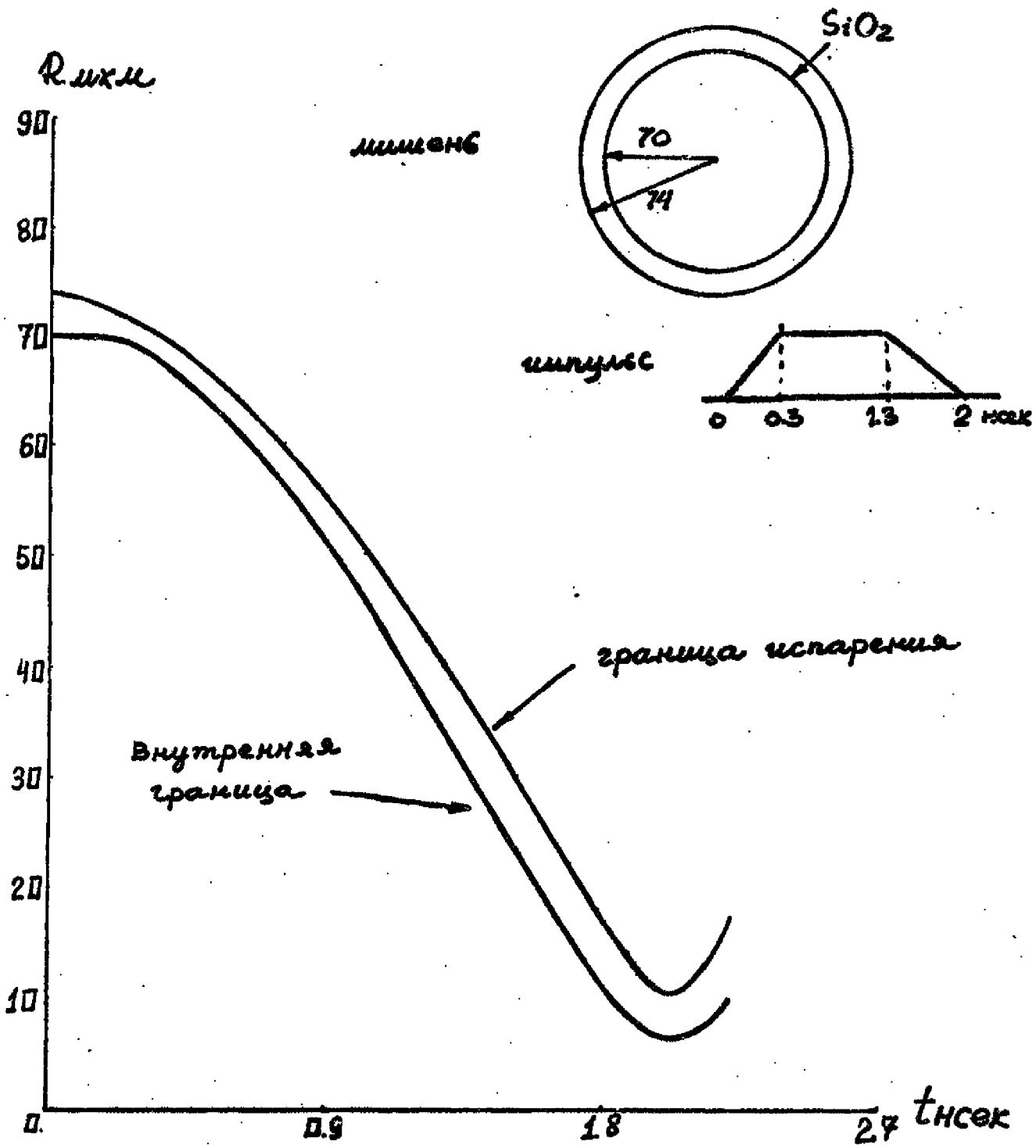
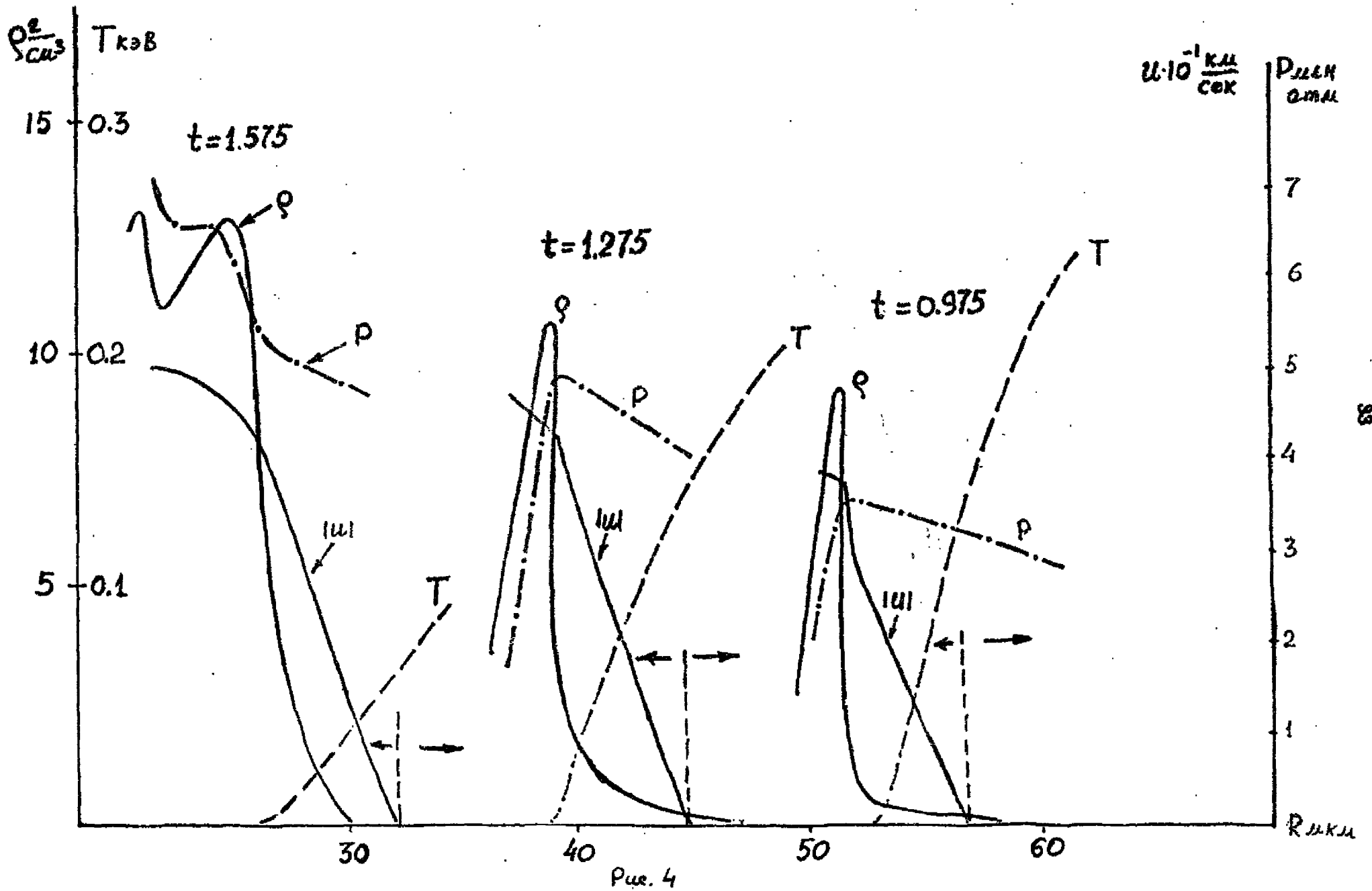
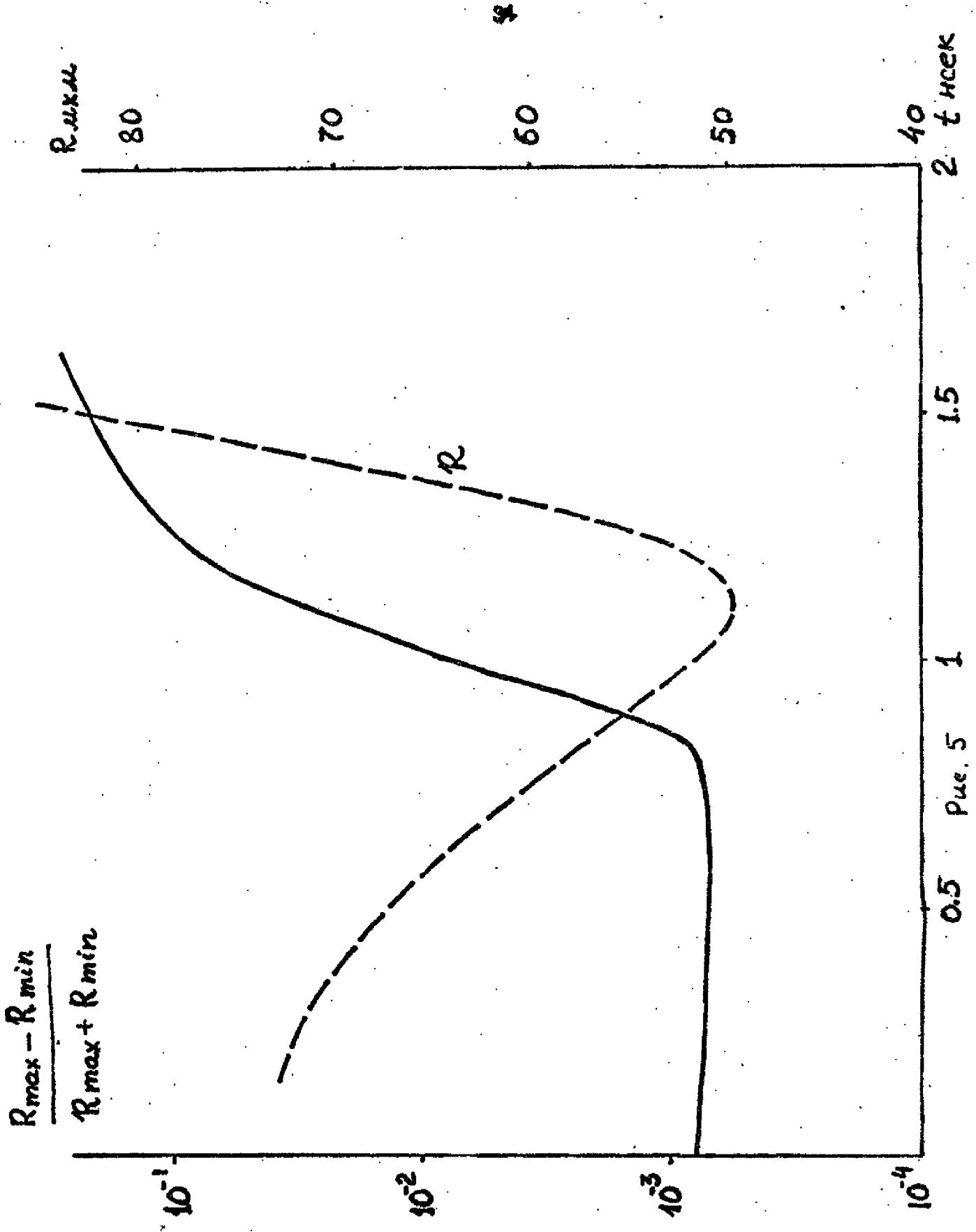


Рис. 3



$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max} + R_{\min}}$$



40
50
60
70
80
 R_{\max}

1.5

1

0.5 Pue. 5

0.5

1

1.5

2 t HCEK

*

$$\pi = 40 \quad a = 10^{-2}$$

$$t = 1.725$$

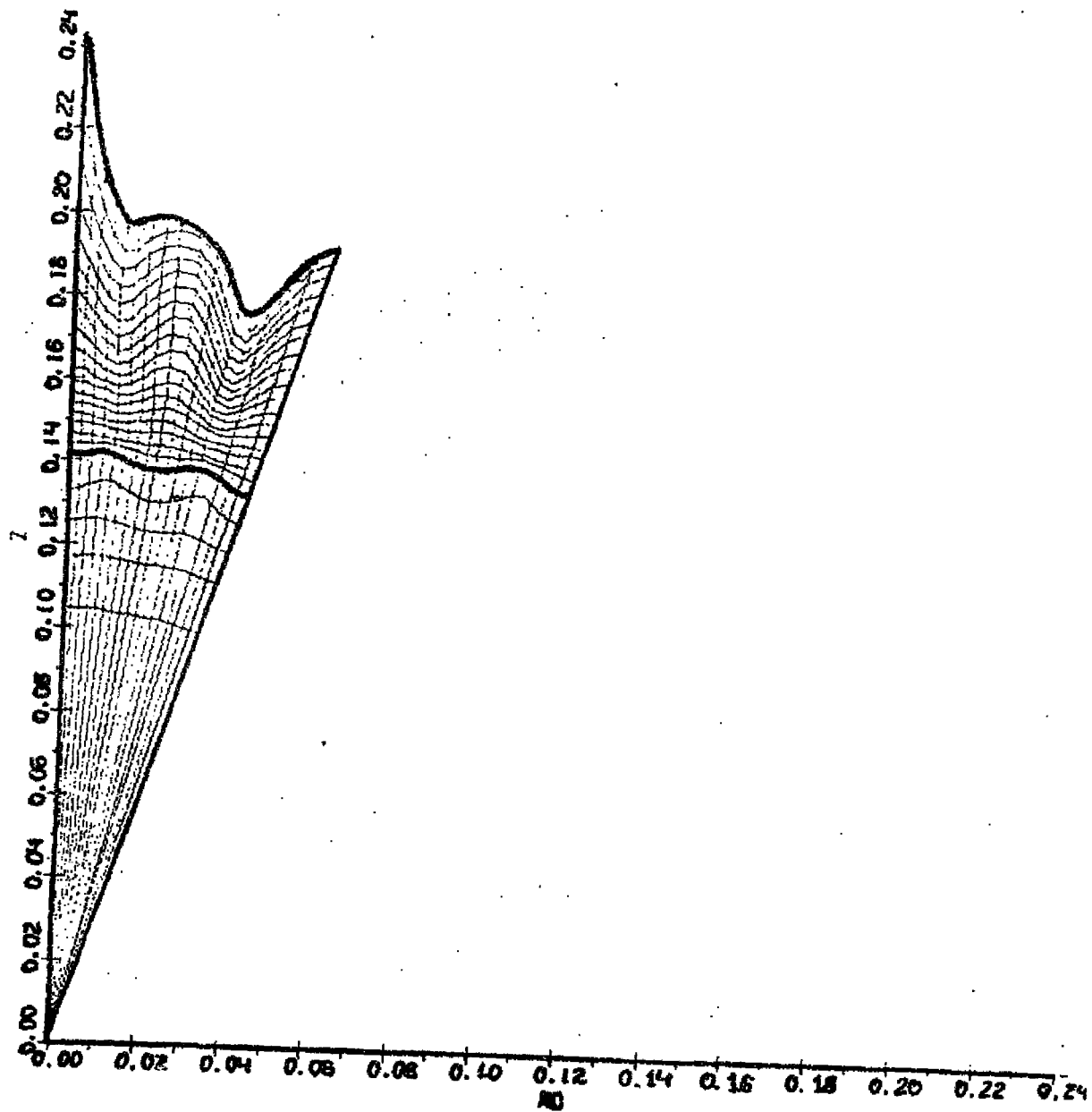
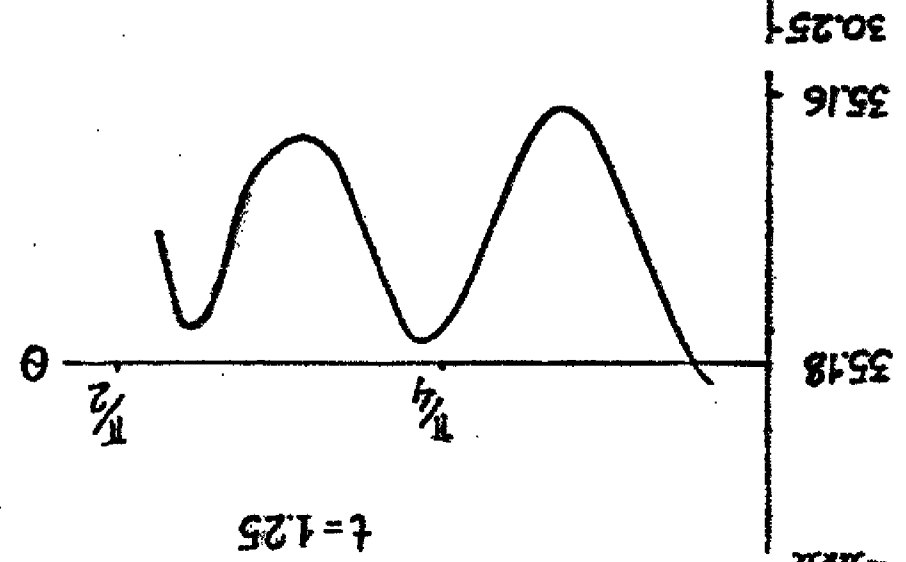
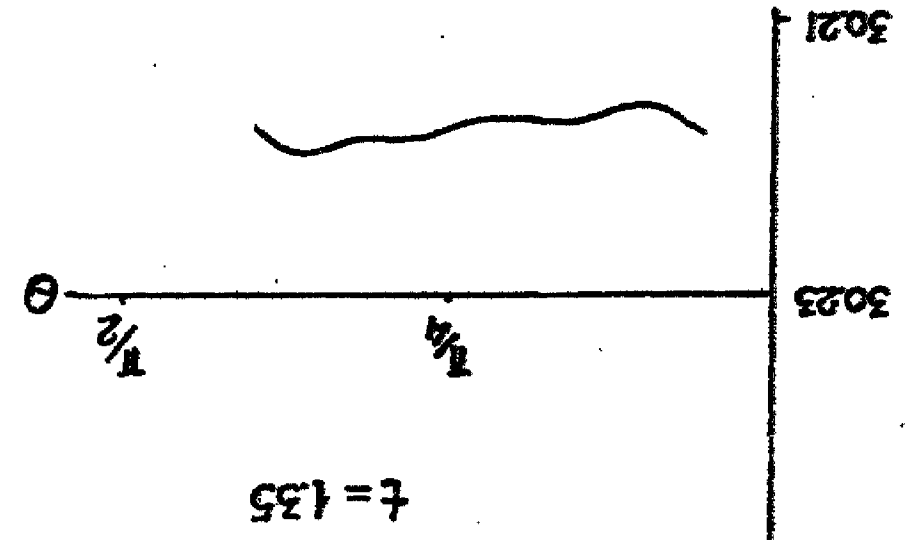
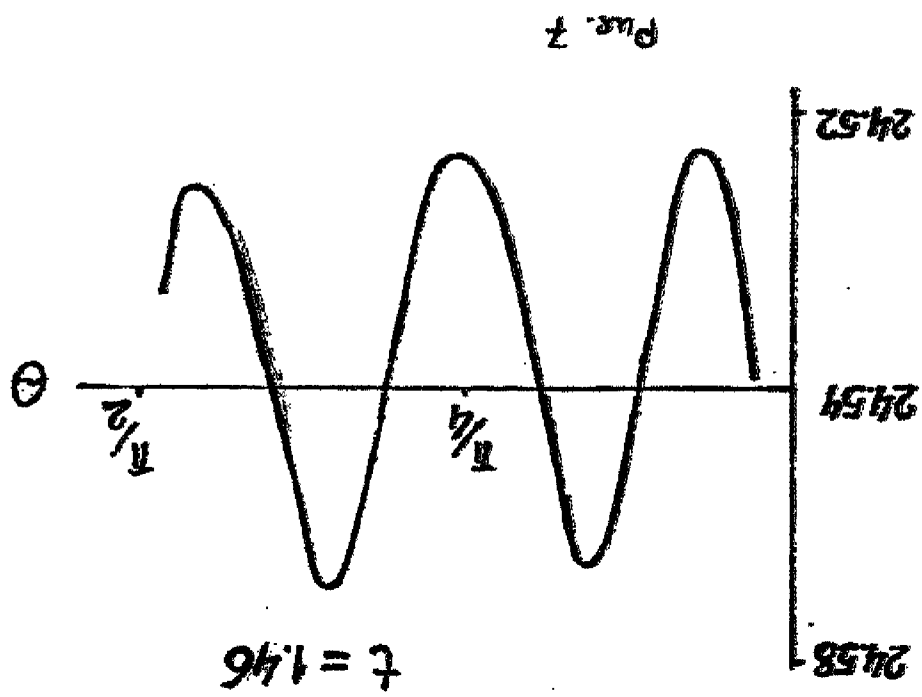
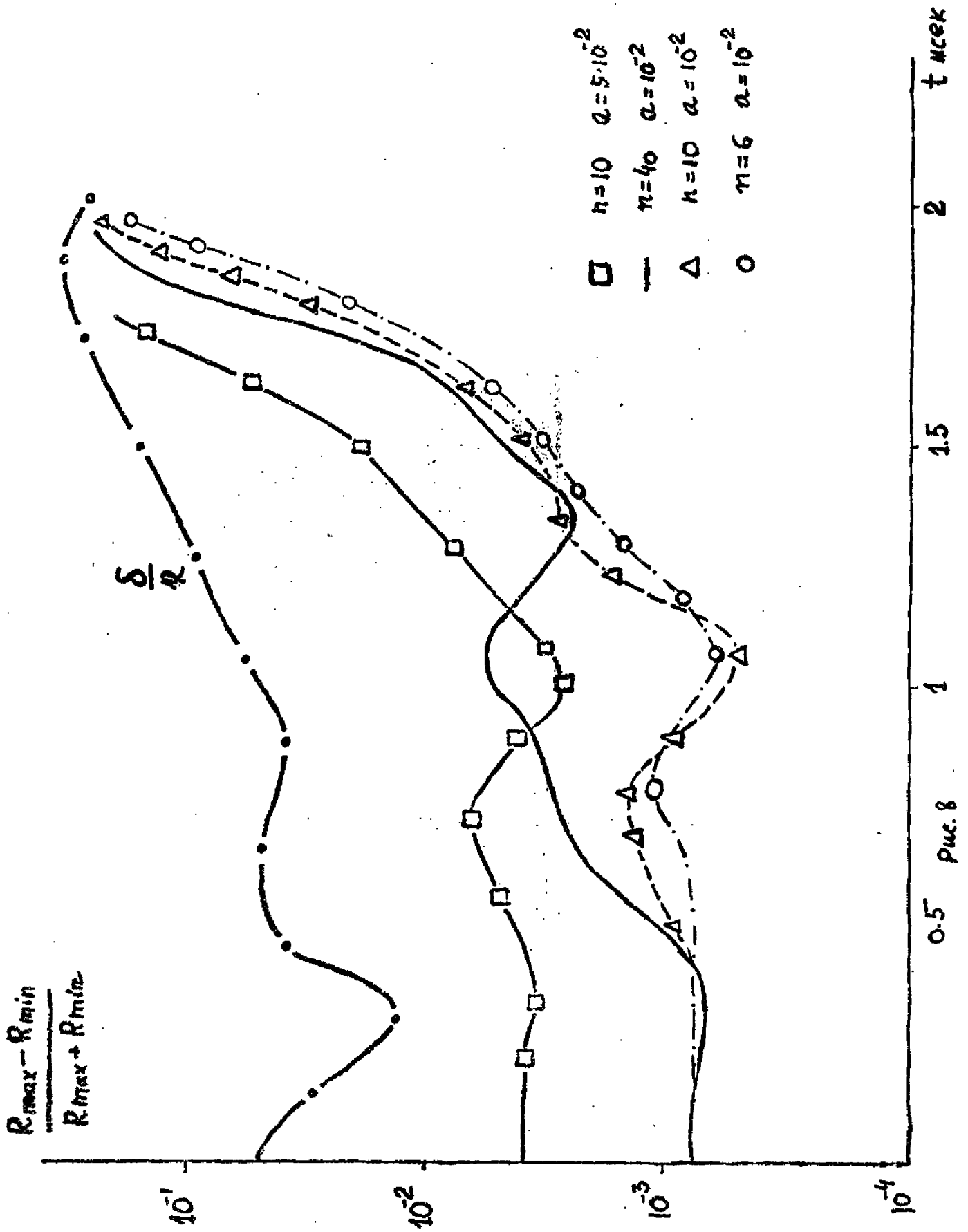


Fig. 6





$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max} + R_{\min}}$$

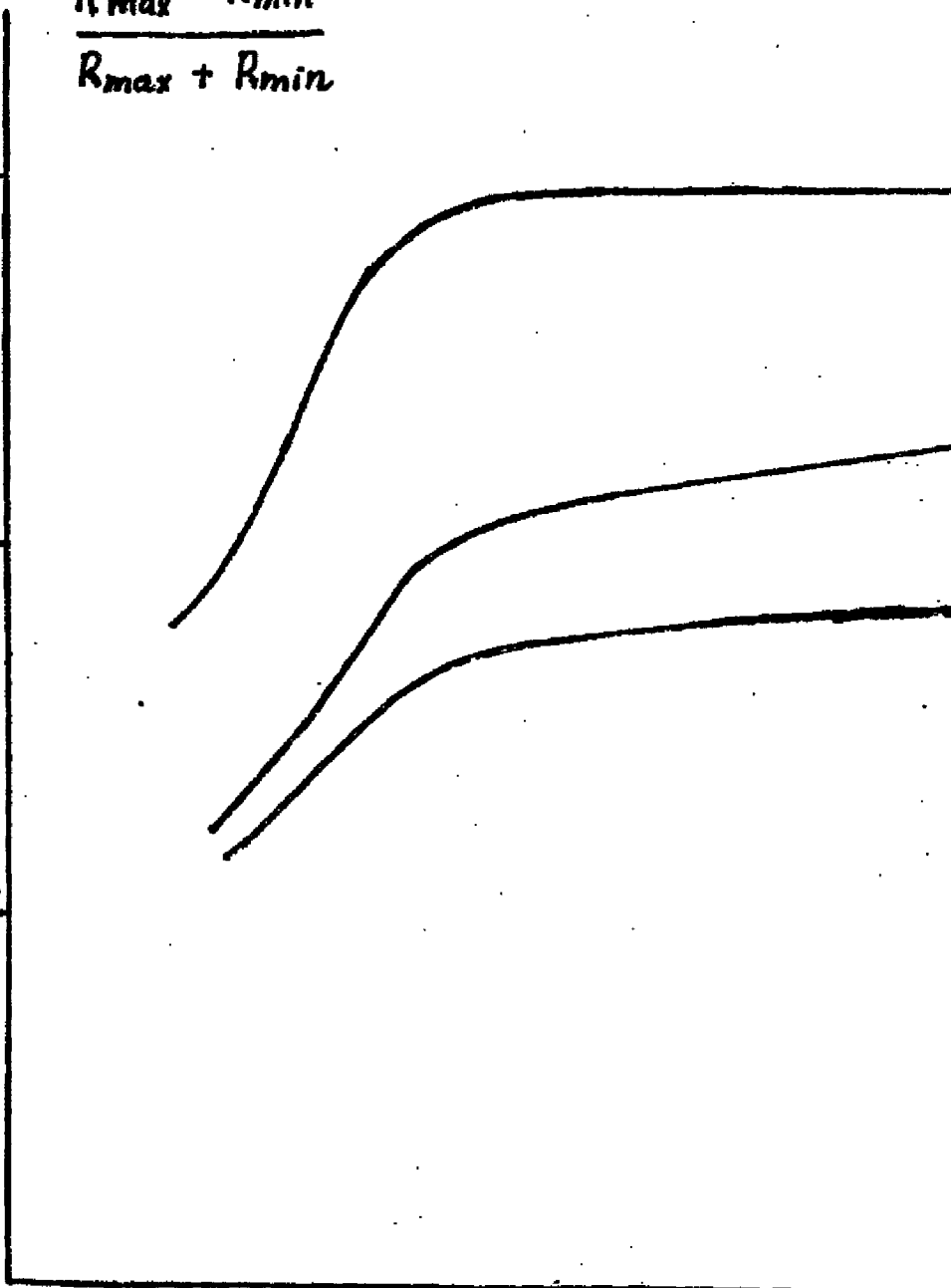
0.15

0.1

0.05

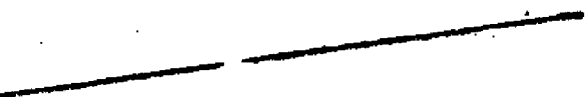
10

20 pue. 9





$t = 1.968$



$t = 1.95$



$t = 1.9125$

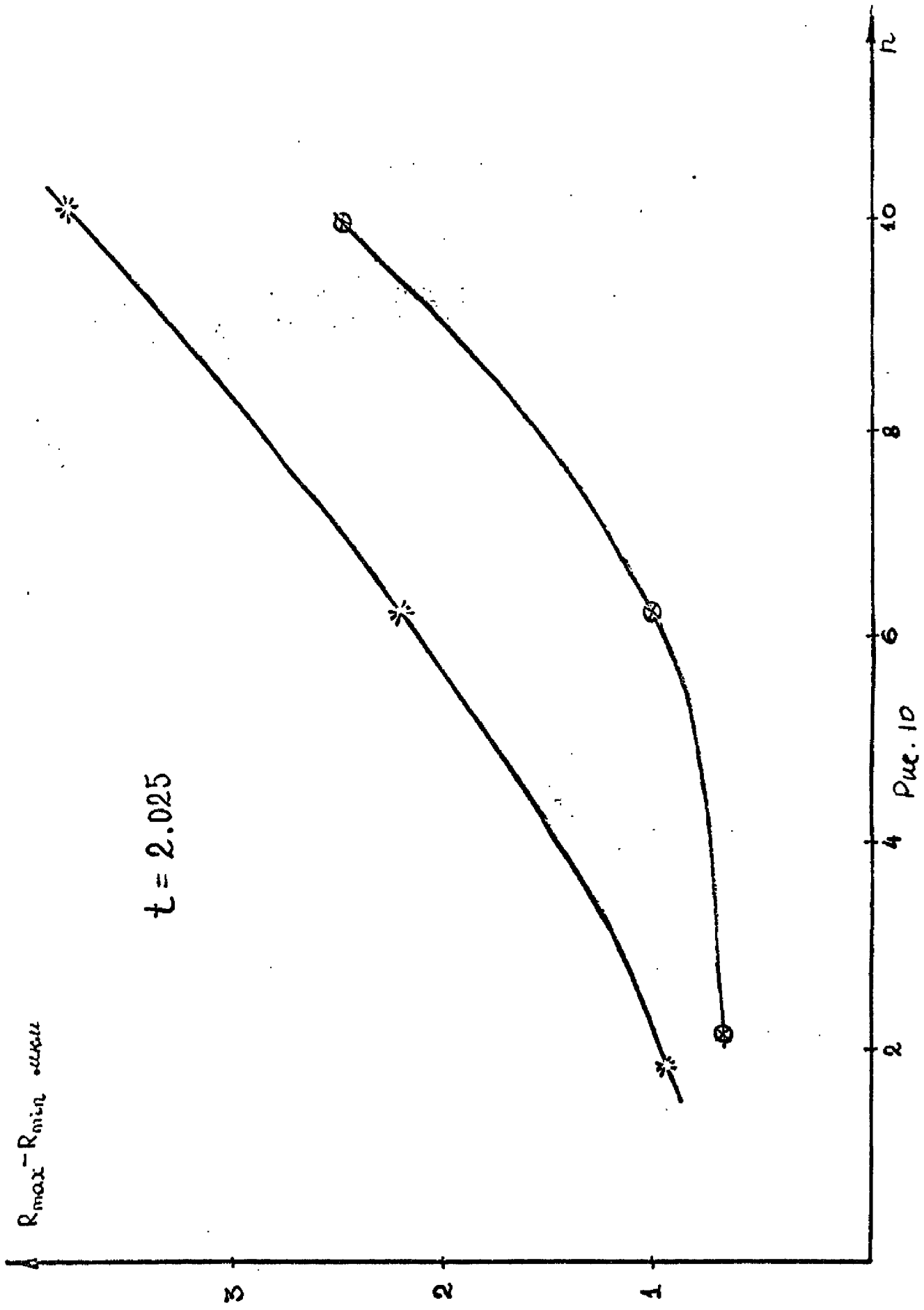
8



30

40

n



Puc. 10

