87

ПРЕПР
С-17

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

А.А. Самарский

# НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Препринт № 87 за 1978 г.

Москва.

Рассматриваются вопросы, относящиеся к следующим разделам теории разностных методов: I) теория устойчивости, 2) итерационные методы решения сеточных уравнений, 3) методы построения разностных схем, 4) векторные схемы на нерегулярных сетках, 5) разностные методы для задач с негладкими решениями, 6) вариационно-разностные схемы для уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики. Излагаются результаты, полученные в последние годы автором и его сотрудниками.

I. Основная теорема об устойчивости ( [I] -[3] ). Разностная схема рассматривается вне связи с каким-либо дифференциальным уравнением и определяется как операторное или операторно-разностное (разностное по дискретному аргументу $t_n = n\tau,\ n=0,1,\dots,\ \tau>0$) уравнения с операторными коэффициентами, заданными в линейном нормированном пространстве $H_h$, зависящем от параметра $h$ -вектора, с нормой $|h|>0$. Никаких предположений о структуре операторов схемы не делается.

Будем рассматривать двухслойную операторно-разностную схему

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0,\ n=0,1,\dots,\ \text{задан}\ y_0\in H_h \qquad (I)$$

с линейными операторами $A=A_{h,\tau}$ и $B=B_{h,\tau}$, действующими в гильбертовом пространстве $H_h$ со скалярным произведением $(\ ,\ )$. Операторы $A$ и $B$ зависят, вообще говоря, от $h,\tau$ (эту зависимость, для упрощения записи, не будем указывать явно) и от $t_n = n\tau$.

Теория устойчивости разностных схем разработана в [I] ,[2]. Целью теории является формулировка необходимых и достаточных

условий устойчивости в терминах общих свойств операторов $A$ и $B$ без каких-либо предположений о их структуре, а также получение априорных оценок для решения задачи (I). Пусть $\mathcal{D}=\mathcal{D}^*>0$ – некоторый оператор, заданный в $H$. Через $H_{\mathcal{D}}$ будем обозначать пространство, состоящее из элементов $y, v, \ldots \in H$ (индекс $h$ будем в дальнейшем опускать) со скалярным произведением $(y,v)_{\mathcal{D}}=(\mathcal{D}y, v)$ и нормой $\|y\|_{\mathcal{D}}=\sqrt{(\mathcal{D}y,y)}$.

Схема (I) называется устойчивой (по начальным данным) в пространстве $H_{\mathcal{D}}$, если существует такой оператор $\mathcal{D}=\mathcal{D}^*>0, \mathcal{D}: H\to H$, что для решения задачи (I) при любых $y_0 \in H$ справедливы неравенства

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{D}} \leq \|y_n\|_{\mathcal{D}}, \quad n=0,1,\ldots . \tag{2}$$

Приведем основную теорему об устойчивости.

Теорема I. Пусть $A$ и $B$ не зависят от $t_n=n\tau$, $A=A^*>0$ и оператор $B^{-1}$ существует. Тогда для устойчивости схемы (I) в пространстве $H_{\mathcal{D}}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство

$$B_0=\operatorname{Re} B \geq 0{,}5\tau A \tag{3}$$

или

$$B \geq 0{,}5\tau A$$

в случае действительного пространства $H$. Здесь оператор $B$ несамосопряжен.

Любая многослойная операторно-разностная схема может быть записана в канонической форме (I), где $A$ и $B$ операторные матрицы порядка $p-1$, где $p$ – число слоев схемы. Поэтому теорема I имеет общий характер.

2. Устойчивость двухслойных схем в случае несамосопряженных операторов. В последние годы (в основном А.В.Гулиным) получен

существенные результаты, относящиеся к устойчивости схем (I) с несамосопряженными операторами. В частности, выяснялись условия, необходимые для устойчивости по начальным данным. В наиболее общей постановке задача состоит в том, чтобы указать свойства операторов $A$ и $B$ схемы (I), устойчивой в каком-либо пространстве $H_{\mathcal{D}}$. Показано, например, что схема (I) не является устойчивой ни в одной из норм $H_{\mathcal{D}}$ (абсолютно неустойчива), если $A^*=-A$, $B=B^*>0$ или $A=A^*>0$, $B^*=-B$.

В случае самосопряженных операторов $A$ и $B$ верна

Теорема 2. Пусть $A$ и $B$ самооопряженные операторы и хотя бы один из операторов, $A$ или $B$, положителен. Если схема (I) устойчива в каком-либо пространстве $H_{\mathcal{D}}$, то выполнено операторное неравенство (3), т.е. $B \geqslant \frac{1}{2}\tau A$.

Требование самосопряженности обоих операторов $A$ и $B$ в условии теоремы 2 является существенным, так как имеется пример устойчивой схемы с самосопряженным положительным оператором $A$ не удовлетворяющей условию (3).

А.В.Гулиным исследована устойчивость схемы (I) в $H_{\mathcal{D}}$ для случая несамосопряженных операторов $A$ и $B$ в предположении, что они связаны соотношением

$$B = D + \tau A C, \tag{4}$$

где $\mathcal{D}=\mathcal{D}^*>0$ и $C$ -операторы, заданные в $H$.

Теорема 3. Пусть существует оператор $D=\mathcal{D}^*>0$ и обратимый оператор $C$ и выполнено (4). Тогда устойчивость схемы (I) в $H_{\mathcal{D}}$ эквивалентна выполнению операторного неравенства

$$A_0 + \tau A^*((C-0{,}5E)D^{-1})_0 A \geqslant 0, \tag{5}$$

где $A_0 = Re\,A = 0{,}5(A^*+A)$, $E$ – единичный оператор.

Условие (5) существенно упрощается в случае кососимметричес-

кого оператора $A$, когда $A^* = -A_0$.

Теорема 4. Пусть имеет место формула (4). Если $A$ – кососимметричный оператор, $A^* = -A$, то для устойчивости схемы (I) в $H_{\mathcal{D}}$ достаточно потребовать выполнения операторного неравенства

$$DC + C^*D \geq \mathcal{D} . \tag{6}$$

Если $A^{-1}$ существует, то (6) и необходимо для устойчивости в $H_{\mathcal{D}}$.

3. В качестве примера приложения теоремы 4 рассмотрим двухпараметрическое семейство разностных схем.

$$u_t + \sigma_1 \hat{p}_{\bar{x}} + (1-\sigma_1) p_{\bar{x}} = 0, \quad \frac{1}{c^2} p_t + \sigma_2 \hat{u}_x + (1-\sigma_2) u_x = 0, \tag{7}$$

$$\left(u = u_i^n = u(x_i, t_n),\ x_i = ih,\ t_n = n\tau,\ u_x = u_{x,i} = (u_{i+1} - u_i)/h,\right.$$

$$\left. u_{\bar{x}} = (u_i - u_{i-1})/h,\ u_t = (u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau,\ \hat{u} = u_i^{n+1} \text{ и т.д.}\right)$$

аппроксимирующую систему уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

При соответствующих граничных условиях схема (7) может быть записана в каноническом виде (I), где $y$ есть вектор, $y = \{u, p\}$, а операторы $A$ и $B$ являются операторными матрицами второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & \sigma_1 \tau A_{12} \\ -\sigma_2 \tau A_{12}^* & c_0^{-2} E \end{pmatrix},$$

причем $A_{12}$ –оператор левой разностной производной, $(A_{12} p)_i = p_{\bar{x},i}$. Таким образом, оператор $A$ является кососимметрическим и можно пытаться применить теорему 4. Удалось найти операто-

ры $D$ и $C$ и представить оператор $B$ в виде (4). Условие устойчивости (6) приводит к следующим ограничениям на параметры $\sigma_1$ и $\sigma_2$ схемы:

$$\sigma_1+\sigma_2 \geq 1,\ 1+4\gamma^2(\sigma_1-0{,}5)(\sigma_2-0{,}5) \geq 0,\ \gamma = \frac{\tau C_0}{\gamma}. \qquad (8)$$

Следует отметить, что условия (8) неулучшаемы, так как они совпадают с необходимыми условиями устойчивости, полученными методом гармоник.

4. Устойчивость по правой части. Рассмотрим схему

$$B\,\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n,\ n=0,1,\ldots,\ \text{задан}\ y_0 \in H, \qquad (9)$$

где $\varphi_n = \varphi(t_n)$ – заданная функция со значениями в $H$. В силу принципа суперпозиции, схема (9), устойчивая по начальным данным в смысле (2), устойчива также и по правой части при условии согласования норм для $y_n$ и $\varphi_k$. При определенных условиях верно и обратное утверждение (см. [3],[4] ). Пусть $\|\cdot\|_{(1)}$ некоторая норма в $H$ и $M_1>0$ – постоянная, не зависящая от $h, n, \tau$. Схема (9) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если при любых $y_j \in H,\ j=0,1,\ldots$, и для всех $n=j,\ j+1,\ \ldots$ для решения задачи (I) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \|y_j\|_{(1)}$$

В [3] доказана

Теорема 5. Если схема (9) равномерно устойчива по начальным данным и оператор $A^{-1}$ существует, то для решения задачи (9) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|A_n^{-1}\varphi_n\|_{(1)} + M_1\Big\{\|y_0\|_{(1)} + \|A_0^{-1}\varphi_0\|_{(1)} + M_1\sum_{j=1}^{n}\tau\|(A_j^{-1}\varphi_j)_{\bar t,j}\|_{(1)},$$

где

$$\varphi_{\bar t,j} = (\varphi_j - \varphi_{j-1})/\tau.$$

Таким образом условия устойчивости, сформулированные в п.I и п.2 обеспечивают также устойчивость по правой части.

5. Устойчивость трехслойной схемы. Рассмотрим операторно-разностную схему, записанную в каноническом виде (см. [I] )

$$By^{\circ}_{t,n}+\tau^2 R y_{\bar{t}t,n}+Ay_n=0,\ n=1,2,\dots,\ \text{заданы}\ y_0,\ y_1\in H \qquad (10)$$

где

$$y=y_n=y(t_n),\ y^{\circ}_{t,n}=(y_{n+1}-y_{n-1})/2\tau,\ y_{\bar{t}t}=(y_{n+1}-2y_n+2y_{n-1})/\tau^2,$$

$A, B, R:\ H\to H$ – линейные операторы.

Случай самосопряженных операторов $A$ и $R$ рассмотрен в [I] , где показано, что условия устойчивости имеют вид линейных операторных неравенств

$$B_0=\operatorname{Re}B=\frac{1}{2}\left(B+B^*\right)\geq 0,\ A>0,\ R-\frac{1}{4}A>0.$$

Нарушения самосопряженности приводит к существенно более сложным условиям устойчивости (см. [2] ,[3]). Будем рассматривать для простоты схему

$$y^{\circ}_t+\tau^2 R y_{\bar{t}t}+Ay=0 \qquad (11)$$

Теорема 6. Если $A^*=A$, $R=R_0+R_1$, $R_0=0{,}5(R^*+R)$, $R_1=0{,}5\,(R-R^*)$ , причем $R_1R_0=R_0R_1$, $R_1A=AR_1$, то схема (I) устойчива при условии

$$A>0,\ R_0-\frac{1}{4}A>\tau^2 R_1^* A R_1.$$

Теорема 7. Пусть $A$ –кососимметричный оператор, $A^*=-A$ , перестановочный с оператором $R$, $AR=RA$ . Тогда схема (II) устойчива при условии

$$\tau^2\|(A-2R)y\|^2\leq\|y\|^2-4\tau^2\|Ry\|^2.$$

Если $AR \neq RA$, то устойчивость схемы (II) с кососимметричными операторами $A$ и $R$ $(A^* = -A, R^* = -R)$ удается доказать лишь при условии $\tau \|A - 2R\| < 1$. Получены необходимые условия устойчивости трехслойной схемы (I0). Так показано, что если схема (I0) при $R \equiv 0$ устойчива в какой-либо норме, то все собственные значения оператора $\tau B^{-1} A$ лежат на мнимой оси и не превосходят по модулю единицу. Аналогично, если схема

$$By_{\bar{t}t} + Ay = 0$$

устойчива в какой-либо норме, тов все собственные значения $\lambda$ оператора $B^{-1}A$ действительны и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \frac{\tau^2 \lambda}{4} \leq 1 .$$

Отсюда, в частности, следует абсолютная неустойчивость схем

$$By_{\mathring{t}} + Ay = 0, \quad B = B^* > 0, \quad A^* = A$$

$$By_{\bar{t}t} + Ay = 0, \quad B = B^* > 0, \quad A^* = -A$$

6. Итерационные методы решения сеточных уравнений. В последние годы были получены существенные результаты в теории итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Выделим два результата: I) построение набора оптимальных итерационных чебышевских параметров, для которого процесс итераций вычислительно устойчив, 2) разработка универсального попеременно-треугольного итерационного метода. Изложение общих фактов теории итерационных методов дано в [3]. Пусть $H$ – конечномерное линейное пространство со скалярным произведением $(\,,\,)$, $A, B, \ldots$ – линейные операторы, заданные в $H$, $A, B : H \to H$. Требуется решить уравнение

$$Au = f, \quad A : H \to H.$$

Двухслойный (одношаговый) итерационный метод записывается в той же канонической форме, что и двухслойная операторно-разностная схема

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \forall y_0 \in H, \qquad (12)$$

где $y_k$ –итерация номера $k$, $\tau_k > 0$ –параметры, $B : H \to H$, $B^{-1}$ существует. При $B = E$ – метод (12) явный, при $B \neq E$ –неявный. Будем предполагать, что выполнены условия $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$, $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, $\gamma_1 > 0$. Требуется найти параметры $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ из условия минимума числа итераций $n = n(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \geq 0$, при котором

$$\|y_n - u\|_{\mathcal{D}} \leq \varepsilon \|y_0 - u\|_{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{D}^* = \mathcal{D} > 0, \quad H \to H.$$

Эта задача сводится к классической задаче о нахождении полинома $n$ –ой степени, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$. Ее решением является полином Чебышева. Для числа итераций получается оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \ln \frac{2}{\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \qquad (13)$$

а для параметров $\tau_k$ верны формулы

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \sigma_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \qquad (14)$$

где $\sigma_k$ – корень полинома Чебышева $n$ –ой степени $\sigma_k = -\cos\beta_k$, $\beta_k = \frac{\pi}{2n}\theta_n(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\theta_n(k)$ – одно из чисел $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$. Оценка (13) с $\mathcal{D} = AB^{-1}A$ верна при

любом способе нумерации множества $\theta_n = \{\theta_n(k)\}$, если выполнено $A = A^*, B = B^* > 0$. Однако, итерационный процесс (I2) (I4) при "естественных" способах выбора $\theta_n(k)$ : $\theta_n(k) = 2k-1$ или $\theta_n(k) = 2n-(2k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ вычислительно неустойчив, т.е. не сходится при вычислениях с конечным числом знаков. Вычислительный процесс можно сделать устойчивым, если перенумеровать соответствующим образом множество $\theta_n = \{\theta_n(k)\}$. Такие устойчивые наборы чисел $\theta_n = \theta_n^*$ и тем самым параметров, найдены в 1971-1973 гг.: а) для $n = 2^p$ ($p > 0$ -целое число) в работах [5] и [1], б) для произвольного $n$ - в работах [6], [7] и [8]. Алгоритм получения "устойчивого набора" параметров $\{\tau_k^*\}$ на языке "АЛГОЛ" дан в [6] (см. также [3]).

Построение устойчивого чебышевского итерационного метода (I2), (I3), (I4) (иногда называют его методом Ричардсона) делает возможным его применение для решения разностных эллиптических задач. Отношение $\xi = \gamma_1/\gamma_2$, определяющее, согласно (I3) скорость сходимости итераций зависит от выбора оператора $B$. Очевидно, что $B$ следует выбирать из условия минимума итераций (максимума $\xi$) и минимума операций для нахождения новой итерации (экономичности $B$).

Для метода Зейделя и верхней релаксации оператор $B$ не является самосопряженным и потому для ускорения сходимости путем выбора параметров $\{\tau_k\}$ нельзя пользоваться общей теорией.

7. Попеременно-треугольный итерационный метод (ПТМ). Самосопряженным является оператор $B$, представленный в виде произведения "треугольных" (имеющих треугольные матрицы) операторов, сопряженных друг другу.

$$B = (E+\omega R_1)(E+\omega R_2), \quad R_1 + R_2 = A, \quad R_2^* = R_1, \quad \omega > 0. \qquad (I5)$$

Для определения $y_{k+1}$ в этом случае надо решить последовательно

две системы с нижней $(E+\omega R_1)$ и верхней $(E+\omega R_2)$ треугольными матрицами. Итерационный метод (I2) с факторизованным оператором $B$ вида (I5) будем называть попеременно-треугольным методом (ПТМ), предполагая всегда, что используется набор чебышевских параметров $\{\tau_k^*\}$ (см. [3]). ПТМ, очевидно, является универсальным, так как любой оператор $A=A^*$ можно представить в виде суммы треугольных операторов $R_1$ и $R_2^*=R_1, A=R_1+R_2$.

Теорема 8. Если выполнены условия $A^*=A>0$ и $A\geq\delta E$, $R_1R_2\leq\frac{\Delta}{4}A$, $\delta>0$, то для ПТМ с параметрами $\{\tau_k^*\}$ и $\omega=2/\sqrt{\delta\Delta}$ число итераций

$$n\geq n_0(\varepsilon)=\ln\frac{2}{\varepsilon}\Big/\left(2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}\right),\quad \text{где}\quad \eta=\frac{\delta}{\Delta}.$$

В случае разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, в единичном $p$-мерном кубе, на кубичной сетке с шагом $h$ число итераций $n_0(\varepsilon)=0{,}28\ln\frac{2}{\varepsilon}/\sqrt{h}$ при любом $p\geq 2$ (т.е. число итераций не зависит от размерности). В работах А.Б.Кучерова и Е.С.Николаева [9] и [10] предложена следующая модификация ПТМ:

$$B=(\mathcal{D}+\omega R_1)\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}+\omega R_2),\ \mathcal{D}^*=\mathcal{D}>0,\ R_1+R_2=A,\ R_2^*=R_1.$$

Теорема 8 сохраняет силу, если выполнены условия

$$A=A^*\geq\delta,\ \delta>0,\ R_1\mathcal{D}^{-1}R_2\leq\frac{\Delta}{4}A.$$

В качестве матрицы $\mathcal{D}=(d_{ij})$ можно взять диагональную матрицу, выбирая $d_{ij}$, так, чтобы отношение $\eta=\delta/\Delta$ было максимальным. Модифицированный ПТМ оказался весьма эффективным при решении разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области и для уравнения $div(k\,grad\,u)=-f(x)$ (с сильно меняющимся коэффициентом $k$) в прямоугольнике. Так, в случае произвольной области число итераций практически совпадает с числом итераций для той же задачи в квадрате, сторона

которого равна диаметру области.

Заметим, что I) ПТМ экономичнее метода переменных направлений даже в случае простейшей трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кубе, 2) для третьей краевой задачи в прямоугольнике модифицированный ПТМ дает $n_0(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{2}{\varepsilon} / \sqrt{h}\right)$, 3) аналогичная оценка имеет место и для разностной задачи Дирихле в прямоугольнике в случае уравнения со смешанными производными, 4) возможно использование факторизованного оператора $B$ для ПТМ в трехслойном (двухшаговом) итерационном методе; с обычными двумя оптимальными параметрами, выбираемыми по заданным $\gamma_1, \gamma_2$; число итераций в этом случае немного больше, чем для двухслойной схемы (I2) с чебышевскими параметрами $\{\tau_k^*\}$; возможна комбинация ПТМ и метода сопряженных градиентов; скорость сходимости мало отличается от обычного ПТМ, однако, она более сильно зависит от выбора начального приближения; зависимость от изменения параметра $\omega$ в некоторых пределах выражена слабо.

8. Разностные методы аппроксимации уравнений математической физики. В последние годы большое внимание уделяется построению разностных схем для уравнений обычного вида в областях сложной формы при различных типах краевых условий в случае нерегулярных сеток. К разностным схемам предъявляются различные требования. Схемы должны хорошо моделировать в пространстве сеточных функций основные функциональные свойства исходных уравнений, например, свойства эллиптичности или параболичности, 2) быть устойчивыми и обладать достаточной точностью на допустимых (как правило, не слишком мелких) сетках, 3) быть экономичными по числу операций, которые нужны для решения (прямым или итерационным методом) сеточных уравнений.

Для построения разностных схем используются интегроинтерполяционный метод или метод баланса, вариационные и проекционные

методы, в том числе метод конечных элементов.

Само понятие разностной схемы подверглось пересмотру. Наряду с обычными схемами весьма важным оказался класс аддитивных схем, представляющих собой систему разностных схем (двухслойных или трехслойных) обычного типа и аппроксимирующих исходное уравнение в суммарном смысле [1,3]. Введение понятия суммарной аппроксимации существенно расширило класс разностных схем и позволило, в частности, построить большое число экономичных алгоритмов для решения линейных и нелинейных многомерных задач. В [19] рассматривались аддитивные экономичные схемы с уравнениями на графах для параболических уравнений и краевых условий третьего рода для некоторого класса с криволинейными границами.

9. Векторные схемы. Изучение И.В.Фрязиновым разностных краевых задач для эллиптических уравнений общего вида в областях произвольной формы, а также экономичных схем для многомерных параболических уравнений привело к понятию векторной разностной схемы (см. [18] - [19]) и существенно расширило класс разностных схем. Это расширение связано с построением схем в пространстве сеточных функций более сложной структуры, являющемся прямой суммой нескольких сеточных пространств. Пусть заданы сетки $\omega_h^{(s)}$, зависящие от $h$, и соответствующие пространства $H_h^{(s)}$ сеточных функций $y^{(s)}$, $s=1,2,\dots,m$. Пусть $H_h = H_h^{(1)} \oplus H_h^{(2)} \oplus \dots \oplus H_h^{(m)}$ -прямая сумма $m$ пространств $H_h^{(s)}$ и вектор $y=(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}) \in H_h$ с компонентами $y^{(s)} \in H_h^{(s)}$, $s=1,2,\dots,m$.

Под векторной разностной схемой будем понимать операторно-разностное (разностное по аргументу $t_n = n\tau$, $n=0,1,\dots$, $\tau>0$) уравнение с операторами в $H_h$.

Формальный прием построения векторных схем состоит в следующем. Задача для исходного уравнения ставится в соответствие

эквивалентная корректная задача для системы дифференциальных уравнений: единственным ее решением является вектор-функция, все компоненты которой совпадают с решением исходной задачи. Аппроксимируя каждое из уравнений этой системы на соответствующей сетке $\omega_h^{(s)}$, приходим к векторной схеме. Если векторная схема корректна, то каждая ее компонента приближает соответствующую компоненту эквивалентной системы, и значит и исходной задачи. Семейство векторных схем существенно более широкое, чем семейство различных аппроксимаций для одного уравнения на одной сетке

10. Пример (И.В.Фрязинов). В случае нерегулярных сеток для эллиптического уравнения

$$Lu=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)=-f(x),\quad x=(x_1,x_2)$$

схемы строятся методом конечных элементов. Однако эти схемы (особенно простейшие из них легко получить методом баланса (или интегроинтерполяционным методом ).

Покроем область $\Omega$ треугольниками, их вершины образуют сетку $\bar\omega_h$ $(x\in\bar\omega_h)$. В каждом треугольнике на середине одной из его сторон возьмем точку ( $x'\in\bar\omega_h'$, $x'$ – потоковая точка), проведем из нее отрезки $S_1^\Delta(x')$, $S_2^\Delta(x')$, параллельные двум другим сторонам. $S_1^\Delta(x'),S_3^\Delta(x')$ данного треугольника. Отрезки $S_1^\Delta(x'),S_2^\Delta(x')$, $x'\in\bar\omega_h'$ разбивают область $\Omega$ на ячейки $H(x)$, $x\in\bar\omega_h$ (см.фиг.I). Запишем для ячейки $H(x)$ уравнение баланса; при этом производные в выражении для потока через отрезок $S_\alpha^\Delta(x')$ границы $H(x)$ выразим через производные в направлениях $S_1^\Delta(x')$, $S_2^\Delta(x')$ и заменим разностными отношениями от функции $y$ по $S_1^\Delta(x')$ и $S_2^\Delta(x')$. Коэффициенты вычисляем в точке $x'$. В результате приходим к сеточному аналогу среднего потока через отрезки границы ячейки. Заменяя потоки в уравнении баланса их сеточными аналогами приходим к разностной

схеме. Она совпадает с простейшей схемой метода конечных элементов точности $O(h)$ в $W_2'$ при постоянных коэффициентах и правых частях.

Указанный выше прием построения схем распространяется на сетку с достаточно произвольными ячейками. Пусть область покрыта ячейками $H(X)$ – выпуклыми многоугольниками, $X$ – некоторая точка ("средняя точка") внутри ячейки $H(X)$, $x$ – вершина ячейки $H(X)$, $x \in \bar{\omega}_h$, $X \in \bar{\Omega}_h$. Соединим отрезками соседние узлы $X$. Область разбивается на ячейки $H(x)$ где $x \in \bar{\omega}_h$. В точках $x' \in \bar{\omega}_h'$ пересечения соответствующих отрезков $s(x')$ и $S(x')$ ячеек $H(x)$ и $H(X)$ определены вдоль $s(x')$ и $S(x')$ два направления (см.фиг.2). Запишем уравнение баланса для ячейки $H(x)$. Производные в выражениях потока выразим через производные по направлениям $s(x')$ и $S(x')$, и заменим эти производные по направлениям разностными отношениями от сеточных функций $y(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$ и $Y(X)$, $X \in \bar{\Omega}_h$. Коэффициенты в выражении для потока вычисляем в точке $x'$. Заменяя потоки в уравнении баланса их сеточными аналогами, приходим к уравнению

$$\Lambda(x; y, Y) = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h .$$

Аналогично получим сеточное уравнение, выражающее балано для ячейки $H(X)$

$$\Lambda(X; y, Y) = -\Phi(X), \quad X \in \Omega_h .$$

Пару этих уравнений запишем в виде

$$\bar{\Lambda}\vec{y} = -\vec{\varphi}, \quad \vec{x} = \{x, X\} \in \mathcal{G}_h, \quad \vec{y} = \{y, Y\} \qquad (16)$$

и рассматриваем как векторную схему в пространстве $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}_h(\omega_h) \oplus \mathcal{H}_h(\Omega_h)$, где $\mathcal{H}_h(\omega_h)$ – пространство сеточных функций, заданных на $\omega_h$, $\mathcal{H}_h(\Omega_h)$ – простран-

ство сеточных функций, заданных на $\Omega_h$.

Введем в $\mathcal{H}_h$ скалярное произведение и норму:

$$(\vec{y},\vec{v})=\sum_{\omega_h} y(x)v(x)H(x)+\sum Y(X)V(X)H(X),$$

$$\|\vec{y}\|=\sqrt{(\vec{y},\vec{y})},\quad \vec{y}=\{y,Y\},\quad \vec{v}=\{v,V\}.$$

Оператор $\bar{\Lambda}$ в $\mathcal{H}_h$ является отрицательно определенным и самосопряженным, если отрицательно определен и самосопряжен оператор $L$ (т.е. $k_{12}=k_{21}$). Если углы ячеек $H(x), H(X)$, а также углы между $s(x')$ и $S(x')$ заключены между $\theta^\circ>0$ и $\pi-\theta^\circ>0$, а длины отрезков $s(x')$ и $S(x'), x'\in\bar{\omega}_h'$ заключены между $m_0h$ и $1/m_0h$, $0<const=m_0\leq 1$, $h$ – средний характерный шаг сетки, то схема (I6) сходится в $W_2^1(\mathcal{G}_h)$ со скоростью $O(h)$.

Таким образом, простейшие схемы метода конечных элементов и векторные схемы на нерегулярных сетках могут быть получены методом баланса.

II. Разностные методы для задач с негладкими решениями. Точность решения, полученного разностным методом, в значительной степени зависит от гладкости искомого решения: в некоторых пределах, чем больше гладкость, тем выше точность. При оценке точности разностной схемы обычно предполагается, что точное решение исходного дифференциального уравнения обладает определенной гладкостью, тогда разностная схема имеет точность соответствующего порядка. Однако, часто встречаются задачи, решения которых имеют весьма ограниченную гладкость из-за особенностей в отдельных точках у самого решения или у его производных. Про-

изводные решения эллиптических задач могут быть неограничены в окрестности точек смены типа краевых условий; разрыва краевых значений и правой части; в угловых точках линии разрыва коэффициентов, в многоугольнике в окрестностях вершин углов и т.д. Это приводит к понижению погрешности аппроксимации и точности.

Возникают две проблемы: I) исследования известных разностных схем для указанных задач, 2) разработка новых более эффективных методов решения.

Одними из первых работ, посвященных исследованию классических разностных схем для уравнения Лапласа в областях с негладкой границей, была работа Лаасонена [11], в которой рассматривалась задача Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области с углом $\nu\pi$. Было показано, что при $\nu>1$ пятиточечная схема имеет погрешность

$$O\left(h^{\frac{2}{\nu}-2\varepsilon}/r^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}\right),$$

где $h$ –шаг сетки, $r$ –расстояние до вершины угла, $\varepsilon=const>0$ –любое число, если граничные условия непрерывны, и погрешность

$$O\left(h^{\frac{1}{\nu}-2\varepsilon}/r^{\frac{1}{\nu}-\varepsilon}\right),$$

если граничные условия в вершине угла имеет разрыв первого рода.

Цикл работ по исследованию классических разностных схем для отыскания негладких решений краевых задач для уравнения Пуассона, выполнили В.Б.Андреев, Е.Ю.Архипова и С.А.Кряквина [12] - [14].

В [12] рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y>0$ с граничным условием $u=\operatorname{sign} x = \begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ имеющим разрыв в начале координат. Показано, что погрешность разностной задачи Дирихле в случае пятиточечной схемы

есть величина $O(h/r)$, если разрыв не попадает в узел сетки, и $O(h^2/r^2)$, если разрыв попадает в узел сетки. Первая оценка улучшает результат Лаасснена (при $\nu=1$), снимая $\varepsilon>0$. Вторая оценка дает существенно большую информацию о погрешности схемы, так как из нее следует, что при $r=O(1)$ погрешность схемы есть $O(h^2)$, как и в случае гладких решений $u=u(x)$ исходной задачи. Эти оценки имеют место и для девятиточечной схемы повышенного порядка точности. В случае непопадения точки разрыва в узел сетки точность схемы можно повысить путем исправления граничной функции в одном узле. Для девятиточечной схемы граничную функцию можно исправить таким образом, чтобы погрешность схемы была $O(h^6/r^6)$. При этом сглаживание граничной функции будет немонотонным. В окрестности точки разрыва сходимость отсутствует, однако, разность между сеточным решением и точным решением $u=u(x)$ не превосходит 3 % и достаточно быстро убывает по мере удаления от точки разрыва. Повышение точности схемы путем сглаживания граничной функции приводит к уменьшению погрешности схемы и в окрестности точки разрыва.

В работе [13] изучается смешанная задача для уравнения Лапласа в полуплоскости $y>0$, когда на положительной полуоси $Ox$ $(x>0)$ задано граничное условие второго рода, а на отрицательной полуоси $Ox$ $(x<0)$ – условие первого рода. Показано, что 5-точечная схема имеет точность $O(h/\sqrt{r})$ вне зависимости от положения точки $(0,y)$ на сетке. При специальном расположении точки смены типа граничного условия относительно узлов сетки погрешность есть $O(h^2/r^{3/2})$. Проведено улучшение схемы путем замены в отдельных точках граничных условий первого или второго рода на граничное условие третьего рода со специальным "коэффициентом теплообмена" при любом расположении $(0,0)$ на сет-

ке; при этом погрешность пятиточечной схемы будет $O(h^2/r^{3/2})$ и девятиточечной $O(h^6/r^{11/2})$. Для смешанных задач внутри угла $\frac{3\pi}{2}$ и плоскости с разрезом получены оценки $O(h^{2/3}/r^{1/3})$ и $O(h^{1/2}/r^{1/4})$ соответственно. Все указанные выше оценки точны.

В работе [14] исследованы так называемые "задачи о скважинах" т.е. задачи об отыскании решения уравнения Лапласа на плоскости с круговым вырезом, на котором заданы граничные условия первого, второго или третьего рода. В случае граничных условий второго рода указанная задача эквивалентна задаче об отыскании фундаментального решения, которая исследована многими авторами (Mc Crea and Whipll, Stohr, Соболев С.Л., Duffin and Shaffer и др.). Для двух других задач построены схемы вида

$$u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} - q(u-u_0)\delta_h(x,y) = 0,$$

где $\delta_h(x,y)$ - сеточный аналог дельта-функции; $u_0$, например, в случае граничных условий первого рода, есть значение искомого решения на внутреннем контуре (на скважине), $q = 2\pi/[\ln\frac{h}{r_c} - \frac{3}{2}\ln r - C]$, $h$ - шаг сетки, $r_c$ -радиус скважины, $C$ - постоянная Эйлера $(h \gg r_c)$. Для погрешности такой схемы верна оценка $O(h^2/r^2)$.

I2. Новые разностные методы для задач с негладкими решениями.

Разработка новых более эффективных численных методов отыскания негладких решений идет по трем направлениям: I) использование обычных схем с выбором в окрестности особых точек специальных полярных сеток, шаг которых по радиусу уменьшается по степенному закону при уменьшении $r$; эти схемы имеют точность $O(h^2)$. (Е.А.Волков [15]), 2) выделение особенности

кальным сеточным аппроксимациям (см.например, Фикс и Стренг [16]) 3) построение на обычных сеточных шаблонах разностных схем, точных на функциях, несущих особенность (И.В.Фрязинов [17] ).

И.В.Фрязинов в [17] уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, $u = u(x_1, x_2)$ в квадрате аппроксимирует разностной схемой

$$\left(a_1 y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \left(a_2 y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2} = -\varphi(x_1, x_2) \qquad (17)$$

с переменными коэффициентами $a_1(x_1, x_2)$, $a_2(x_1, x_2)$, причем $a_1$ и $a_2$ отличны от I, а $\varphi$ – от нуля лишь в конечной окрестности особой точки. Главная часть разложения функции $u(x_1, x_2)$ в окрестности особой точки удовлетворяет разностному уравнению. Эта схема дает хорошую точность как в окрестности особой точки, так и вне ее. Рассмотрим в качестве примера смешанную задачу

$$\Delta u = 0, \quad -1 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1,$$

$$u(x, 0) = \nu^-, \; 0 < x_1 \le 1, \; \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, 0) = \nu^+, \; -1 \le x_1 < 0$$

$$u(x_1, x_2) = \nu(x_1, x_2), \; (x_1, x_2) \in \Gamma \setminus (-1 \le x_1 \le 1, \; x_2 = 0),$$

где $\nu^+$, $\nu^-$ – постоянные, функция $\nu(x_1, x_2)$ согласована с $\nu^{\pm}$, так что $(0,0)$ есть единственная особая точка, в окреотности которой имеет место разложение

$$u(x_1, x_2) = v^0 + C_1 r^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} + C_2 r^{3/2} \sin\frac{3\varphi}{2} + \ldots, \quad v^0 = \nu^- + x_2 \nu^+ .$$

Основную ошибку в решение задачи по классической схеме $y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = 0$ вносит погрешность функции $C_1 r^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2}$. Перейдем к выводу схемы (17) с переменными

коэффициентами $a_1$ и $a_2$ :

$$\left(a_1 y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \left(a_2 y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2} = -\varphi\,, \quad -1 < x_1 < 1\,, \quad x_2 > 0$$

$$\left(a_1 y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \frac{2}{h}\left(a_2 y_{x_2} - \nu^{+}\right) = -\varphi\,, \quad -1 < x_1 < 0\,, \quad x_2 = 0 \qquad (18)$$

$$y = \nu^{-}\,, \quad 0 \le x_1 \le 1\,, \quad x_2 = 0\,, \quad y = \nu(x_1, x_2)\,, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \setminus (-1 \le x_1 \le 1\,, \; x_2 = 0).$$

Коэффициенты $a_1, a_2$ и правую часть $\varphi$ подберем так, чтобы в конечной окрестности точки $(0,0)$ функция $v^0 + C_1 r^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2}$ удовлетворяла бы уравнениям (18), причем $a_1 = a_2 = 1$, $\varphi = 0$ вне конечной окрестности точки $(0,0)$. При этом должно быть: 1) $a_1, a_2 \ge C_1 > 0$, $C_1$ –постоянная, не зависящая от $h$, 2) погрешность аппроксимации $C_2 r^{3/2} \sin\frac{3\varphi}{2}$ была бы мала ( $a_1, a_2 \to 1, \varphi \to 0$ при $r \to \infty$). Оказывается, что этим условиям можно удовлетворить и коэффициенты $a_1, a_2$ и функция $\varphi$ определяются через интегралы от функций $\partial\psi/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial x_2$, $\partial v^0/\partial x_2$, где $\psi = r^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2}$. Так, например

$$(a_1)_{i+1,k} = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{2,k-0,5}}^{x_{2,k+0,5}} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big|_{x_1 = x_{1,i+1/2}} dx_2\right) \Big/ \left(\frac{1}{h}\int_{x_{1i}}^{x_{1,i+1}} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Big|_{x_2 = x_{2,k}} dx_1\right), \quad k \ne 0.$$

Аналогично вычисляются $(a_1)_{i+1,0}$, $(a_2)_{i,k+0,5}$ по $\frac{\partial\psi}{\partial x_2}$. Интегралы от $\partial\psi/\partial x_1$, $\partial\psi/\partial x_2$, $\partial v^0/\partial x_2$ легко вычисляются. Укажем вывод схемы (18). Средний поток от функции $\bar{u} = v^0 + C_1 r^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2}$ есть

$$(w_1)_{i+1/2,k} = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{2,k-0,5}}^{x_{2,k+0,5}} \left(\frac{\partial v^0}{\partial x_1} + C_1\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_1=x_{1,i+0,5}} dx_2 .$$

С другой стороны

$$\frac{\bar{u}_{i+1,k} - \bar{u}_{i,k}}{h} = (\bar{u}_{\bar{x}_1})_{i+1,k} = \frac{1}{h}\int\limits_{(x_1)_i}^{(x_1)_{i+1}} \left(\frac{\partial v^0}{\partial x_1} + C_1\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{x_2=x_{2k}} dx_1 .$$

Исключая из этих соотношений постоянную $C_1$, находим, что $(w_1)_{i+0,5,k} = (a_1\bar{u}_{\bar{x}_1})_{i+1,k} + \tilde{\pi}_{i+0,5,k}$. Аналогично определяется поток $(w_2)_{0,k+0,5} = (a_2\bar{u}_{\bar{x}_2})_{i,k+1} + \tilde{\pi}_{i,k+0,5}$ через отрезок $((x_1)_{i+0,5}, (x_1)_{i+0,5}), x_i = x_{2k}$. Подставляя эти потоки в уравнение баланса для ячейки

$$(x_1)_{i-0,5} < x_1 < x_{1,i+0,5},\ x_{2,k-0,5} < x_2 < x_{2,k-0,5},\ k \neq 0,\ 0 < x_2 < \frac{h}{2},\ k = 0$$

приходим к схеме (I8).

Если взять в схеме (I8) коэффициенты $a_1$ и $a_2$ отличными от I лишь в точках $(-h, 0)$, $(0, h)$, то ошибка на решении $u = r^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2} + r^{3/2}\sin\frac{3\varphi}{2}$ понижается до 3% вместо I9% для классической схемы при $h = \frac{1}{10}$. Подобные же схемы построены и исследованы для уравнения $\Delta u = f$ в многоугольнике [17].

I3. Нелинейные задачи. Принцип полной консервативности. При построении разностных схем заданного качества для линейных уравнений математической физики можно опираться на теорию разностных схем. Так, например, при написании схем для нестационарных задач можно в качестве исходного взять семейство устойчивых схем и в этом семействе искать схему требуемого качества. Для нелинейных задач эффективной общей теории разностных схем нет.

Более того, системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, например, газодинамики, магнитной гидродинамики (МГД) и тем более магнитной радиационной газодинамики (МРГД) настолько сложны, что сами по себе не поддаются детальному теоретическому исследованию в целом (за исключением, быть может, некоторых простейших случаев). Однако, ряд свойств системы можно понять, если рассматривать отдельные уравнения и их линейные модели. Можно выделить отдельные части (блоки, модули) исходной задачи. Так, например, задачу МГД можно разбить на ряд модулей: I) уравнения движения и неразрывности при заданной температуре и электромагнитных полях, 2) уравнение для внутренней энергии (температуры) при заданной скорости и плотности, 3) уравнения Максвелла при заданных плотности и температуре. Очевидно, следует требовать, чтобы вычислительные алгоритмы отражали модульную структуру исходной задачи. Предварительное изучение алгоритмов для каждого из указанных модулей позволяет строить эффективный алгоритм для всей задачи. Пригодность алгоритма для частных случаев, очевидно, является необходимым условием его применимости вообще. Это один из подходов к построению разностных схем – использование блочной структуры исходной задачи. Важное значение для нелинейных задач приобретает формулировка общих принципов и эвристических приемов для получения разностных схем хорошего качества. При этом линейные задачи играют роль моделей для нелинейных задач, что позволяет установить связь и между соответствующими разностными схемами. Например, естественно требовать, чтобы линеаризованные разностные схемы для уравнений газовой динамики хорошо аппроксимировали уравнения акустики – линейную модель дифференциальных уравнений газодинамики.

Такими общими принципами оказались принципы однородности, консервативности [1] и полной консервативности [20] разностных схем.

Требование консервативности является необходимым условием сходимости для линейных задач математической физики в классе разрывных коэффициентов (для задач с негладкими решениями).

Принцип полной консервативности для задач газодинамики и МГД-задач сформулирован в [20] - [21], где указаны простые правила получения полностью консервативных схем (П.К.С.). Применение этих правил позволило получить в [22] П.К.С. для кинетического уравнения Ландау. Практика показала высокую эффективность П.К.С., правильно передающих основные характеристики сплошной среды даже на грубых сетках. Отметим, что некоторые трудности возникли при написании П.К.С. для уравнений газодинамики в переменных Эйлера.

При переходе к многомерным задачам газодинамики возникли технические трудности, связанные с написанием П.К.С. Однако, развитый в последние годы в [23] - [25] вариационный подход к написанию разностных схем, являющийся полудискретным аналогом принципа наименьшего действия Гамильтона-Остроградского, позволил преодолеть эти трудности и упростить процедуру получения П.К.С.

## 14. Применение принципа наименьшего действия для получения П.К.С.

Существование законов сохранения тех или иных физических величин естественно связано с возможностью описания физической системы на основе вариационных принципов, например, принципа наименьшего действия. Пусть дана механическая система, характеризуемая обобщенными координатами $q_i$, $i=1,2,\dots,N$. Функция Лагранжа $L$ системы равна $L=K-\Pi$, где $K$ - кинетическая энергия, $\Pi$ - потенциальная энергия. Приравнивая нулю $\delta S=0$ - первую вариацию функционала действия

$$S=\int_0^t L\,dt$$

получаем систему уравнений Лагранжа

Эти уравнения ковариантны относительно точечного преобразования координат $q_i$, т.е. преобразования вида $q_i = f_i(q_1', q_2', \ldots, q_N')$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где $q_i'$ -новые координаты. (Ковариантность, как известно означает, что форма записи уравнения не меняется при таком преобразовании).

Для описания гидродинамических течений в лагранжевых координатах может быть использован принцип наименьшего действия в форме Гамильтона-Остроградского как непосредственное обобщение его на случай системы с бесконечным числом степеней свободы [30].

Поясним это на примере адиабатического течения сжимаемого газа. Пусть $\Omega$ - область на плоскости $(\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha_1, \alpha_2$ -лагранжевы координаты; пусть $x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $x_2 = x_2(\alpha_1, \alpha_2, t)$ -эйлеровы координаты частиц среды, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ - вектор скорости, $\rho$ - плотность, $\varepsilon$ - удельная внутренняя энергия. Лагранжиан объема $\Omega$ имеет вид

$$\mathcal{L}(t) = \iint_{\Omega} \rho \mathcal{D} \left( \frac{|v|^2}{2} - \varepsilon \right) d\alpha_1 \, d\alpha_2 ,$$

где $\mathcal{D} = \partial(x_1, x_2)/\partial(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ - якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. В силу принципа наименьшего действия движение среды должно происходить так, чтобы функционал действия

$$S(t) = \int_0^t \mathcal{L}(t') \, dt'$$

достигал экстремального значения. Варьирование функционала $S$ проводится при дополнительных условиях неразрывности и адиабатичности

$$\rho \mathcal{D} = \rho_0(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\delta \varepsilon = 1/\rho^2 \, d\rho$$

Приравнивая $\delta S = 0$, получаем уравнения движения.

Чтобы получить соответствующую разностную схему, введем в об-

ласти $\Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ сетку с шагом $h_1$ и $h_2$. Пусть $\omega_h$ –множество ячеек этой сетки, $\bar{\omega}_h$ – множество узлов. Отнесем $\vec{r}(x_1, x_2)$ и $\vec{v}(v_1, v_2)$ к узлам сетки, остальные величины – к центрам ячеек. Лагранжиан $\mathcal{L}(t)$ аппроксимируем следующим выражением

$$\mathcal{L}_h = \sum_{(i_1, i_2) \in \omega_h} \sigma_{i_1 i_2} \rho_{i_1 i_2} \left( \overline{\left( \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right)}_{i_1 i_2} - \varepsilon_{ij} \right),$$

где $\sigma_{i_1 i_2}$ –площадь лагранжевой ячейки, а $\overline{\left( \frac{|v|^2}{2} \right)}_{i_1 i_2}$ означает некоторое среднее значение кинетической энергии по соседним с центром $(i_1, i_2)$ ячейки узлам сетки $\bar{\omega}_h$ (обычно используется среднее значение по четырем узлам). Выражение для $\mathcal{L}_h$ фактически инвариантно относительно выбора системы координат "Метрика" пространства входит только через конкретное выражение для объема ячейки $\sigma_{i_1 i_2}$. Вариация функционала действия $S = \int_0^t \mathcal{L}_h \, dt$ вычисляется при дополнительных условиях, которыми являются разностные аналоги закона сохранения массы и условия адиабатичности.

В результате получается дифференциально-разностная схема (разностная по $\alpha_1$ и $\alpha_2$) второго порядка аппроксимации; она обладает свойством полной консервативности. В самом деле, вид уравнения энергии получается непосредственно из интеграла адиабатичности, а все законы сохранения являются следствием групповых свойств функционалов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_h$ (теорема Э.Нетер), которые не содержат явной зависимости от времени и пространственных координат.

Заменяя производные по времени разностными отношениями и беря правые части, как обычно, с весами, получим при определенных значениях весовых множителей полностью консервативные разностные

схемы. Изложенный подход без каких-либо изменений переносится на случай любого числа пространственных переменных, независимо от выбора системы координат.

Для МГД-течения идеально проводящего сжимаемого газа в магнитном поле изложенный выше гамильтонов формализм сохраняет силу, при этом меняется выражение для лагранжиана; к $\mathcal{E}$ добавляется энергия магнитного поля и, кроме того, добавляется еще одна связь - условие вмороженности магнитного поля в идеально проводящую среду.

Качество разностной схемы для расчета разрывных решений газодинамики и магнитной гидродинамики зависит от выбора искусственной вязкости (диссипатора); обычно требуется, чтобы введение вязкости не нарушало консервативности схемы и приводило к размазыванию фронта ударной волны на небольшое ( $\sim 3$ ) число ячеек сетки, оставляя при этом профили в окрестности фронта по возможности монотонными. В дополнение к этому будем требовать, чтобы при введении искусственной вязкости собственные колебания линеаризованных разностных уравнений затухали, оставаясь подобными самим себе или, другими словами, введение искусственной вязкости не должно приводить к расщеплению собственных функций линеаризованных операторов (принцип спектрального согласования). Такое требование определяет линейную часть искусственной вязкости единственным образом. Коэффициент вязкости , как функцию ячейки сетки, можно выбирать из условия наибыстрейшего затухания самой высокочастотной компоненты спектра собственных колебаний какой-либо парциальной механической системы ( системы ячеек сетки), включающих рассматриваемую ячейку. Искусственные диссипаторы для многомерных МГД-уравнений, полученные на основе принципа спектрального согласования, оказываются зависящими от значений термодинамических величин в рассматриваемом МГД-течении, от конфигурации

расчетных сеток, а также от величины магнитного поля. Они имеют ковариантную форму записи, не зависящую ни от числа измерений, ни от системы координат. Вводятся эффективное давление $p^*$ и эффективная напряженность магнитного поля $\vec{H}$, равные

$$p^* = p + q \ , \quad \vec{H}^* = \vec{H} + \vec{Q} \ ,$$

где $q$ -газодинамическая составляющая искусственного диссипатора; $\vec{Q}$ - вектор магнитной составляющей диссипатора. Они вычисляются по формулам

$$q = -\varkappa \frac{c^2 \rho}{V} \frac{dV}{dt} \ , \quad \vec{Q} = -\varkappa \frac{d\vec{H}}{dt} \ ,$$

где $c$ -адиабатическая скорость звука, $\varkappa$ - размерный коэффициент, равный $\varkappa_{ij} = 2/\omega^*_{ij}$, $\omega^*_{ij}$ - максимальная частота собственных колебаний какой-либо механической системы, включающей ячейку $(i,j)$, $V$ - объем ячейки.

Таким образом, вариационно-разностные схемы для многомерных задач газодинамики и магнитной газодинамики:

- имеют второй аппроксимации на гладких решениях,
- обладают свойством полной консервативности,
- имеют ковариантную форму записи, что упрощает создание многоцелевых пакетов прикладных программ, а также обеспечивает возможность расчета в системах координат, автоматически подстраивающихся к расчитываемому потоку,
- легко алгоритмизируются,
- акустическое приближение для этих схем описывает акустическое приближение дифференциальной модели сплошной среды со вторым порядком точности; соответствующие линеаризованные операторы обладают свойством самосопряженности и неотрица-

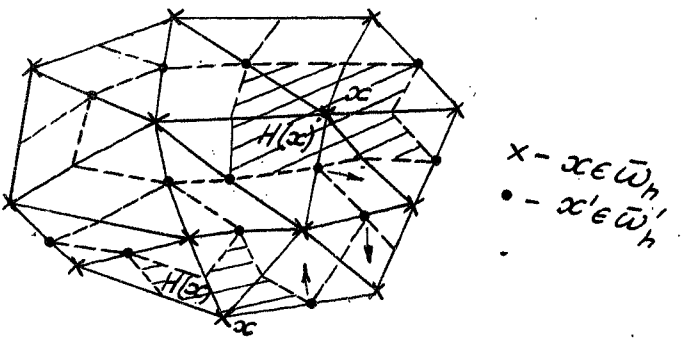
тельности, что делает возможным использование эффективных итерационных алгоритмов решения неявных уравнений (а также обеспечить устойчивость путем введения неявности с определенным весом).

Вариационный подход можно использовать также и при построении численных методов для уравнений теплопроводности или диффузии, описывающих большое число физических процессов. Один из наиболее простых вариантов вариационного метода состоит в том, что уравнение заменяется системой $\partial u/\partial t + \operatorname{div}\vec{W} = 0$, $\vec{W} + k\,\mathrm{grad}\,u = 0$. Первое уравнение трактуется как параметрически меняющаяся во времени связь, а второе уравнение является следствием требования стационарности некоторого функционала

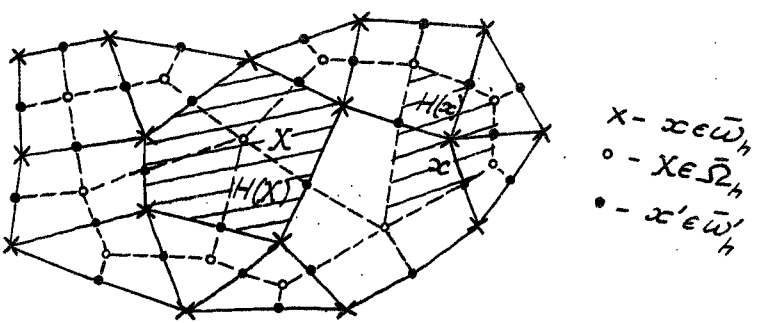
$$F(W) = \int_{\Gamma} \frac{|W|^2}{K}\, d\sigma + 2\int_{G} u \operatorname{div}\vec{W}\, dG,$$

где $G$ -область, $\Gamma$ - ее границе. Отправляясь отсюда, можно получить разностную схему второго порядка аппроксимации на криволинейных сетках, оператор которой является самосопряженным и знакоопределенным, если исходный дифференциальный оператор $Lu = \operatorname{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)$, обладая этими свойствами в $G+\Gamma$. Вариационный способ определения потоков фактически обеспечивает сходимость итерационного процесса их нахождения и консервативность схемы на любой итерации.

Вариационно-разностные схемы для многомерных задач магнитной гидродинамики использовались для решения ряда модельных и прикладных задач о развитии неустойчивости Релея-Тейлора в несжимаемой жидкости [26], о магнитной кумуляции [27], о симметрии сферических мишеней при сжатии их лазерным излучением [28], о транспортировке плазменного сгустка в магнитном соленоиде [29].




Фиг. 1




Фиг. 2

## Литература


1 А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. "Наука", Москва, 1971.

2 А.А.Самарский и А.В.Гулин. Устойчивость разностных схем. "Наука", Москва, 1973.

3 А.А.Самарский. Теория разностных схем. "Наука", Москва, 1977.

4 А.В.Гулин и А.А.Самарский. О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости разностных схем. Матем.сборник, 1976, 99 (141), № 3, 299-330.

5 В.И.Лебедев, С.А.Финогенов. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном процессе. Журн.вычислит.мат. и мат.физ. (ЖВМ и МФ), 11(1971), № 2, 425-438.

6 Е.С.Николаев, А.А.Самарский. Метод Ричардсона, устойчивый при любом числе итераций. Препринт Института прикладной математики АН СССР, № 23, 1972.

7 Е.С.Николаев, А.А.Самарский. Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона. ЖВМ и МФ, 12(1972), № 4, 960-973.

8 В.И.Лебедев, С.А.Финогенов. Решение проблемы упорядочения параметров в чебышевских итерационных методах. ЖВМ и МФ, 13(1973), № 1, 18-33.

9 А.Б.Кучеров и Е.С.Николаев. Попеременно-треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в прямоугольнике. ЖВМ и МФ, 16(1976), № 5, 1164-1174.

10 А.Б.Кучеров, и Е.С.Николаев. Попеременно- треугольный итерационный метод решения сеточных эллиптических уравнений в произвольной области. ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 3, 664-675.

11 P. Laasonen On the discretization errors for the Dirichlet problem in a plane region with corners Ann Acad Sci. Fenn. sec A, 1961, T. 408, 1-16

12 В.Б.Андреев, Е.Ю.Архипова. Об использовании разностных схем для решения уравнения Лапласа с разрывными граничными условиями I-го рода. ЖВМ и МФ (1975), № 6, 1466-1481.

13 В.Б.Андреев. Смешанная задача для сеточного уравнения Лапласа в полуплоскости. Доклады АН СССР, 1977, 234, № 5, 997-1000.

14 В.Б.Андреев, С.А.Кряквина. О фундаментальном решении однопараметрического семейства разностных аппроксимаций оператора Лапласа на плоскости. ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 2, 343-355.

15 Е.А.Волков. Метод регулярных составных сеток решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа. Доклады АН СССР, 1971, 196, № 2, 266-269.

16 Г.Стренг, Д.Фикс. Теория метода конечных элементов, "Мир", Москва, 1977.

17 И.В.Фрязинов. Разностные схемы для уравнения Пуассона и уравнения теплопроводности в многоугольнике при различных типах краевых условий на различных частях границы. Препринт ИПМ АН СССР, № 25 (1977).

18 И.В.Фрязинов. Об одной разностной аппроксимации задач для эллиптического уравнения. ЖВМ и МФ, 16(1976), № 1, 102-108.

19 А.А.Самарский, И.В.Фрязинов. О разностных аппроксимациях задач математической физики. Успехи мат.наук, 31, № 6(192), 1976, 167-197.

20 Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики. ЖВМ и МФ, 10(1970), № 4, 990-998.

21 А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные схемы газовой динамики. "Наука", Москва, 1975 г.

22 А.В.Бобылев, В.А.Чуянов. О численном решении кинетического уравнения Ландау. ЖВМ и МФ, 16(1976), № 2, 407-416.

23 В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике. Доклады АН СССР, 235(1977), № 6.

24 В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики", Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1976 г.

25 Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Об искусственной вязкости и устойчивости разностных уравнений газовой динамики. Препринт ИПМ АН СССР, № 70, 1976 г.

26 В.А.Гасилов, В.М.Головизнин, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский. Численное решение одной модельной задачи о релейтейлоровской неустойчивооти. Препринт ИПМ АН СССР, № 119, 1977 г.

27 Р.А.Волкова, В.М.Головизнин, Ф.Р.Улинич, А.П.Фаворский. Численное моделирование обжатия магнитного поля кумулирующим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР, № 111, 1976 г.

28 П.П.Волосевич и др. Двумерные эффекты при лазерном сжатии стеклянных оболочек. Письма в ЖЭТФ, том, 24, вып.5, стр. 283-286, 1976 г.

29 В.М.Головизнин, Т.К.Коршия, Б.Я.Любимов, А.П.Фаворский. "Численное исследование расчета плазмы в магнитном поле". Препринт Института прикладной математики АН СССР, № 61, 1976 г.

30 Seleger R.L. Whitham G.B. Variational principles in continuum mechanics. Proc. Roy. Soc. A 305, 1-25 (1968)