



ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

41
ПРЕПР.
Д-25

В.М. Головизнин, Т.К. Коршия, А.А. Самарский, А.П. Фаворский,

ДВУМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МАГНИТНОЙ
ГИДРОДИНАМИКИ С ТРЕМЯ КОМПОНЕНТАМИ СКОРОСТЕЙ И
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Препринт № 41 за 1978 г.

Москва.

ABSTRACT

The difference schemes for magneto-hydrodynamic equation are obtained from variational principle. The fluid velocity and magnetic field vector were allowed to three components. The difference equations are of the second order approximation and fully conservativ. The special kind of artificial viscosity is constructed by imposing the condition of spectral correlation. The algorithm of calculation of the artificial viscosity coefficient is given in the paper. The example of the numerical calculation of magnetohydrodynamic alfven wave is presented.

АННОТАЦИЯ

В работе из вариационного принципа получены дифференциально-разностные и разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики с тремя компонентами скоростей и магнитного поля. Рассмотрены случаи плоской и осевой симметрии. Полученные дифференциально-разностные и разностные уравнения имеют второй порядок аппроксимации и обладают свойством полной консервативности. Исследованы свойства разностных уравнений акустики. Из условия спектральной согласованности получен вид искусственной вязкости, зависящий от напряженности и ориентации магнитного поля и приведен алгоритм вычисления величины соответствующего коэффициента.

В качестве примера приведен численный расчет вращательной магнитно-гидродинамической волны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	4
§ 1. Дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики	6
§ 2. Дифференциально-разностные и разностные уравнения МГД	10
§ 3. Линеаризованные уравнения. МГД-акустика.	14
§ 4. Искусственные диссипаторы для разностных схем МГД	20
§ 5. Примеры численных расчетов	27
Приложения	29
Литература	36
Иллюстрации	

Во многих задачах магнитной гидродинамики, допускающих двумерную постановку, т.е. такую постановку, когда поля всех физических величин зависят от двух пространственных координат и времени, необходимо учитывать все три компоненты у векторов скорости и магнитного поля.

Одной из простейших задач такого рода является задача о распространении простой альфвеновской (вращательной) волны. В простой альфвеновской волне [12], составляющая магнитного поля, лежащая в плоскости перпендикулярной направлению ее распространения, поворачивается на некоторый угол, оставаясь постоянной по величине. Соответствующим образом вращается и вектор тангенциальной составляющей скорости.

В отличие от задачи о простой волне, полностью исследуемой аналитическими методами, подавляющее большинство других задач магнитной гидродинамики требуют для своего решения привлечения эффективных современных численных методов.

От разностных схем МГД, моделирующих многомерные МГД течения, естественно требовать, чтобы они помимо хороших асимптотических свойств, обуславливаемых формальным порядком аппроксимации, хорошо передавали бы особенности рассматриваемой задачи и на грубых сетках. Опыт практических расчетов показывает, что для того, чтобы это условие выполнялось, необходимо, чтобы разностные аппроксимации различных уравнений, описывающих моделируемую среду, были бы в определенном смысле взаимно согласованными, или, другими словами, необходимо, чтобы разностные схемы были бы полностью консервативными [8].

Методом построения разностных схем, обладающих указанными свойствами, является вариационный [1], [2], [4].

Вариационный подход к построению разностных схем двумерной гидродинамики был использован в работе [5], в которой были получены полностью консервативные схемы, обладающие вторым порядком аппроксимации. Во всех случаях, рассмотренных в [5], поля скоростей обладали только двумя ком-

понентами, а магнитные поля лежали либо в плоскости течения, либо перпендикулярно ей.

Эффективность численных методов решения магнитогидродинамических задач определяется не только качеством самих разностных уравнений, но и в большой степени зависит от выбора подходящих искусственных диссипаторов (псевдовязкости) [8]. Для двумерных разностных схем МГД, полученных в [5], искусственные диссипаторы были построены в работе [6] из условия согласования со спектральными свойствами соответствующих разностных акустических операторов [3].

Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [5], [6] на случай наличия у векторов магнитного поля и скоростей всех трех составляющих.

В качестве примера приведены результаты численного расчета вращательной магнитогидродинамической волны.

Авторы благодарят В.Ф. Тишкина, В.А. Гасилова и Р.А. Волкову за помощь при проведении численного расчета и оформление этой работы.

§ 1. Дифференциальные уравнения магнитной гидродинамики.

Рассмотрим трехмерное магнитогидродинамическое течение бесконечнопроводной недиссипативной жидкости. Пусть G_0 - область в пространстве лагранжевых переменных $\alpha\beta\gamma$; $x = x(\alpha, \beta, \gamma, t)$, $y = y(\alpha, \beta, \gamma, t)$, $z = z(\alpha, \beta, \gamma, t)$ - декартовы координаты частиц среды в момент времени t .

Будем предполагать, что якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} > 0$$

всюду в области G_0 : Обозначим через $\vec{v} = (u, v, w)$ вектор скорости, а через $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ - вектор напряженности магнитного поля, "вмороженного" в среду. Лагранжиан среды может быть записан в следующей форме [5]:

$$Z(t) = \iiint_{G_0} \rho \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} - \epsilon - \frac{\vec{H}^2}{8\pi\rho} \right) d\alpha d\beta d\gamma \quad (1.1)$$

где ρ и ϵ соответственно плотность и удельная внутренняя энергия жидкости.

Условие сохранения массы в лагранжевых координатах имеет вид [10]

$$\rho \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = \rho_0(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.2)$$

Получим условие постоянства магнитного потока через произвольную "жидкую" поверхность Σ (условие вмороженности магнитного поля):

$$\iint_{\Sigma} (\vec{H} \vec{n}) d\Sigma = \iint_{\Sigma} H_z dx dy + H_x dy dz + H_y dz dx \quad (1.3)$$

Здесь \vec{n} - внешняя к Σ нормаль. Используя свойства функциональных определителей, можно показать справедливость соотношений [14]:

$$dx dy = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta + \frac{D(x, y)}{D(\beta, \gamma)} d\beta d\gamma + \frac{D(x, y)}{D(\gamma, \alpha)} d\gamma d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 dydz &= \frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)} d\alpha d\beta + \frac{D(y,z)}{D(\beta,\gamma)} d\beta d\gamma + \frac{D(y,z)}{D(\gamma,\alpha)} d\gamma d\alpha \\
 dzdx &= \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)} d\alpha d\beta + \frac{D(z,x)}{D(\beta,\gamma)} d\beta d\gamma + \frac{D(z,x)}{D(\gamma,\alpha)} d\gamma d\alpha
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.4) в (1.3) получим следующие эквивалентные (1.3) условия вмороженности:

$$\begin{aligned}
 H_x \frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)} + H_y \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)} + H_z \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} &= \Phi_{\alpha\beta} \\
 H_x \frac{D(y,z)}{D(\beta,\gamma)} + H_y \frac{D(z,x)}{D(\beta,\gamma)} + H_z \frac{D(x,y)}{D(\beta,\gamma)} &= \Phi_{\beta\gamma} \\
 H_x \frac{D(y,z)}{D(\gamma,\alpha)} + H_y \frac{D(z,x)}{D(\gamma,\alpha)} + H_z \frac{D(x,y)}{D(\gamma,\alpha)} &= \Phi_{\gamma\alpha}
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) представляют собой значения потока магнитного поля через жидкие площадки $d\alpha d\beta$, $d\beta d\gamma$ и $d\gamma d\alpha$ соответственно. Предположим теперь, что все величины, характеризующие течение, зависят от двух пространственных координат x и y . Другими словами

$\partial f / \partial z = 0$, где f произвольная функция. Тогда, можно ограничиться двумя лагранжевыми переменными α и β , считая, что:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \gamma} = \text{const} \quad (1.6)$$

Без ограничения общности можно считать, что G_0 представляет собой цилиндр $G_0 = \{G(\alpha,\beta) \times \gamma, \gamma \in [0,1]\}$ и что $\frac{\partial z}{\partial \gamma} = 1$

В этих предположениях лагранжиан среды (1.1), условие сохранения массы (1.2) и условия вмороженности магнитного поля принимают соответственно вид:

$$\mathcal{L}(t) = \iint_G \varrho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} - \varepsilon - \frac{\bar{H}^2}{8\pi\varrho} \right) d\alpha d\beta \quad (1.1')$$

$$\varrho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} = \varrho_0(\alpha,\beta) \quad (1.2')$$

$$H_x \frac{\partial Y}{\partial \alpha} - H_y \frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\Phi_{\gamma\alpha} \quad (1.3')$$

$$H_x \frac{\partial Y}{\partial \beta} - H_y \frac{\partial X}{\partial \beta} = \Phi_{\beta\gamma} \quad (1.4')$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} \left(H_x \frac{\partial Y}{\partial \alpha} - H_y \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \left(H_x \frac{\partial Y}{\partial \beta} - H_y \frac{\partial X}{\partial \beta} \right) + H_z \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} = \Phi_{\alpha\beta} \quad (1.5')$$

Якобиан перехода $\frac{D(x,y,z)}{D(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$.

Остановимся более подробно на формулах (1.5'). Из соотношений (1.3) - (1.5') нетрудно получить формулы, определяющие \vec{H} в любой момент времени по координатам частиц среды

$$\vec{H} \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \Phi_{\beta\gamma} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \Phi_{\gamma\alpha} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} \Phi_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

Дифференцируя (1.6) по времени приходим к уравнениям индукции магнитного поля в лагранжевых переменных

$$D \frac{d\vec{H}}{dt} = -\vec{H} \frac{dD}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \alpha} \Phi_{\beta\gamma} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \beta} \Phi_{\gamma\alpha} \quad (1.7)$$

где $D = \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$. После подстановки сюда значений потоков (1.5), (1.7) преобразуется к виду:

$$D \frac{d\vec{H}}{dt} = -\vec{H} \frac{dD}{dt} + (\vec{H} \cdot \vec{\nabla}_{\alpha\beta}) \vec{V} \quad (1.7')$$

здесь $\vec{\nabla}_{\alpha\beta} = \left\{ \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}, \frac{D(x,\cdot)}{D(\alpha,\beta)}, 0 \right\}$, $\frac{1}{D} \vec{\nabla}_{\alpha\beta} = \vec{\nabla}$

Умножая (1.7) на \vec{H} , после несложных преобразований можно получить уравнение для изменения магнитной энергии единицы объема

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(D \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) &= -\frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{dD}{dt} + \frac{\vec{H}}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{\nabla}_{\alpha\beta}) \vec{V} = \\ &= -\frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{dD}{dt} + \Phi_{\beta\gamma} \frac{\vec{H}}{4\pi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\vec{H}}{4\pi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Перейдем к выводу динамических уравнений МГД. Примем за независимые вариации $\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ и найдем вариацию функционала действия $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t) dt$. Связь между $\delta \vec{r}$ и вариациями

остальных величин, входящих в (1.7), находится из условий (1.2') и (1.6'), а также из условия изэнтропности течения $\frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = -P$, где $\eta = 1/\epsilon$. Последнее позволяет выразить $\delta \epsilon$ через $\delta \bar{r}$:

$$\delta \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \delta \eta = P \frac{\delta \epsilon}{\epsilon^2} = -\frac{P}{\epsilon_0} \left[\frac{D(\delta x, y)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \delta y)}{D(\alpha, \beta)} \right] \quad (1.9)$$

Приравняв нулю первую вариацию δS , находим динамические уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{dU}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(P + \frac{\bar{H}^2}{8\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial \beta} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(P + \frac{\bar{H}^2}{8\lambda} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial H_x \Phi_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_y \Phi_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} \\ \epsilon_0 \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{H_z \Phi_{\beta\alpha}}{4\lambda} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{H_z \Phi_{\delta\alpha}}{4\lambda} \\ \epsilon_0 \frac{dV}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(P + \frac{\bar{H}^2}{8\lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(P + \frac{\bar{H}^2}{8\lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right] + \frac{\partial H_y \Phi_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_x \Phi_{\delta\alpha}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Уравнения (1.20) можно записать в векторной форме:

$$\epsilon_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}_{\alpha\beta} \left(P + \frac{\bar{H}^2}{8\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\vec{H} \Phi_{\beta\alpha}}{4\lambda} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\vec{H} \Phi_{\delta\alpha}}{4\lambda} \quad (1.20')$$

Таким образом уравнения (1.20), (1.2'), (1.6) совместно с уравнением состояния $P = P(\epsilon, \eta)$ и кинематическими соотношениями $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ образуют полную систему уравнений МГД. Для случая осевой симметрии вывод уравнений проводится аналогично. В приложении приводится система МГД уравнений, записанная в единой форме для цилиндрических и декартовых координат, в обозначениях, принятых в работе [5]. Там же приведены интегральные законы изменения внутренней, кинетической, магнитной и полной энергии для области $G' \subset G$.

§ 2. Дифференциально-разностные и разностные уравнения МГД

Пусть $G(\alpha, \beta)$ представляет собой квадрат, на котором введена прямоугольная сетка с шагами h_α и h_β . Пусть ω_h множество ячеек этой сетки, $\bar{\omega}_h$ множество внутренних узлов. Отнесем \vec{r}, \vec{V} к узлам разностной сетки, остальные вели-

чины - к центрам ячеек. (В том числе и якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым).

Лагранжиан \mathcal{L} аппроксимируем разностным выражением \mathcal{L}^h с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$

$$\mathcal{L}^h = \sum_{(ij) \in \omega} S_{ij} \rho_{ij} \left(\sum_{k \in \mathcal{W}_1(ij)} \frac{\bar{v}_k^2}{8} - \varepsilon_{ij} - \frac{\bar{H}U}{4\lambda \rho_{ij}} \right) \quad (2.1)$$

где $\mathcal{W}_1(ij) = \{(ij), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1)\}$, а S_{ij} - представляет собой объем лагранжевой ячейки

$$S_{ij} = \frac{1}{2} [(x_{i,j} - x_{i,j+1})(y_{i,j+1} - y_{ij}) - (x_{i,j+1} - x_{ij})(y_{i,j} - y_{i,j+1})] \quad (2.2)$$

при этом $S/h_\alpha h_\beta = \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \Big|_{i+1/2, j+1/2} + O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$. Отметим, что в случае симметрий плоского слоя значение объема и площади ячейки совпадают.

Закон сохранения массы (1.2') и условия вмороженности (1.6) с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$ заменяются разностными соотношениями.

$$\rho S = m \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x S = \Phi_K x_K \\ H_y S = \Phi_K y_K \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$H_z S - \Phi_K z_K = \Phi = \text{const} \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \in \mathcal{W}_1(ij) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Повторяющейся индекс K в (2.4) - (2.6) означает суммирование по шаблону $\mathcal{W}_1(ij)$, Φ_K представляет собой магнитные потоки из ячейки к K -ому узлу

$$\Phi_K^i = H_{x_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_K} + H_{y_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial y_K} \quad (2.7)$$

Используя соотношения (1.9) и (2.3) можно получить закон изменения удельной внутренней энергии ячейки (ij)

$$m \frac{d\mathcal{S}}{dt} = -p \frac{d\mathcal{S}}{dt} = -p \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_k} v_k \right) \quad k \in \mathcal{W}_1(ij) \quad (2.8)$$

Условия вмороженности магнитного поля (2.4)–(2.6) после их дифференцирования по времени приводят к разностным уравнениям индукции:

$$s \frac{d\vec{H}}{dt} = -\vec{H} \frac{d\mathcal{S}}{dt} + \Phi_k \vec{v}_k \quad k \in \mathcal{W}_1(ij) \quad (2.9)$$

Из (2.9) нетрудно вывести закон изменения магнитной энергии разностной ячейки в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(s \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) = -\frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{d\mathcal{S}}{dt} + \frac{\Phi_k \vec{H} \cdot \vec{v}_k}{4\pi} \quad (2.10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (2.8)–(2.10) аппроксимируют соответствующие дифференциальные уравнения с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\rho^2)$.

Варьирование функционала действия S_h при ограничениях (2.3)–(2.6) приводит к динамическим уравнениям МГД

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{du}{dt} - \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right)_k \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial x} + \frac{H_{xk} \Phi^k}{4\pi} = 0 \\ M \frac{dv}{dt} - \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right)_k \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial y} + \frac{H_{yk} \Phi^k}{4\pi} = 0 \\ M \frac{dW}{dt} + \frac{H_{zk} \Phi^k}{4\pi} = 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$(ij) \in \bar{\omega}_h \quad \mathcal{W}_2(ij) = \{(ij), (i-1j), (i-1j-1), (ij-1)\}$$

$$k \in \mathcal{W}_2(ij) \quad M = \sum_{k \in \mathcal{W}_2(ij)} \frac{m_k}{4}$$

Уравнения (2.11) справедливы для внутренних узлов разностной сетки и обладают вторым порядком аппроксимации по h_α и h_ρ .

Можно показать, что полученная система разностных уравнений МГД обладает свойством полной консервативности $[\mathcal{E}]$, $[\mathcal{S}]$.

П.2. Переход к разностным уравнениям осуществляется заменой производных по t разностными отношениями. Приведем полностью кон-

сервативную систему разностных уравнений МГД, которая получается центрированием по времени правых частей соответствующих дифференциально-разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} M u_t = \left[P^{(\beta_1)} + \frac{\vec{H}^n \cdot \vec{H}^{n+1}}{8\lambda} \right]_{\kappa} \left(\frac{\partial S_{\kappa}}{\partial x} \right)^{(0.5)} - \frac{H_{x\kappa}^{(0.5)} \Phi^{\kappa}}{4\lambda} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M v_t = \left[P^{(\beta_1)} + \frac{\vec{H}^n \cdot \vec{H}^{n+1}}{8\lambda} \right]_{\kappa} \left(\frac{\partial S_{\kappa}}{\partial y} \right)^{(0.5)} - \frac{H_{y\kappa}^{(0.5)} \Phi^{\kappa}}{4\lambda} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M w_t = - \frac{H_{z\kappa}^{(0.5)} \Phi^{\kappa}}{4\lambda} \end{array} \right. \quad \kappa \in \mathbb{W}_2(ij) \quad (2.14)$$

$$m \varepsilon_t = -P^{(\beta_1)} S_t \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x^n S^n = \Phi_{\kappa} x_{\kappa}^n \\ H_y^n S^n = \Phi_{\kappa} y_{\kappa}^n \\ H_z^n S^n = \Phi_{\kappa} z_{\kappa}^n + \Phi \quad (\Phi_{\kappa}^{n+1} = \Phi_{\kappa}^n = \Phi_{\kappa}^0) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$S \vec{H}_t^{(0.5)} = -\vec{H}^{(0.5)} S_t + \Phi_{\kappa} \vec{V}_{\kappa}^{(0.5)} \quad \kappa \in \mathbb{W}_1(ij) \quad (2.17)$$

$$\vec{H}_t = \vec{V}^{(0.5)} \quad (2.18)$$

$$S^n e^n = m, \quad P^n = P(e^n, \varepsilon^n) \quad (2.19)$$

Здесь как обычно $f_t = \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau_n}$, $f = \beta f^{n+1} + (1-\beta) f^n$. При $\beta_1 = 0.5$ система (1.12)-(2.19) обладает порядком аппроксимации $O(h_x^2 + h_y^2 + \tau_n^2)$

Разностное уравнение для изменения магнитной энергии выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{8\lambda} (S \vec{H}^2)_t = - \frac{\vec{H}^n \cdot \vec{H}^{n+1}}{8\lambda} S_t + \frac{\vec{H}^{(0.5)} \cdot \Phi_{\kappa} \vec{V}_{\kappa} t}{4\lambda} \quad (2.20)$$

П.3. Для того, чтобы поставить магните гидродинамическую задачу, необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве начальных условий следует задать векторное поле скоростей $\vec{V}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})$, скалярные поля термодинамических величин ϱ_{ij} и ε_{ij} и векторное поле напряженности магнитного поля $\vec{H}_{ij} = (H_{xij}, H_{yij}, H_{zij})$.

Компоненты этих полей не являются независимыми. Так магнитное поле должно быть соленоидальным, т.е. его дивергенция должна быть равной нулю, что накладывает определенную связь на компоненты H_x и H_y . Условие соленоидальности можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_2(ij)} \left(H_{xk} \frac{\partial s_k}{\partial x} + H_{yk} \frac{\partial s_k}{\partial y} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_2(ij)} \Phi^k = 0$$

Вследствии того, что Φ_k^{ij} не зависит от времени, магнитное поле, будучи соленоидальным в начальный момент, будет оставаться таковым все время. Если рассматривается несжимаемая жидкость, то в начальный момент следует задавать скорости такими, чтобы их дивергенция равнялась нулю. Моделирование посредством уравнений (2.12)-(2.19) течения несжимаемой жидкости может производиться аналогично тому, как это описано в [2]. Задание граничных условий при учете всех трех компонент скоростей и магнитного поля ничем не отличается от описанного в работе [6].

§ 3. Линеаризованные уравнения. МГД акустика.

Известно, что уравнения МГД допускают существование разрывных решений, в том числе и ударных волн [12]. Для того, чтобы оказалось возможным проведение сквозных расчетов МГД течений (выделения разрыва) необходимо в разностные уравнения вводить искусственную вязкость [8]. Метод получения используемой в настоящей работе псевдовязкости существенно опирается на свойства линеаризованных уравнений МГД. Поэтому, прежде чем перейти к искусственным диссипаторам, кратко остановимся на акустических уравнениях МГД. Следует также отметить, что изучение

свойств разностных уравнений МГД акустики представляет и самостоятельный интерес.

П.1. Пусть среда находится в состоянии равновесия

$$\vec{V} \equiv 0, \quad \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv 0$$

в которые внесены малые возмущения $\vec{\tilde{r}}$, так что

$$\vec{r}_B = \vec{r} + \vec{\tilde{r}}$$

\vec{r}_B - возмущенные значения \vec{r} . В дальнейшем "волной" будем отмечать возмущение соответствующих величин. Определим лагранжиан малых возмущений как главную часть в разложении лагранжиана (11) по степени $\vec{\tilde{r}}$ -

$$\tilde{Z} = \iint \left(\rho D \frac{\tilde{V}^2}{2} - \frac{c^2 \rho}{2D} \tilde{D}^2 - \frac{\tilde{H}^2}{8\pi} D \right) d\alpha d\beta \quad (3.1)$$

здесь c обозначает местную адиабатическую скорость звука.

$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ Зависимости \tilde{D} , \tilde{H} , \tilde{p} от $\vec{\tilde{r}}$ определяются из соотношений (1.1), (1.2') и (1.6):

$$\tilde{D} = \frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(\alpha, \beta)} + \frac{D(x, \tilde{y})}{D(\alpha, \beta)} = D \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \beta} \right) \quad (3.2)$$

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho} = -\frac{c^2 \rho}{D} \tilde{D} \quad (3.3)$$

$$\tilde{H} = -\frac{\tilde{H}}{D} \tilde{D} + \frac{1}{D} \left(\Phi_{\alpha\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} + \Phi_{\beta\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \beta} \right) \quad (3.4)$$

Принимая за независимые вариации $\delta \vec{\tilde{r}} = (\delta \tilde{x}, \delta \tilde{y}, \delta \tilde{z})$ запишем условие стационарности функционала действия $\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{Z}(\alpha) dt$ что приводит к уравнениям, описывающим эволюцию малых возмущений.

$$\rho_0 \frac{d\vec{\tilde{r}}}{dt} = -\nabla_{\alpha\beta} \left(\tilde{p} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \pi} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\Phi \tilde{H}}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\Phi_{\beta\alpha} \tilde{H}}{4\pi} \quad (3.5)$$

В качестве граничных условий следует положить $\frac{\partial \vec{r}}{\partial n} = 0$ на свободной границе и $\vec{r}_n = 0$ на жесткой стенке.

Перепишем (3.5) в операторной форме:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = A \vec{r} \quad (3.6)$$

где $A = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}$. Нетрудно показать справедливость соотношения:

$$\begin{aligned} (A \vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \iint_G [\tilde{x}_2 (A_{xx} \tilde{x}_1 + A_{xy} \tilde{y}_1 + A_{xz} \tilde{z}_1) + \\ &\tilde{y}_2 (A_{yx} \tilde{x}_1 + A_{yy} \tilde{y}_1 + A_{yz} \tilde{z}_1) + \tilde{z}_2 (A_{zx} \tilde{x}_1 + A_{zy} \tilde{y}_1 + A_{zz} \tilde{z}_1)] g D \alpha d\beta = \\ &= (\vec{r}_1, A \vec{r}_2) \end{aligned}$$

$$(A \vec{r}, \vec{r}) = \iint_G \left(\frac{g^2}{2D} \vec{r}^2 + \frac{\vec{r}^2}{8\lambda} D \right) \alpha d\beta$$

Здесь Π – потенциальная энергия среды. Эти соотношения устанавливают самосопряженность и неотрицательную определенность оператора A . В силу этого оператор A обладает счетным множеством собственных функций, а его собственные значения действительны и неотрицательны [9].

П.2. Действуя также, как и в дифференциальном случае, можно получить дифференциально-разностные уравнения динамики малых возмущений в акустическом приближении. Эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d\tilde{u}}{dt} - \left(\tilde{p} + \frac{\tilde{H}\tilde{H}}{8\lambda} \right)_\kappa \frac{\partial s_\kappa}{\partial x} + \frac{\tilde{H}_{x\kappa}\Phi^\kappa}{4\lambda} = 0 \\ M \frac{d\tilde{v}}{dt} - \left(\tilde{p} + \frac{\tilde{H}\tilde{H}}{8\lambda} \right)_\kappa \frac{\partial s_\kappa}{\partial y} + \frac{\tilde{H}_{y\kappa}\Phi^\kappa}{4\lambda} = 0 \\ M \frac{d\tilde{w}}{dt} + \frac{\tilde{H}_{z\kappa}\Phi^\kappa}{4\lambda} = 0 \\ \kappa \in \mathbb{W}_2(ij) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

здесь

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p} = -c^2 \tilde{g} = -\frac{c^2 e}{s} \tilde{s} \\ \tilde{H} = -\frac{\tilde{H}}{s} \tilde{s} + \frac{\Phi_\kappa}{s} \tilde{r}_\kappa \\ \tilde{s} = \frac{\partial s}{\partial x_\kappa} \tilde{x}_\kappa + \frac{\partial s}{\partial y_\kappa} \tilde{y}_\kappa \\ \kappa \in \mathbb{W}_1(ij) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7) аппроксимируют дифференциальные уравнения (3.5) с точностью $O(h_\alpha^2 + h_\beta^2)$.

Заметим, что (3.7) связывает значения \tilde{u}_{ij} , \tilde{v}_{ij} и \tilde{w}_{ij} со значениями \tilde{r}_κ на девятиточечном шаблоне (после подстановки в них \tilde{p} , \tilde{H}). Поэтому для каждого узла (ij) уравнения (3.7) могут быть записаны в матричной форме

$$\tilde{M}_{ij} \frac{d\tilde{r}}{dt^2} + \sum_{\kappa \in \mathbb{W}_3(ij)} A_{ij}^\kappa \tilde{r}_\kappa = 0 \quad (3.9)$$

$$\mathbb{W}_3(ij) = \{(ij), (i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1), (i+1, j-1), (i-1, j+1), (i+1, j+1), (i-1, j-1)\}$$

где

$$\tilde{M}_{ij} = \begin{bmatrix} M_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ij} \end{bmatrix}$$

а A_{ij}^k (при фиксированных (ij)) представляет собой квадратную матрицу размерами 3×3 . Выражения для A_{ij}^k приведены в приложении 4.

Приведем дифференциально-разностные уравнения к операторному виду. Введем блок-вектор $\vec{\Psi}$ с компонентами $\vec{P}_{ij} = (\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij}, \tilde{z}_{ij})$

$$\vec{\Psi} = \{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_M\} = \{\vec{P}_{00}, \dots, \vec{P}_{0M}, \dots, \vec{P}_{N0}, \dots, \vec{P}_{NM}\}$$

Тогда (3.7) записываются в операторной форме

$$\tilde{M} \ddot{\vec{\Psi}} + L_h \vec{\Psi} = 0 \quad (3.10)$$

Оператор L_h представляется блок-матрицей, имеющей структуру, аналогичную структуре девятиточечных разностных операторов с той лишь разницей, что места соответствующих коэффициентов занимают матрицы A_{ij}^k , а \tilde{M} - блочно-диагональный оператор с элементами \tilde{M} . Очевидно \tilde{M} самосопряженный и положительноопределенный оператор. Можно

показать, что оператор L_h является самосопряженным и неотрицательным. Обозначим через λ_k собственные числа L_h (они вещественны и неотрицательны) в порядке возрастания. Представляя возмущение $\vec{\Psi}$ как разложение по базису собственных функций \vec{e}_k оператора L_h

($A'_{ij} = A_{ij}^k / \sqrt{M_{ij} M_k}$) - $\vec{\Psi} = \Psi'_k \vec{e}_k$, получим вместо операторного уравнения (3.10) следующую распавшуюся систему уравнений:

$$\ddot{\Psi}'_k + \lambda_k \Psi'_k = 0, \quad k = 0, \dots, N \times M \quad (3.11)$$

В заключение отметим, что разностные акустические уравнения получаются путем замены производных по времени в (3.7) конечными разностями и соответствующим временным центрированием. Операторная форма записи разностных уравнений будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M} \frac{\vec{\psi}^{n+1} - \vec{\psi}^n}{\tau_n} + \overset{(6)}{L}_n \vec{\psi}^{(6)} = 0 \\ \frac{\vec{\psi}^{n+1} - \vec{\psi}^n}{\tau_n} = \vec{\psi}^{(6_0)} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

где $\vec{\psi} = \{\vec{V}_{00}, \dots, \vec{V}_{NM}\}$

Оператор $\overset{(6)}{L}_n$ имеет структуру аналогичную L_n . Можно показать, что в случае полностью консервативных уравнений $\overset{(6)}{L}_n$ самосопряжен и неотрицателен.

Подобные свойства оператора $\overset{(6)}{L}_n$ позволяют представить линейные колебания дискретной среды в виде набора линейных, не взаимодействующих между собой разностных осцилляторов.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi'_k{}^{n+1} - \psi'_k{}^n}{\tau_n} + \lambda_k \psi'_k{}^{(6_1)} = 0 \\ \frac{\psi'_k{}^{n+1} - \psi'_k{}^n}{\tau_n} = \psi'_k{}^{(6_0)} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

где ψ'_k и ψ'_k коэффициенты разложения $\vec{\psi}$, $\vec{\psi}$ по собственным функциям $\overset{(6)}{L}_n$, а λ_k - собственные значения $\overset{(6)}{L}_n$.

Представление (3.13) особенно удобно для исследований устойчивости разностных уравнений (3.12), поскольку для устойчивости (3.12) необходимо и достаточно [6], чтобы выполнялись условия устойчивости для разностного осциллятора (3.13) с $\lambda^* = \max_k \lambda_k$. Анализ устойчивости уравнения (3.13) достаточно подробно приведен в работе [6]. Следует отметить, что учет всех трех компонент скоростей и магнитного поля не оказывает заметного влияния на условия устойчивости разностных уравнений, приведенные в [6].

§ 4. Искусственные диссипаторы для разностных схем МГД.

П.4. Будем вводить искусственные диссипаторы в разностные уравнения таким образом, чтобы они не приводили к расщеплению собственных колебаний. Иначе, говоря, потребуем чтобы собственные колебания оставались себе

подобными в процессе затухания [3].

Для этого добавим в (3.11) диссипатор в виде $\lambda_{\kappa} \alpha \Psi'_{\kappa}$, где α некоторый коэффициент, величина которого будет определена в дальнейшем. Затем в уравнениях

$$\ddot{\Psi}'_{\kappa} + \lambda_{\kappa} (\Psi'_{\kappa} + \alpha \Psi'_{\kappa}) = 0 \quad (4.1)$$

сделаем обратный переход, при котором (3.11) привелись бы к акустическим уравнениям (3.7). В результате получим следующие модифицированные динамические уравнения акустики:

$$\left\{ \begin{aligned} M \frac{d\tilde{u}}{dt} &= \left(\tilde{p} + \tilde{q} + \frac{\tilde{H}(\tilde{H} + \tilde{Q}\tilde{H})}{4\pi} \right)_{\kappa} \frac{\partial s_{\kappa}}{\partial x} - \frac{\tilde{H}_{x_{\kappa}} + \tilde{Q}\tilde{H}_{x_{\kappa}}}{4\pi} \Phi^{\kappa} \\ M \frac{d\tilde{v}}{dt} &= \left(\tilde{p} + \tilde{q} + \frac{\tilde{H}(\tilde{H} + \tilde{Q}\tilde{H})}{4\pi} \right)_{\kappa} \frac{\partial s_{\kappa}}{\partial y} - \frac{\tilde{H}_{y_{\kappa}} + \tilde{Q}\tilde{H}_{y_{\kappa}}}{4\pi} \Phi^{\kappa} \\ M \frac{d\tilde{w}}{dt} &= - \frac{\tilde{H}_{z_{\kappa}} + \tilde{Q}\tilde{H}_{z_{\kappa}}}{4\pi} \Phi^{\kappa} \end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

$\kappa \in \mathbb{W}_2(ij)$

где

$$\tilde{q} = -\alpha \frac{c^2 \rho}{S} \left(\frac{\partial s}{\partial x_{\kappa}} \tilde{u}_{\kappa} + \frac{\partial s}{\partial y_{\kappa}} v_{\kappa} \right) \quad (4.3)$$

и

$$\tilde{Q}\tilde{H} = -\alpha \left\{ H \left(\frac{\partial s}{\partial x_{\kappa}} \tilde{u}_{\kappa} + \frac{\partial s}{\partial y_{\kappa}} v_{\kappa} \right) - \Phi_{\kappa} \tilde{v}_{\kappa} \right\} \quad (4.4)$$

$\kappa \in \mathbb{W}_1(ij)$

представляет собой искусственные диссипаторы, обладающие вышеуказанными свойствами. Восстановим динамические уравнения МГД, линеаризацией которых на постоянном фоне могут быть получены уравнения (4.2). Они записываются следующим образом.

$$\left\{ \begin{aligned} M \frac{du}{dt} - \left[P + Q + \frac{\vec{H}(\vec{H} + 2\vec{QH})}{8\pi} \right]_{\kappa} \frac{\partial s_{\kappa}}{\partial x} + \frac{H_{x\kappa} + QH_{x\kappa}}{4\pi} \Phi^{\kappa} &= 0 \\ M \frac{dv}{dt} - \left[P + Q + \frac{\vec{H}(\vec{H} + 2\vec{QH})}{8\pi} \right]_{\kappa} \frac{\partial s_{\kappa}}{\partial y} + \frac{H_{y\kappa} + QH_{y\kappa}}{4\pi} \Phi &= 0 \quad (4.5) \\ M \frac{dw}{dt} + \frac{H_{z\kappa} + QH_{z\kappa}}{4\pi} \Phi^{\kappa} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$\kappa \in \mathbb{W}_2(ij)$

здесь

$$\begin{aligned} Q &= -\alpha \frac{c^2 \varepsilon}{s} \frac{ds}{dt} \\ \vec{QH} &= -\frac{\alpha}{s} \left(H \frac{ds}{dt} - \Phi_{\kappa} v_{\kappa} \right) = \alpha \frac{d\vec{H}}{dt} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для того, чтобы введение искусственных диссипаторов не привело к дисбалансу в полной энергии, их необходимо учесть в уравнениях изменения внутренней и магнитной энергии. Будем считать, что изменение кинетической энергии, вызванное наличием Q и \vec{QH} в динамических уравнениях, компенсируется изменением лишь удельной внутренней энергии среды. Таким образом, диссипация не затрагивает магнитную энергию, и, магнитные потоки Φ_{κ}^{ij} сохраняются, как и прежде. После соответствующих изменений, уравнение для внутренней энергии приводится к виду

$$m \frac{ds}{dt} = - \left(P + Q + \frac{\vec{H} \cdot \vec{QH}}{4\pi} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{\vec{QH} \cdot \Phi_{\kappa} \vec{v}_{\kappa}}{4\pi} \quad (4.7)$$

$\kappa \in \mathbb{W}_1(ij)$

Непосредственной проверкой легко убедиться в консервативности динамических уравнений.

П.2. Искусственные диссипаторы для разностных уравнений могут быть построены по аналогии [6]. Динамические уравнения записываются следующим образом:

$$M u_t = (P^{(6_1)} + Q^{(6_1)})_k \frac{\partial s_k}{\partial x} + \frac{\vec{H}_k^{n+1} \cdot (\vec{H} + 2\vec{QH})_k + \vec{H}_k^n \cdot (\vec{H} + 2\vec{QH})_k}{16\pi} \frac{\partial s_k}{\partial y} - \frac{(H_x + QH_x)_k^{(0.5)}}{4\pi} \Phi^k$$

$$M v_t = (P^{(6_1)} + Q^{(6_1)})_k \frac{\partial s_k}{\partial x} + \frac{\vec{H}_k^{n+1} \cdot (\vec{H} + 2\vec{QH})_k + \vec{H}_k^n \cdot (\vec{H} + 2\vec{QH})_k}{16\pi} \frac{\partial s_k}{\partial y} - \frac{(H_y + QH_y)_k^{(0.5)}}{4\pi} \Phi^k \quad (4.8)$$

$$M w_t = - \frac{(H_z + QH_z)_k^{(0.5)}}{4\pi} \Phi^k$$

$$k \in \mathbb{U}_2(j)$$

где

$$Q^{(6_1)} = -\alpha \frac{(c_1)^2}{s^{(6_1)}} \frac{(c_1)^2}{e} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) u_k^{(0.5)} + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) v_k^{(0.5)} \right] \\ \vec{QH}^n = -\alpha^{(c_1)} \left\{ \frac{\vec{H}^n}{s^{(0.5)}} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) u_k^{(0.5)} + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) v_k^{(0.5)} \right] + \frac{\vec{\Phi}_k}{s^{(0.5)}} v_k^{(0.5)} \right\} \quad (4.9)$$

Уравнение для удельной внутренней энергии приобретет вид:

$$m \epsilon_t = - \left(P^{(6_1)} + Q^{(6_1)} + \frac{\vec{H}^{n+1} \cdot \vec{QH} + \vec{H}^n \cdot \vec{QH}}{8\pi} \right) s_t + \frac{\vec{QH} \cdot \vec{\Phi}_k v_k^{(0.5)}}{4\pi} \quad (4.10)$$

П.3. В работе [3] величину коэффициента псевдовязкости предложено находить из условия наиболее быстрого затухания самого высокочастотного собственного колебания дискретной механической системы, определяемой линеаризованными уравнениями (3.13). Нетрудно показать [6], что мак-

симальная скорость диссипации самой высокочастотной гармоники достигается при $\alpha = 2/\sqrt{\lambda^*}$, где λ^* – максимальное собственное число оператора L_{ij} .

При практических расчетах возникает необходимость в каком-либо достаточно просто реализуемом способе оценки λ^* . В работе [6] λ^* предлагается оценивать по максимальным частотам некоторых парциальных механических систем [13], включающих ту расчетную ячейку, для которой ищется величина коэффициента α .

Рассмотрим простейшую парциальную механическую систему, состоящую из одного узла (ij) – остальные узлы разностной сетки при этом считаются жестко закрепленными – и оценим ее максимальную собственную частоту.

Лагранжиан, описывающий колебания узла (ij) относительно жестко закрепленных соседей имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{ij} = & M_{ij} \frac{\tilde{u}_{ij}^2 + \tilde{v}_{ij}^2 + \tilde{w}_{ij}^2}{2} \\ & - \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} \left(\frac{c_k^2 \theta_k}{S_k} \tilde{S}_k^2 + S_k \frac{\tilde{H}_k^2}{4l} \right) \end{aligned}$$

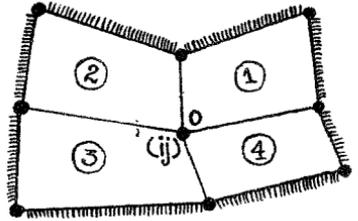


Рис. 1

Поскольку свободным является только узел (ij), то

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &= \frac{\partial S_k}{\partial x_0} \tilde{x}_0 + \frac{\partial S_k}{\partial y_0} \tilde{y}_0 \\ \tilde{H}_{x_k} &= -\frac{H_{x_k}}{S_k} \tilde{S}_k + \frac{\Phi_0^k}{S_k} \tilde{x}_0 \\ \tilde{H}_{y_k} &= -\frac{H_{y_k}}{S_k} \tilde{S}_k + \frac{\Phi_0^k}{S_k} \tilde{y}_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\tilde{H}_{z_k} = -\frac{H_{z_k}}{S_k} \tilde{z}_k + \frac{\Phi_0^k \tilde{z}_0}{S_k}$$

$$k = 1, 2, 3, 4$$

колебания узла (ij) описываются системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \ddot{x}_0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \dot{y}_0} \right) - \frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \ddot{y}_0} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \dot{z}_0} \right) - \frac{\partial \tilde{z}_{ij}}{\partial \ddot{z}_0} = 0$$

Подставляя (4.12) в (4.11) и расписывая (4.13) получим:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{bmatrix} + A_0 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix},$$

$$a_{xx} = \sum_{\kappa=1}^4 \left\{ \frac{(c_H^2 e)_\kappa}{S_\kappa} \left[\frac{\partial s_\kappa}{\partial x_0} \right]^2 - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{H_{x\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial x_0} - \frac{\Phi_\kappa^2}{2S_\kappa} \right] \right\}$$

$$a_{yy} = \sum_{\kappa=1}^4 \left\{ \frac{(c_H^2 e)_\kappa}{S_\kappa} \left[\frac{\partial s_\kappa}{\partial y_0} \right]^2 - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{H_{y\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial y_0} - \frac{(\Phi_0^\kappa)^2}{2S_\kappa} \right] \right\}$$

$$a_{zz} = \sum_{\kappa=1}^4 \frac{1}{4\pi} \frac{(\Phi_0^\kappa)^2}{S_\kappa}$$

$$a_{xy} = a_{yx} = \sum_{\kappa=1}^4 \left\{ \frac{(c_H^2 e)_\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial y_0} \frac{\partial s_\kappa}{\partial x_0} - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{H_{y\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial x_0} + \frac{H_{x\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial y_0} \right] \right\}$$

$$a_{xz} = a_{zx} = - \sum_{\kappa=1}^4 \frac{1}{4\pi} \frac{H_{z\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial x_0}, \quad a_{yz} = a_{zy} = - \sum_{\kappa=1}^4 \frac{1}{4\pi} \frac{H_{z\kappa} \Phi_0^\kappa}{S_\kappa} \frac{\partial s_\kappa}{\partial y_0}$$

где

$$c_H^2 = c^2 + \frac{\bar{H}^2}{4\pi e}$$

Максимальное собственное число λ_{ij}^* , соответствующее квадрату максимальной собственной частоты системы (4.14) оценим по теореме Гершгорина [11]

$$\lambda_{ij}^* = \max \{ (|a_{xx}| + |a_{xy}| + |a_{xz}|), (|a_{xy}| + |a_{yy}| + |a_{yz}|), (|a_{xz}| + |a_{yz}| + |a_{zz}|) \}$$

а коэффициент псевдовязкости α для ячейки с номером (ij) определим следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ij} + \lambda_{i+1j} + \lambda_{i+j+1} + \lambda_{ij+1}}}$$

§ 5. Пример численного расчета.

Рассмотрим движение идеального бесконечно проводящего газа, когда все величины зависят от переменных x , t . Пусть в начальный момент $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$, $p \equiv p_0 = \text{const}$, $u \equiv 0$. Начальные значения компонент скоростей V , W выберем следующим образом:

$$V = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{W_0}{2} \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ 0, & \text{при } x > l \end{cases} \quad (6.1)$$

$$W = \begin{cases} W_0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{W_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{l}\right), & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ 0, & \text{при } x > l \end{cases}$$

Начальное магнитное поле зададим выражениями:

$$H_x \equiv H_{x_0}$$

$$H_y = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ -H_0 \sin \frac{\pi x}{l}, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ 0, & \text{при } x > l \end{cases} \quad (5.2)$$

$$H_z = \begin{cases} -H_0 & \text{при } x < 0 \\ -H_0 \cos \frac{\pi x}{\ell} & \text{при } 0 \leq x \leq \ell \\ H_0 & \text{при } x > \ell \end{cases}$$

Пусть
$$W_0 = \frac{2H_0}{\sqrt{4\pi g_0}}$$

Как нетрудно видеть, в системе отсчета, движущейся относительно лабораторной системы со скоростью $\vec{V}_{отн} = (a_A, 0, W_0)$, где

$$a_A = H_{x_0} / \sqrt{4\pi g_0} \quad \text{выполнены соотношения}$$

$$\begin{cases} H_z^2 = H_y^2 + H_x^2 = \text{const} \\ v_z^2 = v^2 + W^2 = \text{const} \\ \vec{V} = -\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi g_0}} \end{cases} \quad (5.3)$$

Заданные таким образом начальные условия определяют хорошо известное [12] стационарное движение газа, которое называется вращательной или альфвеновской простой волной. В такой волне касательные составляющие векторов \vec{V} и \vec{H} поворачиваются, не изменяя свои величины. Можно показать, что в рассматриваемом случае все фазы волны перемещаются с постоянной скоростью и профиль волны не деформируется. Заметим, что при $\ell = 0$ простая альфвеновская волна переходит во вращательный разрыв.

Рисунки 3-6 иллюстрируют результаты численного расчета простой альфвеновской волны. На рисунках приводятся графики зависимостей величин H_z , H_y , v , W от эйлеровой координаты x в различные моменты времени. Расчет проводился для следующих значений параметров

$$H_0 = 1, \quad g_0 = 1, \quad p_0 = 0.01, \quad H_{x_0} = 2, \quad \ell = 1.$$

Показатель адиабаты $\gamma = 2.$

1. Дифференциальные уравнения МГД. Введем общие для декартовых и цилиндрических координат обозначения:

$$\vec{r} = (\xi, \mu, \zeta), \quad \vec{v} = (u_\xi, u_\mu, u_\zeta), \quad \vec{H} = (H_\xi, H_\mu, H_\zeta)$$

Пусть $\xi = x$, $\mu = y$, $\zeta = z$ для декартовых и $\xi = R$, $\mu = \mathcal{L}$, $\zeta = \varphi$ для цилиндрических координат. Пусть

$$\xi = \xi(\alpha, \beta, t), \quad \mu = \mu(\alpha, \beta, t), \quad \zeta = \zeta(\alpha, \beta, t)$$

Якобиан перехода

$$D = \xi^{\ell-1} \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{\xi^{\ell-1}}{\xi} \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)}$$

($\ell = 1$ при $\vec{r} = (x, y, z)$, $\ell = 2$ при $\vec{r} = (R, \mathcal{L}, \varphi)$)

Кинематические соотношения

$$\frac{d\xi}{dt} = u_\xi, \quad \frac{d\mu}{dt} = u_\mu, \quad \xi^{\ell-1} \frac{d\xi}{dt} = u_\zeta$$

Выражения для потоков магнитного поля:

$$\Phi_{r\alpha} = -\xi^{\ell-1} \left(H_\xi \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} - \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} H_\mu \right)$$

$$\Phi_{\beta\gamma} = \xi^{\ell-1} \left(H_\xi \frac{\partial \mu}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi}{\partial \beta} H_\mu \right)$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)} H_\zeta - \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \Phi_{r\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$$

Из этих соотношений легко определить \vec{H} :

$$D H_{\xi} = \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$$

$$D H_{\mu} = \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \mu}{\partial \beta}$$

$$D H_{\zeta} = (\Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} + \Phi_{\alpha\beta}) \xi^{\ell-1}$$

Лагранжиан системы записывается в виде

$$\mathcal{L}(t) = \iint_{G(\alpha, \beta)} D \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + \left(\xi^{\ell-1} \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] - \varepsilon - \frac{\bar{H}^2}{8\pi\varepsilon} \right\} d\alpha d\beta$$

Динамические уравнения МГД:

$$\varepsilon D \left[\frac{dU_{\xi}}{dt} - \frac{U_{\xi}^2}{\xi} (\ell-1) \right] + \xi^{\ell-1} \nabla_{\alpha} \left(p + \frac{\bar{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{H_{\xi}^2}{4\pi\xi} D(\ell-1) = \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\Phi_{\beta\gamma} H_{\xi}}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\Phi_{\gamma\alpha} H_{\xi}}{4\pi}$$

$$\varepsilon D \frac{dU_{\mu}}{dt} + \xi^{\ell-1} \nabla_{\beta} \left(p + \frac{\bar{H}^2}{8\pi} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\Phi_{\beta\gamma} H_{\mu}}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\Phi_{\gamma\alpha} H_{\mu}}{4\pi}$$

$$\varepsilon D \left[\frac{dU_{\zeta}}{dt} + \frac{U_{\xi} U_{\zeta}}{\xi} (\ell-1) \right] - \frac{H_{\xi} H_{\zeta}}{4\pi\xi} D(\ell-1) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\Phi_{\beta\gamma} H_{\zeta}}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\Phi_{\gamma\alpha} H_{\zeta}}{4\pi}$$

Уравнения индукции магнитного поля

$$D \frac{dH_{\xi}}{dt} = -H_{\xi} \frac{dD}{dt} + \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \beta}$$

$$D \frac{dH_{\mu}}{dt} = -H_{\mu} \frac{dD}{dt} + \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial U_{\mu}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial U_{\mu}}{\partial \beta}$$

$$D \frac{dH_{\zeta}}{dt} = -H_{\zeta} \frac{dD}{dt} + \Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \beta} + (U_{\xi} H_{\zeta} - U_{\zeta} H_{\xi}) \frac{D(\ell-1)}{\xi}$$

Закон изменения энергии магнитного поля

$$\frac{d}{dt} D \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = -\frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{dD}{dt} + \frac{\vec{H}}{4\pi} \cdot \left(\Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \beta} \right) + \frac{u_{\xi} H_{\xi}^2 - u_{\eta} H_{\eta} H_{\xi}}{4\pi \xi} D (\ell-1)$$

2. Интегральные законы сохранения. Рассмотрим некую область $G' \subset G$. Выпишем соответственные законы изменения массы, удельной внутренней, магнитной, кинетической и полной энергии для G' .

$$\frac{d}{dt} \iint_{G'} D \rho_g d\alpha d\beta = \frac{d}{dt} \iint_{G'} \rho_{g0} d\alpha d\beta = 0$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{G'} D \rho_g \varepsilon d\alpha d\beta = - \iint_{G'} P \frac{dD}{dt} d\alpha d\beta$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{G'} D \frac{\vec{H}^2}{8\pi} d\alpha d\beta = - \iint_{G'} \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{dD}{dt} d\alpha d\beta +$$

$$\iint_{G'} \frac{\vec{H}}{4\pi} \cdot \left(\Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta + \iint_{G'} \frac{u_{\xi} H_{\xi}^2 - u_{\eta} H_{\eta} H_{\xi}}{4\pi \xi} D (\ell-1) d\alpha d\beta$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{G'} \rho_g D \frac{u_{\xi}^2 + u_{\mu}^2 + u_{\xi}^2}{2} d\alpha d\beta =$$

$$- \oint_{r'} \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) \xi^{\ell-1} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{r'} \vec{V} \vec{H} \cdot (\Phi_{\beta\gamma} d\beta + \Phi_{\gamma\alpha} d\alpha)$$

$$+ \iint_{G'} \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) \frac{dD}{dt} d\alpha d\beta - \iint_{G'} \frac{u_{\xi} H_{\xi}^2 - u_{\eta} H_{\eta} H_{\xi}}{4\pi \xi} D (\ell-1) d\alpha d\beta$$

$$- \iint_{G'} \frac{\vec{H}}{4\pi} \cdot \left(\Phi_{\beta\gamma} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \alpha} + \Phi_{\gamma\alpha} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{G'} \epsilon_0 \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \epsilon + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) d\alpha d\beta = \oint_{\Gamma'} \frac{\vec{V} \vec{H}}{4\pi} \xi^{\ell-1} (\vec{H} \cdot \vec{n}) dS -$$

$$\oint_{\Gamma} \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) \xi^{\ell-1} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

3. Дифференциально-разностные уравнения МГД.

Динамические уравнения:

$$\begin{cases} M \left[\frac{dU_S}{dt} - (\ell-1) \frac{U_S^2}{S} \right] - \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right)_\kappa \frac{\partial V_\kappa}{\partial S} + \frac{H_{S\kappa} \Phi^\kappa}{4\pi} + \frac{H_{S\kappa}^2 S_\kappa}{4\pi} \frac{\partial \hat{\xi}_\kappa}{\partial S} (\ell-1) = 0 \\ M \frac{dU_\mu}{dt} - \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right)_\kappa \frac{\partial V_\kappa}{\partial \mu} + \frac{H_{\mu\kappa} \Phi^\kappa}{4\pi} + \frac{H_{S\kappa}^2 S_\kappa}{4\pi} \frac{\partial \hat{\xi}_\kappa}{\partial \mu} (\ell-1) = 0 \\ M \left[\frac{dU_S}{dt} - (\ell-1) \frac{U_S U_\mu}{S} \right] + \frac{\hat{\xi}_\kappa H_{S\kappa} \Phi^\kappa}{4\pi} = 0 \end{cases}$$

$\kappa \in \mathbb{M}_2(ij)$

$$\hat{\xi} = V/S, \quad V = \frac{1}{2\ell} \left[(\xi_{ij}^\ell - \xi_{ij}^{\ell-1}) (\mu_{ij\mu} - \mu_{ij}) - (\xi_{ij\mu}^\ell - \xi_{ij\mu}^{\ell-1}) (\mu_{ij\mu} - \mu_{ij}) \right]$$

$$\begin{cases} V H_S = \Phi_\kappa \xi_\kappa \\ V H_\mu = \Phi_\kappa \mu_\kappa \\ V H_S = (\Phi_\kappa \xi_\kappa + \Phi) \hat{\xi} \end{cases} \quad \Phi_\kappa = \frac{V}{S} \left(H_S \frac{\partial S}{\partial \xi_\kappa} + H_\mu \frac{\partial S}{\partial \mu_\kappa} \right)$$

$\kappa \in \mathbb{M}(ij)$

$$V \frac{dH_S}{dt} = -H_S \frac{dV}{dt} + \Phi_\kappa U_{S\kappa}$$

$$V \frac{dH_\mu}{dt} = -H_\mu \frac{dV}{dt} + \Phi_\kappa U_{\mu\kappa}$$

$$V \frac{dH_S}{dt} = -H_S \frac{dV}{dt} + \hat{u} S H_S (\ell-1) + \hat{\xi} \Phi_\kappa \frac{\partial S_\kappa}{\partial t}$$

Уравнения для удельной внутренней энергии и энергии магнитного поля соответственно записываются в виде

$$m \frac{d\epsilon}{dt} = -p \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} V \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = -\frac{\vec{H}^2}{8\pi} \frac{dV}{dt} + \frac{H_x \Phi_k U_{\epsilon k} - H_y \Phi_k U_{\eta k}}{4\pi} + \frac{\hat{U} H_x \delta}{4\pi} + \frac{\hat{S} H_y \Phi_k}{4\pi} \frac{d\delta_k}{dt}$$

6. Матрицы A_{ij}^n . Рассмотрим узел ($\begin{smallmatrix} ij \\ \cdot \end{smallmatrix}$) - рис. 2. Будем использовать локальную индексацию для записи A_{ij}^n . Введем следующие вспомогательные выражения:

$$G_{xx}^{k,n} = \frac{1}{S_k} \left[c_{H_k \theta_k}^2 \frac{\partial \delta_k}{\partial x_n} \frac{\partial \delta_k}{\partial x_0} - \frac{H_{xk}}{4\pi} \left(\Phi_n^k \frac{\partial \delta_k}{\partial x_0} + \Phi_0^k \frac{\partial \delta_k}{\partial x_n} \right) + \frac{\Phi_n^k \Phi_0^k}{4\pi} \right]$$

$$G_{yy}^{k,n} = \frac{1}{S_k} \left[c_{H_k \theta_k}^2 \frac{\partial \delta_k}{\partial y_n} \frac{\partial \delta_k}{\partial y_0} - \frac{H_{yk}}{4\pi} \left(\Phi_n^k \frac{\partial \delta_k}{\partial y_0} + \Phi_0^k \frac{\partial \delta_k}{\partial y_n} \right) + \frac{\Phi_n^k \Phi_0^k}{4\pi} \right]$$

$$G_{zx}^{k,n} = \frac{1}{S_k} \frac{\Phi_n^k \Phi_0^k}{4\pi}$$

$$G_{xy}^{k,n} = \frac{1}{S_k} \left[c_{H_k \theta_k}^2 \frac{\partial \delta_k}{\partial y_n} \frac{\partial \delta_k}{\partial x_0} - \frac{1}{4\pi} \left(H_{yk} \Phi_n^k \frac{\partial \delta_k}{\partial x_0} + H_{xk} \Phi_0^k \frac{\partial \delta_k}{\partial y_n} \right) \right]$$

$$G_{yx}^{k,n} = \frac{1}{S_k} \left[c_{H_k \theta_k}^2 \frac{\partial \delta_k}{\partial x_n} \frac{\partial \delta_k}{\partial y_0} - \frac{1}{4\pi} \left(H_{xk} \Phi_n^k \frac{\partial \delta_k}{\partial y_0} + H_{yk} \Phi_0^k \frac{\partial \delta_k}{\partial x_n} \right) \right]$$

Литература

1. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. "Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике". Докл. АН СССР, 1977, том 235, № 6.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. "Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 65, 1976.
3. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. "Об искусственной вязкости и устойчивости разностных уравнений газовой динамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 70, 1976.
4. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. "Об аппроксимации вариационно-разностных уравнений гидродинамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 34, 1977.
5. Головизнин В.М., Коршия Т.К., Самарский А.А., Фаворский А.П. "О вариационно-разностных схемах двумерной магнитной гидродинамики". Препринт ИПМ АН СССР, № 57, 1977.
6. Головизнин В.М., Коршия Т.К., Самарский А.А., Фаворский А.П., Тишкин В.Ф. "О некоторых свойствах вариационно-разностных уравнений МГД и искусственных диссипативных процессах типа "псевдовязкости"". Препринт ИПМ АН СССР, 1978.
7. Самарский А.А. "Теория разностных схем". "Наука", 1977.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. "Наука", 1975.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. "Наука", 1973.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. "Мир", 1973.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. "Наука", 1966.
12. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. "Наука", 1963.

13. Мандельштам Л.Н. Лекции по теории колебаний. "Наука", 1972 г.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. "Наука", 1966, т. 2.

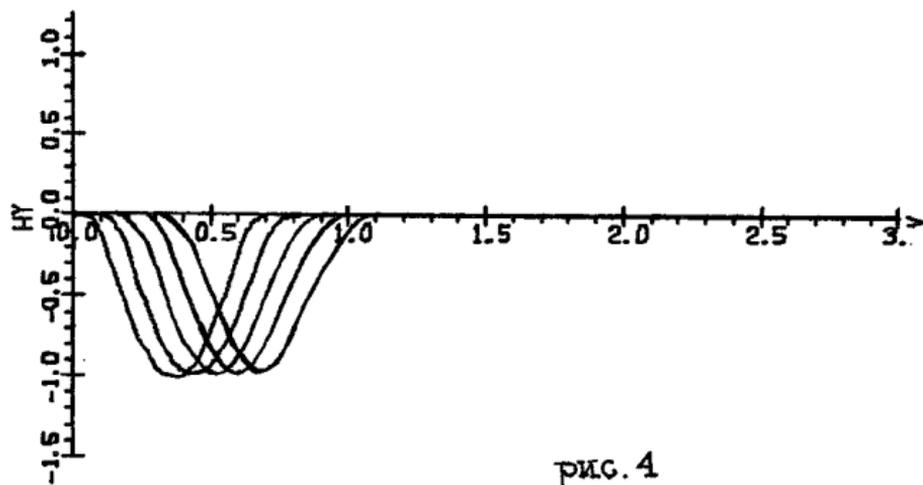


рис. 4

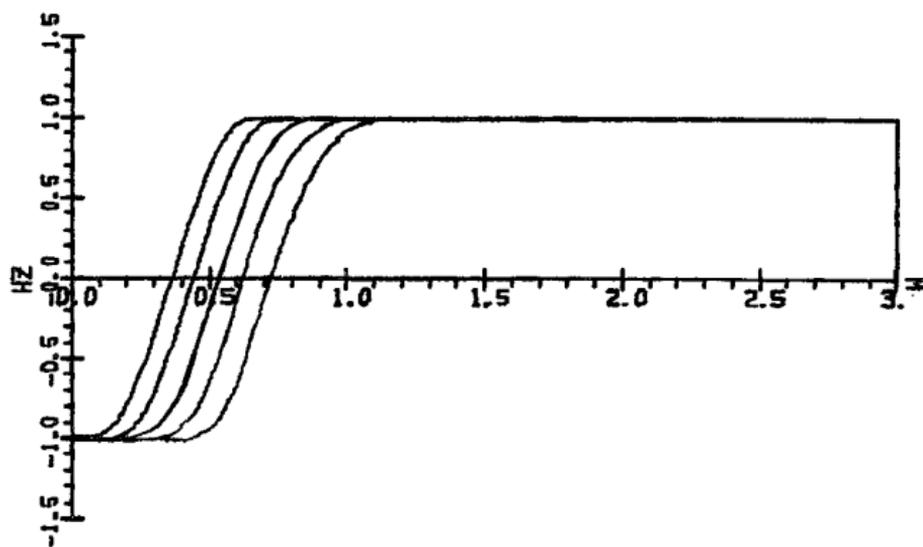


рис. 3

