Д. Г. ГОРДЕЗИАНИ, А. А. САМАРСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК И МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Обсуждается применимость методов суммарной аппроксимации (МСА) для динамических задач термоупругости пластин и оболочек, описанных теорией И. Н. Векуа [1—3]. Изучаются вопросы сходимости и точности построенных моделей МСА.

Введение

Для анализа напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек сведе́ние трехмерных задач к двумерным с использованием различных гипотез и допущений является весьма распространенным способом решения поставленных задач, имеющим длинную историю [4, 5]. Такое сведе́ние вызвано, в частности, тем, что для некоторых двумерных задач сравнительно легко можно применять различные хорошо разработанные аналитические методы. Хотя современные ЭВМ и открывают возможности прямого численного решения трехмерных задач, однако соответствующие алгоритмы являются весьма трудоемкими. Поэтому проблема понижения размерности и моделирования трехмерных задач двумерными и даже одномерными является и сейчас важной проблемой не только в теории оболочек, но и вообще в вычислительной и прикладной математике.

Существует много методов сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным при условии малости одной из геометрических характеристик тела по сравнению с другими характеристиками и тем самым множество вариантов теории пластин и оболочек (см. [3, 4]), обладающих теми или иными качествами.

Так как на ЭВМ можно численно решать сложные двумерные задачи, то имеется возможность рассчитывать сложные двумерные модели пластин и оболочек, достаточно полно учитывающие реальные свойства тела.

К таким моделям относится и теория И. Н. Векуа [1, 2]. Указанная теория обладает следующими качествами: в ней до некоторой степени сохранена сравнительная простота, присущая классической модели; ее система дифференциальных уравнений полностью согласована с физическими краевыми условиями; по ней весьма просто можно строить уточненные двумерные модели исходной трехмерной задачи.

Для построения двумерной модели пластин и оболочек используется разложение искомых полей смещений и напряжений в отрезок ряда Фурье — Лежандра вдоль толщины оболочки. При таком построении все положительные качества трехмерной задачи — самосопряженность оператора, коэрцитивность — сохраняются [6, 7]. Последние свойства позволяют изучать поставленные начально-граничные задачи и исследовать вопросы устойчивости, сходимости и выбора подходящего метода решения (прямого или итерационного) построенных дискретных аналогов (см. [8]).

Итак, пусть трехмерная задача сведена к задаче для системы двумерных дифференциальных уравнений. После этого естественно возникает проблема численного решения полученных задач для широкого класса областей и исходных данных.

Одним из методов построения экономичных приближенных алгоритмов для нестационарных задач математической физики является метод суммарной аппроксимации (МСА) [9—12], опирающийся на представление исходного сложного оператора в виде конечной суммы более простых операторов (принцип аддитивности) [10]. МСА сводит решение исходной задачи со сложным оператором к цепочке задач с простым оператором. В частных случаях МСА сводит решение многомерной задачи к решению конечного числа одномерных задач.

Указанный выше метод является общим методом моделирования сложных задач конечным числом более простых задач. Поэтому целесообразно дать формулировки для абстрактных уравнений в общих функциональных пространствах и после этого показать их применение в рассматриваемых конкретных случаях.

В данной работе рассматриваются динамические задачи теории термоупругости для пластин и оболочек, описываемых теорией Векуа (для простоты изложения рассматриваются призматические оболочки, однако все результаты верны для произвольных оболочек, описываемых теорией [1—3]). Поскольку эти задачи сводятся к абстрактным задачам Коши для уравнений первого и второго порядков, то значительное место занимают вопросы моделирования абстрактных задач Коши на основе МСА. Приводятся некоторые новые типы моделей («локально-одномерных моделей», ЛОМ), исследуется точность ранее известных ЛОМ.

В разделе 1 дается описание метода Векуа для задач термоупругой динамики пластин и оболочек и формулируется адекватная абстрактная задача Коши для системы двух уравнений.

В разделе 2 описаны различные известные и новые модели МСА для абстрактной задачи Коши первого порядка. Приводятся оценки точности, обсуждаются вопросы сходимости.

В разделе 3 рассматриваются вопросы моделирования для абстрактной задачи Коши второго порядка. Приводятся дискретные аналоги моделей МСА и исследуются вопросы их сходимости, точности, устойчивости.

Некоторые алгоритмы, построенные по нижеизложенным моделям МСА, были реализованы на ЭВМ БЭСМ-6 в Институте прикладной математики Тбилисского Государственного Университета.

1. О системе дифференциальных уравнений термоупругой динамики пластин и оболочек

1. В дальнейшем в разделе 1 используется принятое в тензорном анализе правило суммирования — латинские буквы пробегают значения 1, 2, 3; греческие — 1,2 (см., например, [3]). Также принимается

$$v_{,j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}, \qquad v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad v_{ij,k} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k}.$$

Как известно, уравнения теплового и силового баланса равновесия деформируемого тела D, отнесенного к некоторой декартовой системе координат $(0;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$, задаются следующей системой [13]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}^i}{\partial x_i} + c\frac{\partial T}{\partial t} = f(x_1, x_2, x_3, t), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}^i}{\partial x_i} - \rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{\Phi}(x_1, x_2, x_3, t), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{q} = (q^1,\ q^2,\ q^3)$ — вектор плотности тепла, T — температура; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений, $\mathbf{P} = (P^{i1}, P^{i2}, P^{i3})$, P^{ij} — компоненты тензора напряжения, f — количество тепла, производимого в единице объема тела за единицу времени; Φ — вектор объемной силы, $1/c$ — коэффициент температуропроводности, ρ — плотность тела ($\rho = \mathrm{const}$),

$$q^i = \lambda_T T_{,i}; \qquad P^{ij} = 2\,\mu e^{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - 3\alpha_T\,(\lambda + {}^2/_3\mu)\,T\delta_{ij}, \tag{1.3}$$

λ_T — коэффициент теплопроводности, e^{ij} — компоненты тензора деформации, θ — первый инвариант; λ, μ — коэффициенты Ламе, α_T — средний коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} — символ Кронекера;

$$e^{ij} = 0{,}5(u_{i,\,j} + u_{j,\,i}); \qquad \theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

Следуя [1, 2], нетрудно получить уравнения термоупругой динамики пластин и оболочек. В [14] они впервые были применены для расчета термоупругих колебаний нетонких оболочек.

Рассмотрим пластину постоянной толщины $2h$, занимающую область D, с срединной поверхностью Ω, границу которой обозначим через γ; пусть S^+ и S^- — лицевые поверхности пластины, а Γ — боковая граница D:

$$\begin{aligned}
&D = \{x/x = (x_1, x_2, x_3),\ x' = (x_1, x_2) \in \Omega,\ -h \leqslant x_3 \leqslant h\},\\
&\Gamma = \{x/x = (x_1, x_2, x_3),\ x'' \in \gamma, \quad -h \leqslant x_3 \leqslant h\},\\
&S^{\pm} = \{x/x = (x_1, x_2, x_3),\ x' \in \Omega, \quad x_3 = \pm h\}.
\end{aligned}$$

Предположим, что в системе (1.1) — (1.4) $x = (x^1, x^3) \in D$ и $t \in [0, t^*]$.

Пусть $P_k(z)$ — полином Лежандра степени k. Умножим обе части равенств (1.1) — (1.2) на множитель $(k + 0{,}5)\,h^{-1}P_k\,(x_3/h)$ и затем проинтегрируем их по x_3 на отрезке $[-h,h]$. Следуя [2], получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{k}{q}{}^{\alpha}}{\partial x_\alpha} - (2k+1)\,[\overset{k-1}{q^3} + \overset{k-3}{q^3} + \ldots] - c\,\frac{\partial \overset{k}{T}}{\partial t} = \overset{k}{f}{}^*,\\
&q^\alpha = \lambda_T T_{,\alpha}; \qquad \overset{k}{q^3} = \lambda_T\,(2k+1)\,[\overset{k+1}{T} + \overset{k+3}{T} + \ldots]\ (k = 0, 1, \ldots, N);\\
&\overset{k}{f}{}^* = \overset{k}{f} - (k + 0{,}5)\,h^{-1}\,[q_+^3 - (-1)^k q_-^3];\\
&q_\pm^3 \equiv q^3\,(x', \pm h), \qquad x' \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}_i\,(\overset{k}{\mathbf{P}}{}^i) - \rho\,\frac{\partial^2 \overset{k}{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \overset{k}{\mathbf{F}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N),\\
&\overset{k}{\mathbf{D}}_j u = \begin{cases} \overset{k}{u}_{,\alpha}, & \text{если } j = \alpha,\\ -\overset{k}{u}/h, & \text{если } j = 3,\end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{k}{\mathbf{u}} = (2k+1)\,(\overset{k-1}{u} + \overset{k-3}{u} + \ldots) \quad (\overset{k}{u} = 0, \text{ если } k < 0).\\
&\overset{k}{\mathbf{P}} = (\overset{k}{P}{}^{i1}, \overset{k}{P}{}^{i2}, \overset{k}{P}{}^{i3}),\\
&\overset{k}{P}{}^{ij} = \lambda\overset{k}{\theta}\delta_{ij} + 2\mu\overset{k}{e}{}^{ij} - 3\alpha_T\left(\lambda + \frac{2}{3}\,\mu\right)\overset{k}{T}\delta_{ij},\\
&\overset{k}{\theta} = \frac{\partial \overset{k}{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{h}\,\overset{k}{u}_3{}', \qquad \overset{k}{u}_3{}' = (2k+1)\,(\overset{k+1}{u} + \overset{k+3}{u} + \ldots),\\
&\overset{k}{e}{}^{\alpha\beta} = 0{,}5\,(\overset{k}{u}_{\alpha,\beta} + \overset{k}{u}_{\beta,\,\alpha}), \qquad \overset{k}{e}{}^{\alpha 3} = 0{,}5\left(\overset{k}{u}_{3,\,\alpha} + \frac{1}{h}\,\overset{k}{u}_\alpha{}'\right],\\
&\qquad \overset{k}{e}{}^{3,\,3} = \overset{k}{u}_3{}'/h,\\
&\overset{k}{\mathbf{F}} = \overset{k}{\mathbf{\Phi}} + (2k+1)/2h\,\{\mathbf{P}^+ - (-1)^k\,\mathbf{P}^-\};
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$\mathbf{P}^+$, $\mathbf{P}^-$ — напряжения, приложенные к лицевым поверхностям S^+, S^- соответственно. Здесь предполагается, что на S^+ и S^- задаются условия теплообмена, $q^3 = \alpha^* (T - \vartheta)$, ϑ — температура окружающей среды, $\alpha^* = \mathrm{const} > 0$. Всюду функции с индексом k имеют следующий смысл:

$$\overset{k}{u} = (k + 0{,}5)\, h^{-1} \int\limits_{-h}^{+h} u(x', x_3)\, P_k(x_3/h)\, dx_3.$$

2. Таким образом, для расчета термоупругой динамики деформируемого тела имеем систему уравнений (1.5) — (1.7) в $\Omega \times [0, t^*] = Q_{t^*}$. Методика получения краевых условий на γ аналогична процессу получения системы (1.5) — (1.7). Различного вида краевые условия для этой системы могут быть индуцированы исходными краевыми условиями на Γ первых трех типов для температуры (или их комбинацией), а для уравнений упругости могут быть заданы перемещения или напряжения, или их комбинация.

При $t = 0$ заданы начальные условия:

$$\overset{k}{T}(x', 0) = \overset{k}{T}_0, \qquad x' \in \Omega, \tag{1.8}$$

$$\overset{k}{\mathbf{u}}(x', 0) = \overset{k}{\mathbf{u}}_0, \qquad \overset{k}{\mathbf{u}}_t(x', 0) = \overset{k}{\mathbf{u}}_1, \qquad x' \in \Omega. \tag{1.9}$$

Систему (1.5) — (1.7) с соответствующими краевыми условиями и начальными условиями (1.8) и (1.9) запишем в операторной форме

$$\frac{dv}{dt} + B(t)\, v = f(t), \tag{1.10}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)\, u + lv = F(t) \tag{1.11}$$

с начальными условиями

$$v(0) = v_0; \quad v_0 \text{ задано}, \tag{1.12}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t'(0) = u_1, \quad u_0;\ u_1 \text{ заданы}, \tag{1.13}$$

где области определения операторов A, B будут в дальнейшем уточнены.

При различных N в (1.10) — (1.11) A и B будут иметь различный вид, но всегда они остаются операторами эллиптического типа (см., например, [3, 6]). В частных случаях, например при $N = 0$,

$$B = \Delta, \qquad A = L,$$

где $\Delta = \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$, L — двумерный оператор плоской теории упругости, l — линейный оператор, содержащий дифференцирование по x_α ($\alpha = 1, 2$); при $N = 1$ (1.10) разбивается на два уравнения относительно $\overset{0}{T}$ и $\overset{1}{T}$. Для первого уравнения эллиптической частью вновь остается Δ, а для $\overset{1}{T}$ получаем оператор $\Delta - \mathrm{const}\cdot E$ (E — единичный оператор); A будет оператором системы из шести уравнений с шестью неизвестными, которая разбивается на две самостоятельные подсистемы из трех уравнений с тремя неизвестными, причем каждая подсистема представляет оператор плоской теории упругости с добавлением операторов дифференцирования первого порядка по x_α ($\alpha = 1, 2$) и единичных операторов.

Нетрудно просмотреть при любом N вид операторов A, B, l и убедиться в том, что в качестве основного оператора всегда присутствуют операторы L (плоской теории упругости) и Δ.

Таким образом, уравнения, возникающие при моделировании трехмерных уравнений методом И. Н. Векуа, можно представить в виде задачи (1.10) — (1.11) при любом N. Вопрос о численном решении сводится к построению приближенных методов для системы (1.10) — (1.11).

3. Вид операторов A и B естественно подсказывает целесообразность применения МСА. Действительно, как это было показано в п. 2,

$$A = A_1 + A_2, \qquad A_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \qquad (\alpha = 1, 2), \tag{1.14}$$

$$L = L_1 + L_2,$$

$$L_1 = \begin{Vmatrix} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}, & (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 0, & \mu\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{Vmatrix}, \qquad L_2 = \begin{Vmatrix} \mu\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & 0 \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}, & (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Vmatrix}, \tag{1.15}$$

и т. д.; для произвольного N можно найти аналогичные разбиения.

Следуя [9—12, 25], решение системы (1.5) — (1.7) можно аппроксимировать цепочкой уравнений с операторами A_1, A_2, L_1, L_2 «локально-одномерной» моделью (ЛОМ) и далее строить дискретные аналоги.

В дальнейшем для общности рассуждений будем предполагать, что

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \qquad B = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha,$$

где условно назовем A и B сложными или «многомерными», а A_α и B_α простыми, иногда «одномерными».

Такая общая формулировка МСА для системы (1.10) — (1.13) при $p = 3$ охватывает непосредственно и систему трехмерной термоупругости. Таким образом, при различных p получаем различные модели МСА, пригодные для решения как задач теории оболочек, так и задач теории упругости.

Так как уравнение (1.10) самостоятельно, а уравнение (1.11) зависит от его решения, лишь как от уже известной функции, то это позволяет рассматривать вопросы моделирования задачи (1.10) — (1.13) как две самостоятельные задачи: (1.10) — (1.12) и (1.11), (1.13)

2. Некоторые одномерные модели уравнения (1.10)

1. Пусть V и H — гильбертовы пространства, причем $V \subset H$, V всюду плотно в H. Через $((.,.))$ и $(.,.)$, $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ обозначим соответственно скалярные произведения и нормы в V и H. Отождествим H со своим сопряженным, тогда

$$V \subset H \subset V'. \tag{2.1}$$

Рассмотрим конечное t^* и зададимся билинейной формой $b\,(t;\, u,\, v)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) функция $t \to b\,(t;\, u,\, v)$ измерима, $t \in (0, t^*)$; она непрерывна на V и существует такая константа M, что

$$|\,b\,(t;\, u,\, v)\,| \leqslant M\,\|\,u\,\|\,\|\,v\,\| \quad \forall u, v \in V \text{ и почти для всех } t \in [0, t^*];$$

2) существует такая константа ν, что

$$b\,(t;\, u,\, u) \geqslant \nu\,\|\,u\,\|^2 \quad \forall u \in V \text{ почти всюду на } [0, t^*].$$

Из приведенных условий следует, что билинейной форме соответствует линейный оператор B и

$$b(t;\ u, v) = (Bu, v),\ Bu \in V'.$$

Отсюда следует коэрцитивность оператора B.

Введем обозначения:

$U = L^2(0, t^*; V)$, $\mathcal{H} = L^2(0, t^*; H)$, в которых $L^2(0, t^*; X)$ обозначает пространство функций со значениями из X, суммируемых с квадратом на $(0, t^*)$.

Как известно (см., например, [15]), если выполнены условия (2.1), 1), 2), то существует единственное решение $u(t) \in U$ абстрактной задачи Коши

$$\frac{du}{dt} + B(t)u(t) = f(t), \qquad f \in \mathcal{H},\ f \text{ задано},$$

$$u(0) = u_0,\ u_0 \text{ задано},\ u_0 \in H,\ t \in (0, t^*). \tag{2.2}$$

Перейдем к построению ЛОМ для задачи (2.2), предполагая, что оператор $B(t)$ является суммой конечного числа операторов $B_\alpha(t)$:

$$B(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha(t), \qquad D(B_\alpha) = V_\alpha, \quad \prod_{\alpha=1}^{p} V_\alpha = V. \tag{2.3}$$

Представим и правую часть в виде суммы

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha(t), \qquad f_\alpha(t) \in \mathcal{H}. \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что B_α удовлетворяют условиям (2.1), 1), 2) с постоянными M_α, ν_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

На отрезке $[0, t^*]$ введем сетки

$$\omega_\tau = \{t \mid t = t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, K = [t^*/\tau]\} \text{ с шагом } \tau,$$

$$\omega_\tau' = \Big\{t \mid t = t_{j,\alpha} = \Big(j + \sum_{s=1}^{\alpha} \eta_s\Big)\tau, \quad \eta_\alpha > 0, \quad t_{j,0} = t_j, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha = 1,$$
$$1 \leqslant \alpha \leqslant p,\ j = 0, 1, \ldots, K\Big\}.$$

В [9, 10, 12] для задачи (2.2) — (2.4) были предложены и изучены следующие модели:

$$\begin{gathered}\eta_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} + B_\alpha(t) v_\alpha(t) = f_\alpha(t), \qquad t \in \Delta_\alpha = (t_{j,\alpha-1}, t_{j,\alpha}], \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant p,\\ v_\alpha(t_{j,\alpha-1}) = v_{\alpha-1}(t_{j,\alpha-1}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad v_1(0) = u(0) = u_0, \quad j \geqslant 0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{dv_\alpha}{dt} + B_\alpha(t) v_\alpha(t) = f_\alpha(t), \qquad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p,\\ v_\alpha(t_j) = v_{\alpha-1}(t_{j+1}), \qquad 2 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad v_1(t_j) = v(t_j), \quad j > 0,\\ v(t_{j+1}) = v_p(t_{j+1}), \qquad v_1(0) = u_0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1 (ср. [10—12, 16]). *При $\tau \to 0$ функции $v_\alpha(t)$, $\alpha \leqslant 1, 2, \ldots, p$, сходятся к $u(t)$ в $\mathcal{H}$ сильно и в $L_\infty(0, t^*; H)$ слабо; $v_\alpha(t)$ сходится в H сильно к $u(t)$ для всех $t \in [0, t^*]$; если выполнены некоторые условия гладкости $u(t)$, то*

$$\| v_p(t) - u(t) \| = O(\tau) \quad \text{при} \quad t \in \omega_\tau. \tag{2.7}$$

Если же операторы $\{B_\alpha\}$ попарно перестановочны ($B_\alpha B_\beta = B_\beta B_\alpha$, α, $\beta = 1,2, \ldots, p$), то

$$v(t) = u(t) \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{2.8}$$

Это ЛОМ первого порядка точности. Модели такой же точности можно строить и другим способом (см. [16, 17]), например

$$\eta_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} + B_\alpha(t)\, v_\alpha(t) = f_\alpha(t), \qquad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$v_\alpha(t_j) = \bar{v}(t_j), \quad j > 0, \quad v_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = 1,2, \ \ldots, \ p. \tag{2.9}$$

Решением задачи при $t = t_{j+1}$ является функция

$$\bar{v}(t_{j+1}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha v_\alpha(t_{j+1}),$$

где $v_\alpha(t) = v_\alpha^{(j+1)}(t)$ — решение уравнения (2.9) при $t \in (t_j, t_{i+1})$. Начальное значение $\bar{v}(t_j)$ определится из решения той же задачи на предыдущем слое, т. е. при $t \in (t_{j-1}, t_j]$.

Эта модель имеет точность $O(\tau)$ и удобна при построении расчетных схем для параболического уравнения с краевыми условиями второго или третьего рода в случае произвольной области. Для ЛОМ (2.9) справедлива теорема, аналогичная теореме 2.1; при этом оценка (2.7) имеет место, если

$$\left|\frac{d}{dt} B_\beta v_\alpha(t)\right| \leqslant M, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p \quad \forall \in [0, t^*],$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ не зависит от τ.

Для получения моделей и, следовательно, аддитивных схем второго порядка точности по τ можно воспользоваться идеей симметризации [10], на основе которой в [20] построены аддитивные схемы $O(\tau^2)$:

$$\frac{dv_\alpha}{dt} + B_\alpha'(t)\, v_\alpha(t) = f_\alpha(t), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \quad t \in (t_j, t_{j+1}],$$

$$v_\alpha(t_j) = v_{\alpha-1}(t_{j+1}), \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant m, \ v_1(t_j) = v(t_j), \ j > 0, \tag{2.10}$$

$$v_1(0) = u_0, \quad v(t_{j+1}) = v_p(t_{j+1}), \ j = 0,1, \ldots,$$

причем

$$\sum_{\alpha=1}^{m} B_\alpha' = B, \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha' = f(t). \tag{2.11}$$

Укажем две симметризованные ЛОМ

$$m = 2p, \ B_\alpha' = {}^1/_2\, B_\alpha, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \ B_\alpha' = {}^1/_2\, B_{2p+1-\alpha}, \quad p + 1 \leqslant \alpha \leqslant 2p;$$

$$f_\alpha' = {}^1/_2\, f_\alpha, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \ f_\alpha' = {}^1/_2\, f_{2p+1-\alpha}, \ p + 1 \leqslant \alpha \leqslant 2p; \tag{2.12}$$

$$m = 2p - 1, \ B_\alpha' = {}^1/_2\, B_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p - 1, \ B_p' = B_p, \ B_\alpha' = {}^1/_2\, B_{2p-\alpha},$$

$$p + 1 \leqslant \alpha \leqslant 2p - 1 \tag{2.13}$$

и аналогично вычисляются f_α'.

Укажем третью симметризованную модель:

$$\eta_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} + B_\alpha' v_\alpha = f_\alpha', \qquad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m, \quad m = 2p - 1,$$

$$v_\alpha(t_{j,\alpha-1}) = v_{\alpha-1}(t_{j,\alpha-1}), \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant m, \quad v_1(t_j) = v(t_j). \tag{2.14}$$

B_α' и f_α' определяются согласно (2.11).

Для ЛОМ (2.12) — (2.14) справедлива теорема 2.1. Одинаково, если предположить, что решение исходной задачи (2.2) — (2.4) обладает некоторой гладкостью, то можно показать, что имеет место

Теорема 2.2. *Если для всех* $t \in [0, t^*]$ *выполнены условия*

$$\left|B_\alpha B_\beta \frac{d}{dt} u(t)\right| \leqslant M, \qquad |B_\alpha B_\beta B_\gamma u(t)| \leqslant M,$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p$, $M = \text{const} > 0$ *не зависят от* τ, *то решение задачи* (2.12) *и задач* (2.13), (2.14) *сходится к решению* $u(t)$ *задачи* (2.2) *со скоростью* $O(\tau^2)$:

$$\| v_m(t) - u(t) \| = O(\tau^2) \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{2.15}$$

Существует еще одна модель $O(\tau^2)$ (соответствующие ей схемы уступают схемам для (2.12) — (2.14) по экономичности):

$$v(t_{j+1}) = {}^1/_2 (v_p^{(1)}(t_{j+1}) + v_p^{(2)}(t_{j+1})), \tag{2.16}$$

где $v_p^{(1)}(t_{j+1})$ и $v_p^{(2)}(t_{j+1})$ — решения задачи

$$\begin{aligned} &\frac{dv_\alpha^{(1)}}{dt} + B_\alpha v_\alpha^{(1)} = f_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad v_\alpha^{(1)}(t_j) = v_{\alpha-1}^{(1)}(t_{j+1}), \\ &\qquad 2 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad v_1^{(1)}(t_j) = v(t_j), \\ &\frac{dv_\alpha^{(2)}}{dt} + B_\alpha v_\alpha^{(2)} = f_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \quad v_\alpha^{(2)}(t_j) = v_{\alpha-1}^{(2)}(t_{j+1}), \\ &\qquad 2 \leqslant \alpha \leqslant p, \quad v_{(1)}^{(2)}(t_j) = v(t_j), \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $v(t_j)$ определяется согласно (2.17) в результате решения этой задачи на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$.

При $p = 2$ эта модель идейно связана со способом построения разностных схем $O(\tau^2)$ из [22].

Таким образом, мы исследовали модели $O(\tau)$ и $O(\tau^2)$ для абстрактной задачи Коши первого порядка. Эти модели послужили основой для построения экономичных аддитивных разностных схем для уравнения теплопроводности (1.10) в произвольной области.

Исследованию различных интересных аспектов моделирования задач Коши по времени посвящены работы различных авторов (см. библиографию в [8, 23]).

3. МСА для уравнения второго порядка

Рассмотрим пространства V и H такие же, что и в разделе 2, и пусть

3.1. $a(t; u, v)$ — семейство билинейных непрерывных форм на V, $\forall u, v \in V$ функция $t \to a(t; u, v)$ один раз непрерывно дифференцируемая на $[0, t^*]$, $t^* < \infty$;

3.2. $a(t; u, v) = a(t; v; u)$, $\forall u, v \in V$,

$a(t; u, u) \geqslant \nu \| u \|^2$; $\forall u \in V$; $V = \text{const} > 0$;

3.3. $A(t) \in \mathscr{L}(V, V')$ — оператор, определяемый через $a(t; u, v)$.

Наша задача — моделировать уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u(t) = f(t), \qquad t \in (0, t^*), \tag{3.1}$$

с данными Коши

$$u(0) = u_0, \qquad \frac{du}{dt}(0) = u_1, \tag{3.2}$$

где

$$A(t)=\sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha(t);\qquad A_\alpha(t)\in\mathscr{L}(V_\alpha,V_\alpha');\qquad(\alpha=1,\ldots,p),\tag{3.3}$$

$$f(t)=\sum_{\alpha=1}^{p}f_\alpha(t);\qquad f_\alpha(t)\in\mathscr{H},\qquad(\alpha=1,\ldots,p),\tag{3.4}$$

и A_α удовлетворяют условиям, аналогичным 3.1—3.3 с соответствующими константами.

Согласно [15] при $f\in\mathscr{H}$, $u_0\in V$, $u_1\in H$ существует единственное решение задачи (3.1) — (3.2) $u(t)\in V$ и $\frac{du}{dt}(t)\in\mathscr{H}$.

Дискретные и непрерывные задачи, построенные на основе МСА для задачи (3.1) — (3.4), были предложены и изучены в [8, 16, 17, 25, 26]. Напишем сначала две естественные ЛОМ для задачи (3.1) — (3.4):

$$\begin{aligned}
&\eta_\alpha\frac{d^2v_\alpha}{dt^2}+A_\alpha(t)v_\alpha(t)=f(t),\qquad t\in\Delta_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\\
&v_\alpha(t_{j,\alpha-1})=v_{\alpha-1}(t_{j,\alpha-1}),\qquad \frac{dv_\alpha}{dt}(t_{j,\alpha-1})=\frac{dv_\alpha}{dt}(t_{j,\alpha-1}),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant p,\\
&v_1(t_j)=v_p(t_j),\qquad \frac{dv_1}{dt}(t_j)=\frac{dv_p}{dt}(t_j)\ \text{ при }\ \alpha=1,\quad j=1,2,\ldots,\\
&v_1(0)=u_0,\qquad \frac{dv_1}{dt}(0)=u_1.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Решением задачи является функция

$v(t)=v_{(p)}(t)$.

Вторая ЛОМ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\eta_\alpha\frac{d^2v_\alpha}{dt^2}+A_\alpha(t)v_\alpha(t)=f_\alpha(t),\qquad t\in(t_j,t_{j+1}),\\
&v_\alpha(t_j)=v_{\alpha-1}(t_{j+1}),\qquad \frac{dv_\alpha}{dt}(t_j)=\frac{dv_{\alpha-1}}{dt}(t_{j+1}),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant p,\\
&v_1(t_j)=v(t_j),\qquad \frac{dv_1}{dt}(t_j)=\frac{dv}{dt}(t_j),\quad v_1(0)=u_0,\\
&\frac{dv_1}{dt}(0)=u_1,\qquad v(t)=v_p(t),\quad t\in(t_j,t_{j+1}).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Обоснование этих моделей возможно лишь для специального класса задач ($V=V_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$). При достаточной гладкости решения одномерных задач и исходной задачи можно показать, что (3.5) и (3.6) имеют точность $O(\tau)$. Непосредственное построение аддитивных схем по моделям (3.5) и (3.6) не является очевидным.

В [6, 10] были изучены ЛОМ $O(\tau)$ точности; их решения сходятся при $\tau\to0$ для весьма широкого класса задач.

Итак, рассмотрим ЛОМ

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2v_\alpha(t)}{dt^2}+A_\alpha(t)v_\alpha(t)=f_\alpha(t),\qquad t\in(t_j,t_{j+1}];\\
&v_\alpha(t)=v_\alpha^{(j)}(t_j),\qquad \frac{dv_\alpha}{dt}(t_j)=\frac{dv_\alpha}{dt}(t_{j+1}),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant p;\\
&v_1(t_j)=v_1^{(j)}(t_j),\qquad \frac{dv_1}{dt}(t_j)=\frac{dv_p^{(j)}}{dt}(t_j),\quad \alpha=1;
\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$v_1^{(1)}(0)=u_0,\qquad \frac{dv_1^{(1)}}{dt}=u_1,$$

где $v_\alpha^{(j)}(t)$ — решение этой задачи при $t\in(t_{j-1},\ t_j]$.

Справедлива следующая

Теорема 3.1 (см. [10, 16]). *Если для A_α и f_α ($\alpha=1,2,\ldots,p$) выполнены условия 3.1—3.3, (3.3) и (3.4), то при $\tau\to 0$ решение задачи (3.7) сходится слабо к решению задачи (3.1) — (3.4):*

$$v_\alpha(t)\to u(t)\ \text{ в }\ L_\infty(0,t^*;V_\alpha),\qquad \frac{dv_\alpha}{dt}(t)\to\frac{du}{dt}(t)\ \text{ в }\ L_\infty(0,t^*;H),$$

$$v_\alpha(t)\to v(t)\ \text{ в }\ V_\alpha,\qquad \frac{dv_\alpha}{dt}\to\frac{du}{dt}\ \text{ в }\ H;$$

если же

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}A_\alpha u(t)\right|\leqslant M,\qquad M=\mathrm{const}>0\ \textit{не зависит от}\ \tau,$$

то имеет место оценка

$$\|v_p(t)-u(t)\|+\left\|\frac{dv_p}{dt}(t)-\frac{du}{dt}(t)\right\|=O(\tau),\qquad \tau\in\omega_\tau.$$

Построенные по (3.7) дискретные схемы имеют точность $O(\tau)$. В [21, 26, 27] была предложена модель

$$\begin{gathered}\eta_\alpha v_\alpha''(t)+A_\alpha(t)\,v_\alpha(t)=f_\alpha(t),\quad t\in(t_j,\ t_{j+1}),\ 1\leqslant\alpha\leqslant p;\\ v_\alpha(t_j)=\bar v(t_j),\qquad v_\alpha'(t_j)=\bar v'(t_j),\quad \alpha=1,2,\ldots,\\ \bar v(0)=u_0,\qquad \bar v'(0)=0,\quad \bar v(t)=\sum_{\alpha=1}^{p}\eta_\alpha v_\alpha(t).\end{gathered}\tag{3.8}$$

Функция $\bar v(t)$ и является решением.

При $V=V_\alpha$ ($\alpha=1,2,\ldots,p$) можно показать, что

$$\|\bar v(t)-u(t)\|=O(\tau^2),\tag{3.9}$$

т. е. ЛОМ (3.8) имеет второй порядок точности. Построенные на основе (3.8) аддитивные разностные схемы имеют точность $O(\tau^2)$ в общем случае.

Приведем еще две ЛОМ, с помощью которых можно объяснить некоторые свойства локально одномерных схем из [25]:

$$\begin{gathered}v_\alpha''+A_\alpha v_\alpha=f_\alpha(t),\qquad t\in\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},\ t_{j+1+\frac{\alpha-1}{p}}\Big],\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant p,\\ v_\alpha\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big)=v_\alpha^{(j)}\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big),\\ v_\alpha'\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big)=\begin{cases}v_\beta'^{(j)}\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big), & \alpha\leqslant\beta,\ j\geqslant 1,\\ v_\beta'\Big(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big), & \alpha>\beta,\end{cases}\\ v_\alpha\Big(\frac{\alpha-1}{p}\tau\Big)=u_0,\quad v_\alpha'\Big(\frac{\alpha-1}{p}\tau\Big)=u'\Big(\frac{\alpha-1}{p}\tau\Big),\quad 1\leqslant\alpha\leqslant p,\end{gathered}\tag{3.10}$$

где $v'=dv/dt$, а $v_\alpha^{(j)}(t)$ — решение той же задачи на интервале $t\in\Big(t_{j-1+\frac{\alpha-1}{p}},\ t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\Big]$, $\beta=1,2,\ldots,p$, p — любое число.

Решением задачи (3.10) является функция $v_1(t)$.

Для второй ЛОМ имеем

$$v_\alpha'' + A_\alpha v_\alpha = f_\alpha(t), \qquad t \in (t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+1+\frac{\alpha-1}{p}}], \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant p,$$

$$v_\alpha(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \begin{cases} v_\beta^{(j)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), & \alpha \leqslant \beta, \\ v_\beta(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), & \alpha > \beta, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$v_\alpha'(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = \begin{cases} v_\beta'^{(j)}(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), & \alpha \leqslant \beta, \quad j \geqslant 1, \\ v_\beta'(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}), & \alpha > \beta, \end{cases}$$

$$v_1(0) = 0, \qquad v_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{p}\tau\right) = v_{\alpha-1}\left(\frac{\alpha-1}{p}\tau\right),$$

$$u_1'(0) = u'(0), \qquad v_\alpha'\left(\frac{\alpha-1}{p}\tau\right) = v_{\alpha-1}'\left(\frac{\alpha-1}{p}\tau\right), \qquad 2 \leqslant \alpha \leqslant p,$$

$v_1(t)$ — решение задачи.

Для (3.10) верна теорема 3.1, а для (3.11) — оценка

$$\| v_1(t) - u(t) \| = O(\tau^2), \quad t \in \omega_\tau.$$

Рассмотрим теперь аддитивные разностные схемы, построенные на основе моделей (3.9) — (3.11). Аппроксимируя каждое из уравнений (3.9) номера α обычной трехслойной схемой и учитывая, что

$$y_\alpha{}^j = y' = y, \qquad y_\alpha = y_\alpha^{j+1}, \quad y_\alpha^{j-1} = y^{j-1} = \check{y},$$

получим аддитивную схему для задачи (3.2) — (3.4):

$$(E + \varkappa_\alpha \tau^2 R_\alpha) \frac{y_\alpha - 2y + \check{y}}{\varkappa_\alpha \tau^2} + Ay = \varphi_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.12}$$

где R_α *— регуляризатор* (см. [8]), φ_α *— аппроксимация* f_α, $\varkappa_\alpha = 1/\eta_\alpha$, $\sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha = 1, \eta_\alpha > 0$. *Решение* y^{j+1} *на новом слое по аналогии с* (3.9) *определяется по формуле*

$$y^{j+1} = \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha y_\alpha^{j+1}. \tag{3.13}$$

Нетрудно получить условие устойчивости схемы (3.12), (3.13) (см. [21, 26]), предполагая, что линейный оператор A_α: $H \to H$, H — гильбертово пространство и

$$A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad R_\alpha = R_\alpha^* \geqslant 0, \quad R_\alpha A_\beta = A_\beta R_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p). \tag{3.14}$$

Из (3.12) после элементарных преобразований найдем

$$y_{\bar{t}t} \tilde{A} y = \tilde{\varphi}, \qquad y_{\bar{t}t} = (y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1})/\tau^2,$$

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}_\alpha, \qquad \tilde{A}_\alpha = (E + \eta_\alpha \tau^2 R_\alpha)^{-1} A_\alpha, \quad \tilde{\varphi} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{\varphi}_\alpha, \tag{3.15}$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha = (E + \eta_\alpha \tau^2 R_\alpha)^{-1} \varphi_\alpha.$$

В силу общей теории устойчивости схема (3.15) устойчива при $R_\alpha = \sigma_\alpha A_\alpha$, если $E > \tau^2/4\, \tilde{A}$ или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\tau^2 \| A_\alpha \|}{1 + \sigma_\alpha \eta_\alpha \tau^2 \| A_\alpha \|} < 4. \tag{3.16}$$

Отсюда видно, что условие устойчивости выполнено при любых τ (схема абсолютно устойчива), если выбрать σ_α равными

$$\sigma_\alpha = \frac{p}{4\eta_\alpha}.$$

Таким образом, схема (3.12) — (3.13) устойчива и сходится со скоростью $O(\tau^2)$.

Замечание 1. Для определения y^{j+1} из (3.12) — (3.13) или из (3.15) можно применить алгоритм

$$y_{\bar{t}t} = -\sum_{\alpha=1}^{p} w_\alpha + \tilde{\varphi}, \qquad (E + \eta_\alpha\tau^2 R_\alpha) w_\alpha = A_\alpha y, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.17}$$

Замечание 2. Чтобы освободиться от требования коммутативности $R_\alpha A_\beta = A_\beta R_\alpha$, следует заменить в (3.15) $\tilde{A}$ оператором

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}_\alpha, \qquad \tilde{A}_\alpha = (E + \eta_\alpha\tau^2 R_\alpha)^{-1} A_\alpha (E + \eta_\alpha\tau^2 R_\alpha)^{-1}. \tag{3.18}$$

Это новый тип схемы, не сводимый к факторизованной схеме. Для определения y^{j+1} применим алгоритм

$$y_{\bar{t}t} = -\sum_{\alpha=1}^{p} w_\alpha + \varphi, \qquad B_\alpha \bar{w}_\alpha = y, \qquad B_\alpha w_\alpha = A_\alpha \bar{w}_\alpha, \qquad B_\alpha = E + \eta_\alpha\tau^2 R_\alpha,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.19}$$

Схема $y_{\bar{t}t} + \tilde{A}y = \varphi$ с оператором (3.18) устойчива, если

$$R_\alpha \geqslant \sigma_\alpha A_\alpha \quad \text{и} \quad \sigma_\alpha\eta_\alpha \geqslant p/4, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.20}$$

например при $\eta_\alpha = 1/p$, $\sigma_\alpha = p^2/4$.

Это видно из неравенства

$$\tau^2 B_\alpha^{-1} A_\alpha B_\alpha^{-1} \leqslant \frac{\tau^2}{\sigma_\alpha} B_\alpha^{-1} R_\alpha B_\alpha^{-1} < 1/\sigma_\alpha\eta_\alpha.$$

Обратимся теперь к схеме из [25], для которой непрерывной производящей моделью может служить либо (3.10), либо (3.11). В [25] показано, что при $p = 2$ эта схема имеет первый порядок точности. Покажем, что при $A_1A_2 = A_2A_1$ и постоянных $A_\alpha^* = A_\alpha > 0$ схема из [25] имеет точность $O(\tau^2)$.

Запишем эту схему в виде

$$B_2(y^j + y^{j-1}) - 2y^{j-1/2} = 0{,}5\tau^2\varphi_2^{j-1/2}, \qquad B_1(y^{j+1/2} + y^{j-1/2}) - 2y^j = \frac{1}{2}\tau^2\varphi_1{}^j, \tag{3.21}$$

$$B_2(y^{j+1} + y^j) - 2y^{j+1/2} = \frac{1}{2}\tau^2\varphi_2^{j+1/2}, \qquad B_1(y^{j+3/2} + y^{j+1/2}) - 2y^{j+1} = \frac{1}{2}\tau^2\varphi_1^{j+1},$$
$$j = 2, 3, \ldots, K-1. \tag{3.22}$$

$$y^0 = u_0; \quad B_1 y^{1/2} = F_1,$$
$$F_1 = u_0 + \frac{\tau}{2}u_1 + \frac{\tau^2}{4}A_1u_0 + \tau^2\left(\varphi_1 - \frac{1}{8}(Au + \varphi)\right)_{t=0},$$

где $B_\alpha = E - \sigma\tau^2 A_\alpha$, $\alpha = 1{,}2$, $\sigma = 1/4$.

Складывая попарно уравнения (3.21) и (3.22) и исключая затем $(y^{j+1/2} + y^{j-1/2})$ и $(y^{j+1} + y^j)$, получаем

$$B_1B_2(y^{j+1} + 2y^j + y^{j-1}) - 4y^j = \tau^2\Phi^j, \qquad \Phi^j = \frac{1}{2}B_1(\varphi_2^{j+1/2} + \varphi_2^{j-1/2}) + \varphi_1{}^j,$$

$$B_2B_2(y^{j+3/2} + 2y^{j+1/2} + y^{j-1/2}) - 4y^{j+1/2} = \tau^2\Phi^{j+1/2},$$

$$\Phi^{j+1/2} = \frac{1}{2}B_2(\varphi_1{}^j + \varphi_1^{j+1}) + \varphi_2^{j+1/2}.$$

Получены уравнения, содержащие значения либо на целых шагах, либо лишь на полуцелых шагах. Определенная таким образом схема имеет по t аппроксимацию $O(\tau^2)$ и устойчива по правой части и по начальным данным при любых τ. Отсюда следует сходимость схемы (3.21) — (3.22) со скоростью $O(\tau^2)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для схемы при $p = 3$, непрерывной производящей моделью для которой является (3.10) и (3.11).

В заключение отметим, что, используя представления (1.14) и (1.15), нетрудно построить конкретные модели и аддитивные схемы для задачи (1.10) — (1.11).

Изложенные выше рассуждения справедливы и для некоторых нелинейных задач (см., например, [9, 16, 24]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек.— Труды Тбил. матем. ин-та, 1955, 21, 191—259.
2. *Векуа И. Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. — Труды Тбил. Матем. ин-та, 1965, 30, 5—103.
3. *Vekua I. N.* On two ways of constructing the theory of elastic shells.— Proc. of XIII Intern. Congr. Theoretical and Appl. Mech., Moscow, August 1972. Berlin — Heidelberg — New York, Springer — Verlag, 1973, p. 322—339.
4. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. Механика твердого тела. Труды II Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. М., 1966, с. 116—136.
5. Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори, Груз. ССР, 1—10 окт. 1974. Тбилиси, Изд-во ТГУ, 1975.
6. *Гордезиани Д. Г.* О разрешимости некоторых граничных задач для одного варианта теории тонких оболочек.— ДАН СССР, 1974, 215, № 6, 1289—1292.
7. *Жгенти В. С.* Две смешанные граничные задачи для оболочки, серединная поверхность которой имеет форму арочной плотины.— Труды ВЦ АН ГССР, 1964, 4, 91—120.
8. *Самарский А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области.— Журн. выч. матем и матем. физ., 1962, 2, № 5, 787—811.
9. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
10. *Самарский А. А.* О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем.— ДАН СССР, 1965, 165, № 6, 1253—1256.
11. *Яненко Н. Н.* О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений.— Сиб. матем. журн., 1964, 5, № 6, 1431—1434.
12. *Гордезиани Д. Г.* О применении локально-одномерного метода для решения многомерного уравнения параболического типа 2m-го порядка.— Сообщ. АН ГССР, 1965, 39, № 3, 535—542.
13. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. Киев, «Наукова думка», 1970.
14. *Гуляев В. И.* Решение некоторых задач теории оболочек методом И. Н. Векуа. Аннот. докл. семинара ИПМ ТГУ, 1973, 8.
15. *Lions I. L.* Equations différentielles opérationnelles et problémes aux limites. Berlin, Springer, 1961.
16. *Temam R.* Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas frastionnaires.— Ann. mat. pura ed appl., sér. IV, 1968, 89, 191—380.
17. *Gordeziani D. G.* Sur une méthode économique de décompositions des operateures pour la solution numérique de problémes à dimensions multiples.— Compt. rend. Seminairs Analyse Numérique, Univ. Paris VI, 1971—1972, p. 87—97.

18. *Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В.* О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями.— Журн. выч. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 1, 246—250.
19. *Самарский А. А.* Аддитивные схемы. Докл. на Междунар. конгр. математиков. М., 1966.
20. *Фрязинов И. В.* Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа.— Журн. выч. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 2, 436—443.
21. *Самарский А. А.* О работах по теории разностных схем. Междунар. конгр. математиков в Ницце. 1970. Докл. советских математиков. М., «Наука», 1972, с. 276—289.
22. *Годунов С. К., Забродин А. В.* О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач.— Журн. выч. матем. и матем. физ., 1962, 2, 4.
23. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
24. *Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В.* О моделировании многомерных квазилинейных уравнений параболического типа одномерными уравнениями.— Сообщ. АН ГССР, 1970, 60, № 3, 537—540.
25. *Самарский А. А.* Локально-одномерные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. — Журн. выч. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 580—585.
26. *Гордезиани Д. Г.* Об одном варианте использования принципа аддитивности для решения эволюционных уравнений второго порядка. Аннот. докл. семинара ИПМ ТГУ. Тбилиси, 1971, 4, 11—14.
27. *Gordeziani D. G.* Sur une méthode aux difference finies pour la résolution d'équations aux derivées partiells.— Compt. rend. Séminare Analyse Numérique. Univ. Paris VI, 1971— 1972, p. 1—8.