



ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Препр.
Г-61

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВАРИАЦИОННО - РАЗНОСТНЫХ
УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Препринт № 34 за 1977г.

Москва.

АННОТАЦИЯ

В работе показано, что разностные схемы двумерной гидродинамики, получаемые из вариационного принципа, имеют второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Рассмотрены случаи декартовых и цилиндрических координат.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	<u>Стр.</u>
ВВЕДЕНИЕ	4.
§ 1. Исходные уравнения	5.
§ 2. Аппроксимация лагранжиана и уравнения неразрывности	7.
§ 3. Дифференциально-разностные уравнения. Аппроксимация по пространственным переменным	10.
§ 4. Аппроксимация по времени	13.
ЛИТЕРАТУРА	16.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основе вариационного принципа получены дифференциально-разностные (дифференциальные по времени, разностные по пространству) и разностные уравнения, приближенно описывающие динамику жидкости в двухмерных декартовых и цилиндрических координатах. Там же показано, что получаемые вариационным способом дифференциально-разностные аналоги уравнений гидродинамики оказываются полностью консервативными [2][4].

Однако в [1] остался открытым вопрос, с каким порядком точности полученные вариационно-разностные уравнения аппроксимируют дифференциальные уравнения гидродинамики. Трудность заключается в том, что расчеты по вариационно-разностным схемам проводятся в лагранжевых переменных, т.е. расчетные сетки жестко связаны с частицами жидкости, и с течением времени могут сильно искажаться.

В настоящей работе на примере двухмерных плоских и цилиндрических координат показано, что вариационные дифференциально-разностные схемы гидродинамики имеют второй порядок аппроксимации по шагам пространственной сетки.

Полностью консервативные вариационно-разностные схемы имеют второй порядок аппроксимации также и по времени.

Авторы признательны В.А. Гасилову, Т.К. Коршия и В.Ф. Тишкину за плодотворные обсуждения и ряд конструктивных замечаний.

§ I. Исходные уравнения

Дифференциальные уравнения механики сплошных сред допускают различные формы записи. Естественно, что все эти формы эквивалентны. Однако различные аналоги этих уравнений, вообще говоря, могут и не быть эквивалентными друг другу.

Целью настоящего параграфа является получение такого представления дифференциальных уравнений гидродинамики, которое аппроксимировалось бы с максимальным порядком вариационно-разностными уравнениями, полученными в работе [1].

Известно, что дифференциальные уравнения гидродинамики могут быть получены из вариационного принципа [1]. Пусть Ω - область, занимаемая средой в лагранжевых переменных α, β . Под ξ и μ будем понимать x и y соответственно в случае декартовых координат, и R и Z - в случае цилиндрических координат. Тогда функционал действия для жидкой среды при отсутствии диссипативных процессов запишется в виде:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{\Omega} \frac{1}{e} \rho \frac{\partial(\xi^e, \mu)}{\partial(\alpha, \beta)} \left[\frac{u^2 + v^2}{2} - \varepsilon \right] d\alpha d\beta \right\} dt \quad (I)$$

где \mathcal{L} - лагранжиан, ρ - плотность, u, v - проекции вектора скорости на оси ξ и μ соответственно,

ε - удельная внутренняя энергия, t - время, выра-

жение

$$\frac{1}{e} \frac{\partial(\xi^e, \mu)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{1}{e} \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi^e}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \xi^e}{\partial \beta} & \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \end{array} \right\|$$

представляет собой якобиан перехода от лагранжевых координат α, β к эйлеровым ξ, μ ; e — целочисленный параметр:

$$e = \begin{cases} 1 & \text{— для декартовых координат} \\ 2 & \text{— для цилиндрических координат} \end{cases}$$

Варьирование функционала (I) при соблюдении закона сохранения массы:

$$\rho \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} = \rho^0(\alpha, \beta) \quad (2)$$

и условия адиабатичности

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \right)_s = -P \quad (3)$$

где $\eta = 1/\rho$; P — давление, — энтропия приводит к выражению:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_Q \left[\rho \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} (u \delta u + v \delta v) + P \left[\frac{\mathcal{D}(\xi^{e-1} \xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} + \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right] d\alpha d\beta \right\} dt \quad (4)$$

Требование равенства нулю вариации δS дает динамические уравнения гидродинамики в лагранжевых переменных:

$$\frac{1}{e} \rho \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{dU}{dt} + \xi^{e-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(P \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) - \xi^{e-1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(P \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{e} \rho \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(P \frac{\partial \xi^e}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(P \frac{\partial \xi^e}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (6)$$

Условие (3) с учетом (2) может быть записано в следующей дифференциальной форме:

$$\rho \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\xi^e, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right\}. \quad (7)$$

Система гидродинамических уравнений (2), (5)–(7) замыкается кинематическими уравнениями:

$$\frac{d\xi}{dt} = u; \quad \frac{d\mu}{dt} = v \quad (8)$$

и уравнением состояния $P = P(\rho, \varepsilon)$

§ 2. Аппроксимация лагранжиана и уравнения непрерывности

Пусть $\Omega(t_0)$ – область, занимаемая жидкой средой в плоскости эйлеровых переменных ξ, μ в момент времени t_0 . Без ограничения общности полагая область $\Omega(t_0)$ односвязной обозначим через F непрерывное, взаимнооднозначное преобразование, переводящее $\Omega(t_0)$ в область G , имеющую форму единичного квадрата в плоскости α, β . Предположим также, что якобиан преобразования F всюду больше нуля $\left(\frac{\mathcal{D}(\xi, \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} > 0 \right)$

Связывая координаты α, β с частицами жидкости, примем их за лагранжевы координаты среды.

Введем в области G регулярную прямоугольную сетку $\omega: \{i=1, \dots, N; j=1, \dots, M\}$ с шагами $\Delta\alpha = 1/(N-1)$; $\Delta\beta = 1/(M-1)$. Скорости и координаты жидкости будем относить к узлам сетки. ω и обозначать $\xi_{i,j}, \mu_{i,j}$

$u_{i,j}$ и $v_{i,j}$. Термодинамические величины отнесем к центрам ячеек: $\rho_{i+1/2, j+1/2}$, $\epsilon_{i+1/2, j+1/2}$, $P_{i+1/2, j+1/2}$. В дальнейшем ради

простоты записи дробные индексы будем иногда заменять целыми по правилу: $\rho_{i+1/2, j+1/2} \sim \rho_{i,j}$

Аппроксимируем функционал (I) разностным по пространству выражением:

$$S_M = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho_{i+1/2, j+1/2} \left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\mathcal{F}^e, \mathcal{M})}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\langle u^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2} + \langle v^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2}}{2} - \epsilon_{i+1/2, j+1/2} \right\} \Delta\alpha \Delta\beta \right\} dt \quad (9)$$

Полагая

$$\left\langle \frac{1}{e} \frac{D(\mathcal{F}^e, \mathcal{M})}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{e} \left\| \begin{array}{cc} \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} & \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} & \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} \end{array} \right\|$$

где $\left\langle \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2, j}^e + \mathcal{F}_{i+1/2, j+1}^e - \mathcal{F}_{i, j}^e - \mathcal{F}_{i+1, j+1}^e}{2\Delta\alpha} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{F}^e}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\mathcal{F}_{i+1, j+1}^e + \mathcal{F}_{i, j+1}^e - \mathcal{F}_{i+1, j}^e - \mathcal{F}_{i, j}^e}{2\Delta\beta} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \alpha} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\mathcal{M}_{i+1, j+1} + \mathcal{M}_{i+1, j} - \mathcal{M}_{i, j+1} - \mathcal{M}_{i, j}}{2\Delta\alpha} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \beta} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{\mathcal{M}_{i+1, j+1} + \mathcal{M}_{i, j+1} - \mathcal{M}_{i+1, j} - \mathcal{M}_{i, j}}{2\Delta\beta} + O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

получим:

$$\left\langle \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\mathbb{F}_{\alpha, \beta}^e \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{e \Delta \alpha \Delta \beta} \left[(\mathbb{F}_{i+1, j+1}^e - \mathbb{F}_{i, j}^e) (\mu_{i, j+1} - \mu_{i+1, j}) - (\mathbb{F}_{i, j+1}^e - \mathbb{F}_{i+1, j}^e) (\mu_{i+1, j+1} - \mu_{i, j}) \right] + o(\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2); \quad (10)$$

Квадраты скоростей в центрах ячеек аппроксимируем также со вторым порядком:

$$\langle u^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} (u_{i, j}^2 + u_{i+1, j}^2 + u_{i+1, j+1}^2 + u_{i, j+1}^2) + o(\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2)$$

$$\langle v^2 \rangle_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} (v_{i, j}^2 + v_{i+1, j}^2 + v_{i+1, j+1}^2 + v_{i, j+1}^2) + o(\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2)$$

Тогда очевидно, что и (9) аппроксимирует функционал (I) также со вторым порядком

$$S = S_M + o(\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2).$$

Вводя обозначение:

$$V_{i, j} = \frac{1}{e} \left\{ (\mathbb{F}_{i+1, j+1}^e - \mathbb{F}_{i, j}^e) (\mu_{i, j+1} - \mu_{i+1, j}) - (\mathbb{F}_{i, j+1}^e - \mathbb{F}_{i+1, j}^e) (\mu_{i+1, j+1} - \mu_{i, j}) \right\} \Delta \alpha \Delta \beta$$

Можно представить (9) в виде:

$$S_M = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho_{i, j} V_{i, j} \left[\sum_{n=0, k=0}^2 \left(\frac{u_{i+n, j+k}^2 + v_{i+n, j+k}^2}{8} \right) - \varepsilon_{i, j} \right] \right] dt \quad (9')$$

совпадающем с принятым в работе [1].

Уравнение неразрывности (2), отнесенное к центру ячейки, запишется в виде:

$$\rho_{i+1/2, j+1/2} \left\langle \frac{1}{e} \frac{\mathcal{D}(\mathbb{F}_{\alpha, \beta}^e \mu)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} = \rho_{i+1/2, j+1/2}^0 \quad (12)$$

Принимая во внимание (I0), (II), находим, что:

$$\left\langle P \frac{1}{e} \frac{\partial(\mathcal{F}^e, \mu)}{\partial(\alpha, \beta)} - P^0 \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} - P_{i+1/2, j+1/2} \frac{V_{i,j}}{\Delta\alpha\Delta\beta} + P_{i+1/2, j+1/2}^0 = O(\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2)$$

т.е. что разностное уравнение [I]:

$$P_{i,j} V_{i,j} = P_{i,j}^0 \Delta\alpha\Delta\beta = m_{i,j} \quad (12')$$

аппроксимирует уравнение неразрывности (2) со вторым порядком.

§ 3. Дифференциально-разностные уравнения.

Аппроксимация по пространственным переменным.

Полагая, что $\left\langle \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \right\rangle_{i+1/2, j+1/2} \equiv \frac{d\mathcal{E}_{i+1/2, j+1/2}}{d\eta_{i+1/2, j+1/2}}, \quad \mu$

следовательно:

$$\frac{d\mathcal{E}_{i+1/2, j+1/2}}{d\eta_{i+1/2, j+1/2}} = P_{i+1/2, j+1/2} \quad (3')$$

приравняем нулю первую вариацию функционала (9) при условии соблюдения закона сохранения массы (12'). Это даст нам дифференциально-разностные аналоги динамических уравнений (5), (6) в виде [I]:

$$M_{i,j} \frac{dU_{i,j}}{dt} = \sum_{n,k}^1 P_{i-n, j-k} \frac{\partial V_{i-n, j-k}}{\partial \mathcal{F}_{i,j}} = 0 \quad (13)$$

$$M_{i,j} \frac{dV_{i,j}}{dt} = \sum_{n,k}^1 P_{i-n, j-k} \frac{\partial V_{i-n, j-k}}{\partial \mu_{i,j}} = 0 \quad (14)$$

где

$$M_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{n,k=0}^1 m_{i-n,j-k} = \frac{1}{4} \sum_{n,k=0}^1 P_{i-n,j-k} V_{i-n,j-k} =$$

$$= \frac{1}{4} \Delta\alpha \Delta\beta \sum_{n,k} \left\langle \frac{1}{e} P \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i-n+1/2, j-k+1/2}$$

Эти уравнения могут быть представлены в следующей развернутой записи:

$$\left\{ \frac{1}{4} \sum_{n,k=0}^1 \left\langle \frac{1}{e} P \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i-n+1/2, j-k+1/2} \right\} \frac{dM_{i,j}}{dt} =$$

$$= -\frac{1}{2} \xi_{i,j}^{e-1} \left\{ \frac{1}{\Delta\alpha} \left[P_{i,j} \left(\frac{M_{i+1,j+1} + M_{i,j+1} - M_{i,j} - M_{i,j}}{\Delta\beta} \right) - \right. \right.$$

$$- P_{i-1,j} \left(\frac{M_{i,j+1} + M_{i-1,j+1} - M_{i,j} - M_{i-1,j}}{\Delta\beta} \right) + P_{i,j-1} \frac{M_{i+1,j} + M_{i,j} -$$

$$- M_{i-1,j-1} - M_{i,j-1}}{\Delta\beta} \left. \right] - P_{i-1/2,j-1} \left(\frac{M_{i,j} + M_{i-1,j} - M_{i,j-1} - M_{i-1,j-1}}{\Delta\beta} \right) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\Delta\beta} \left[P_{i,j} \left(\frac{M_{i+1,j} + M_{i+1,j+1} - M_{i,j+1} - M_{i,j}}{\Delta\alpha} \right) - \right.$$

$$P_{i-1,j} \left(\frac{M_{i+1,j} + M_{i+1,j+1} - M_{i,j} - M_{i,j-1}}{\Delta\alpha} \right) + P_{i,j-1} \left(\frac{M_{i,j+1} + M_{i,j} - M_{i-1,j+1} - M_{i-1,j}}{\Delta\alpha} \right)$$

$$\left. - P_{i-1/2,j-1} \left(\frac{M_{i,j} + M_{i,j-1} - M_{i-1,j} - M_{i-1,j-1}}{\Delta\alpha} \right) \right\} \quad (13')$$

$$\left\{ \frac{1}{4} \sum_{n,k=0}^1 \left\langle \frac{1}{e} P \frac{D(\xi, \mu)}{D(\alpha, \beta)} \right\rangle_{i-n+1/2, j-k+1/2} \right\} \frac{dV_{i,j}}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2e} \left\{ \frac{1}{\Delta\beta} \left[P_{i,j} \left(\frac{\xi_{i+1,j}^e + \xi_{i+1,j+1}^e - \xi_{i,j}^e - \xi_{i,j+1}^e}{\Delta\alpha} \right) - \right. \right. \\
&- P_{i,j-1} \left(\frac{\xi_{i+1,j}^e + \xi_{i+1,j+1}^e - \xi_{i,j}^e - \xi_{i,j-1}^e}{\Delta\alpha} \right) + P_{i-1,j} * \\
&* \left. \left(\frac{\xi_{i,j}^e + \xi_{i,j+1}^e - \xi_{i-1,j}^e - \xi_{i-1,j+1}^e}{\Delta\alpha} \right) - P_{i-1,j-1} \left(\frac{\xi_{i,j}^e + \xi_{i,j+1}^e - \xi_{i-1,j}^e - \xi_{i-1,j-1}^e}{\Delta\alpha} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{\Delta\alpha} \left[P_{i,j} \left(\frac{\xi_{i+1,j+1}^e + \xi_{i,j+1}^e - \xi_{i+1,j}^e - \xi_{i,j}^e}{\Delta\beta} \right) - \right. \quad (14') \\
&- P_{i-1,j} \left(\frac{\xi_{i,j+1}^e + \xi_{i-1,j+1}^e - \xi_{i,j}^e - \xi_{i-1,j}^e}{\Delta\beta} \right) + P_{i,j-1} \left(\frac{\xi_{i+1,j}^e + \xi_{i,j}^e - \right. \\
&- \left. \frac{\xi_{i,j-1}^e - \xi_{i+1,j-1}^e}{\Delta\beta} \right) - P_{i-1,j-1} \left(\frac{\xi_{i,j}^e + \xi_{i-1,j}^e - \xi_{i-1,j-1}^e - \xi_{i,j-1}^e}{\Delta\beta} \right) \left. \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой легко установить, что уравнения (13'), (14') аппроксимируют уравнения (5), (6) со вторым порядком относительно $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

Как показано в [1], из равенства (3) вытекает закон изменения удельной внутренней энергии в виде:

$$m_{i,j} \frac{dE_{i,j}}{dt} = -P_{i,j} \frac{dV_{i,j}}{dt} \quad (15)$$

Принимая во внимание (I0) и (II), непосредственной проверкой также можно убедиться в том, что уравнение (I5) аппроксимирует уравнение (7) со вторым порядком точности.

Уравнения (I3), (I4) консервативны [3], [I]. Система уравнений (I2)–(I5) полностью консервативна [2], [I].

В работе [I] принято несколько отличное от (II) выражение для объема в цилиндрическом случае, а именно:

$$\begin{aligned}
 V_{i,j}^* &= \frac{1}{3} (R_{i+1,j+1} + R_{i+1,j} + R_{i,j+1}) [Z_{i+1,j} (R_{i+1,j+1} - R_{i,j+1}) + \\
 &+ Z_{i+1,j+1} (R_{i,j+1} - R_{i+1,j}) + Z_{i,j+1} (R_{i+1,j} - R_{i+1,j+1})] + \frac{1}{3} (R_{i+1,j} + R_{i,j+1} + \\
 &+ R_{i,j}) * [Z_{i+1,j+1} (R_{i,j+1} - R_{i,j}) + Z_{i,j+1} (R_{i,j} - R_{i+1,j}) + Z_{i,j} (R_{i+1,j} - R_{i,j+1})] \equiv \\
 &\equiv \frac{2}{3} \{ (Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1}) (R_{i,j}^2 - R_{i+1,j+1}^2) + (Z_{i+1,j+1} - Z_{i,j}) (R_{i+1,j}^2 - R_{i,j+1}^2) + \\
 &+ (Z_{i+1,j} R_{i+1,j} - Z_{i,j+1} R_{i+1,j}) * (R_{i,j} - R_{i+1,j+1}) + (Z_{i+1,j+1} R_{i+1,j+1} - \\
 &- Z_{i,j} R_{i,j}) (R_{i+1,j} - R_{i,j+1}) \} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Однако, можно показать, что $V_{i,j}^* = V_{i,j} + O(\Delta\alpha^4 + \Delta\beta^4)$

так что все выводы о порядке аппроксимации остаются в силе и в этом случае.

§ 4. Аппроксимация по времени

Заменяем область изменения переменной t дискретным набором точек $t_n: (n=0, 1, \dots, K)$. Величины $u_{i,j}^n; v_{i,j}^n; \rho_{i,j}^n; \varepsilon_{i,j}^n; R_{i,j}^n$ будем относить к моменту времени t_n . Заменяя в уравнениях (I3)–(I5), производные по t разностями и учитывая уравнение неразрывности (I2) и уравнение состояния,

получим замкнутую систему разностных уравнений в виде [I]

$$M_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau_n} - \sum_{k,l=0}^1 P_{i-l,j-k}^{(\sigma_1)} \left(\frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial \xi_{i,j}} \right)^* = 0 \quad (18)$$

$$M_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau_n} - \sum_{k,l=0}^1 P_{i-l,j-k}^{(\sigma_1)} \left(\frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial \mu_{i,j}} \right)^* = 0 \quad (19)$$

$$M_{i,j} \frac{\varepsilon_{i,j}^{n+1} - \varepsilon_{i,j}^n}{\tau_n} = - P_{i,j}^{(\sigma_1)} \sum_{l,k=0}^1 \left[\left(\frac{\partial V_{i,l}}{\partial \xi_{i+l,j+k}} \right)^* u_{i+l,j+k} + \left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+l,j+k}} \right)^* v_{i+l,j+k} \right] \quad (20)$$

$$P_{i,j}^n V_{i,j}^n = M_{i,j} \quad (21)$$

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n}{\tau_n} = u_{i,j} \quad (22)$$

$$\frac{\mu_{i,j}^{n+1} - \mu_{i,j}^n}{\tau_n} = v_{i,j} \quad (23)$$

Здесь $\tau_n = t_{n+1} - t_n$; $P_{i,j}^n = P(\xi_{i,j}^n; \varepsilon_{i,j}^n)$; $f = \sigma f + (1-\sigma) f^n$

При $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.5$ и

$$\left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+l,j+k}} \right)^* = \frac{\partial V_{i,j}^{(0.5)}}{\partial \xi_{i+l,j+k}^{(0.5)}}; \quad \left(\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+l,j+k}} \right)^* = \frac{\partial V_{i,j}^{(0.5)}}{\partial \mu_{i+l,j+k}^{(0.5)}}$$

{ где $V_{i,j}^{(0.5)}$ означает, что все входящие в выражения (II), (I7) сомножители берутся с весом 0.5 }, уравнения (I8)-(23) полностью консервативны. Очевидно, что при $\sigma_1 = 0.5$ система разностных уравнений (I8)-(23) имеет второй порядок аппроксимации по временному шагу τ_n . При $\sigma_1 \neq 0.5$ имеет место первый порядок.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский "Вариационный принцип получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики", Препринт ИИМ АН СССР, № 65, 1976 г.
2. А.А. Самарский, Ю.П. Попов "Разностные схемы газовой динамики", Наука, М., 1975 г.
3. А.А. Самарский "Введение в теорию разностных схем", Наука, М., 1971 г.
4. О.С. Мажорова, Ю.П. Попов "К расчету двумерных уравнений газовой динамики" Препринт ИИМ АН СССР

В.М. Головизнин, А.А. Самарский, А.П. Фаворский. "Об аппроксимации вариационно - разностных уравнений гидродинамики."

Редактор А.П. Фаворский. Корректор В.М. Головизнин.

№ Т-07574 от 12.04.77г. Заказ № 4257. Тираж 150 экз.

формат бумаги 60X90, 1/16 Объем 0,8 уч. изд. л.

055 (02) 2

Цена 6 коп.

Отпечатано на ротопронтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.