ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

А.А. Самарский

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Препринт № 107 за 1977 г.

Москва.

I. Физика плазмы является источником для постановки многих сложных математических задач, решение которых невозможно без применения численных методов. Основной проблемой в физике плазмы является проблема управляемого термоядерного синтеза (УТС). В настоящее время имеется несколько проектов установок для реализации УТС (установки типа "Токамак", обжатие и нагрев термоядерной плазмы с помощью z и θ - пинчей, пучком релятивистских электронов, мощным лазерным импульсом и др.). Хотя проекты различны по технической реализации, но всюду используется плазма, которую надо нагреть и сжать так, чтобы получить условия для термоядерной реакции. Отсюда возникает общая задача проведения фундаментальных исследований поведения плазмы в различных экстремальных условиях с целью выяснения возможности управления ее поведением.

2. Эффективным методом теоретического исследования физических явлений в настоящее время является вычислительный эксперимент [I] .

Вычислительный эксперимент позволяет не только объяснить известные экспериментальные факты, то и предсказать новые физические эффекты. Примером является открытие при помощи вычислительного эксперимента нового физического эффета - эффекта Т-слоя [2] (при движении плазмы в магнитном поле в ней может образовываться самоподдерживающийся высокотемпературный слой). Экспериментальное подтверждение эффекта Т-слоя было получено через 5 лет; при этом были использованы условия его существования, найденные теоретически.

Вычислительный эксперимент можно условно разбить на ряд этапов: I) выбор физического приближения и математическая постановка задачи (выбор математической модели); как правило, это задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных,

2) разработка вычислительного алгоритма, 3) программирование алгоритма, 4) проведение расчетов на компьютере, 5) анализ результатов расчетов, сравнение с физическим экспериментом, пересмотр и уточнение математической модели и повторение всех этапов. Таков один "технологический" цикл вычислительного эксперимента. Характерные черты вычислительного эксперимента: I) в рамках выбранной математической модели проводится расчет не одного, а нескольких вариантов для различных значений управляющих параметров, 2) математическая модель может меняться многократно.

3. Математические модели физики плазмы существенно нелинейны. Основными являются две модели: а) модель плотной плазмы - уравнения магнитной радиационной газодинамики (МРГД), б) модель бесстолкновительной плазмы - система кинетических уравнений Власова [3].

Уравнения МРГД представляют собой систему уравнений газодинамики с вязкостью и теплопроводностью, уравнений Максвелла и уравнений переноса излучения (либо кинетических, либо диффузионных). Система очень сложная и нелинейная. Для нее до сих пор не решены основные математические вопросы: о существовании и единственности решения. Однако задачи МРГД на практике давно решаются численными методами. Что касается уравнений Власова, то в случае двух и трех пространственных измерений эта система мало приспособлена для численного решения и сейчас на первый план выступает проблема построения более простых моделей, допускающих эффективные вычислительные алгоритмы. Однако, для ряда задач метод больших частиц и некоторые разностные методы дают хорошие результаты.

В последнее время ведется активная работа по изучению математических свойств системы уравнений Власова [4]- [8]. Доказана теорема существования в целом классического решения задачи Коши в одномерном случае и его единственность [4]. Для двумерных и трехмерных задач Коши в неограниченной и ограниченной областях изменения в [6] доказана теорема существования обобщенного решения при минимальных ограничениях относительно начальных данных (число частиц и энергия при $t = 0$ должны быть конечны). В [7] доказана теорема о существовании стационарных статистических решений системы уравнений Власова. Интуитивный смысл этой теоремы состоит в следующем. Предположим, что на некотором вероятностном пространстве Ω задан случайный процесс, значениями которого являются решения сиотемы Власова. Тогда на Ω существует такая мера, что среднее по этой мере любого непрерывного функционала от решения системы Власова не зависит от времени. Статистические решения системы с внешними источниками рассматривались в [8].

4. Многовариантный характер вычислений при проведении вычислительного эксперимента предъявляет жесткие требования экономичности к вычислительному алгоритму, а также к специальному математичеокому обеспечению на компьюторе. Задачи физики плазмы нелинейны и их решение обычно имеет сложный немонотонный характер. Для правильного описания основных характеристик процессов в плазме численные методы должны обладать достаточной разрешающей способностью, т.е. точностью при допустимом объеме вычислений.

При построении разностных схем для МГД-задач требуется, чтобы полученная дискретная модель правильно отражала основные свойства сплошной среды. Такими свойствами являются закон сохранения полной энергии (он выполняется для так называемых консервативных разностных схем [9]), а также уравнения баланса внутренней и кинетической энергии и энергии электромагнитного поля. Разностную схему, обладающую такими же свойствами на сетке, мы называем полностью консервативной схемой. Полностью консервативные схемы являются весьма эффективными и позволяют решать с достаточной точностью МГД-задачи как для низкотемпературной, так и для высокотемпературной плазмы [10] .

5. При выводе полностью консервативных схем используются либо интегроинтерполяционный метод, или метод баланса [1] , либо вариационный метод [11] , на котором мы сейчас остановимся подробнее. Уравнения гидродинамики и их основные свойства следуют из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия в классической механике. Рассмотрим в качестве примера движение жидкого объема Ω в плоскости (x, y) идеально проводящей, адиабатической плазмы. Пусть магнитное поле имеет только одну компоненту $H = H_z(x, y, t)$. В лагранжевых координатах (α, β) исходному жидкому объему соответствует область $G(\alpha, \beta)$, которую без ограничения общности можно считать прямоугольником. Функционал действия равен

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t)\,dt, \quad L(t) = \iint_G \rho \frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} \left[\frac{u^2+v^2}{2} - \varepsilon - \frac{H^2}{8\pi\rho}\right] d\alpha\, d\beta, \quad (1)$$

где L - лагранжиан объема Ω , ρ - плотность, u и v - компоненты скорости, ε - внутренняя энергия на единицу массы. Варьируя S с учетом дополнительных связей - уравнений неразрывности, адиабатичности и вмороженности магнитного поля:

$$\rho \frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = \tilde{\rho}(\alpha,\beta), \quad \delta\varepsilon = \frac{1}{\rho^2}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)\delta\rho, \quad H\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = \tilde{H}(\alpha,\beta) \quad (2)$$

и приравнивая нулю первую вариацию δS , получаем уравнения Эйлера

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right),$$
$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right). \qquad (3)$$

Уравнения связей принимают вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \qquad (4)$$
$$\frac{dH}{dt} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Здесь $\frac{d}{dt}$ означает производную вдоль траектории частицы. К (3) и (4) следует добавить уравнение состояния $p = p(\rho, \varepsilon)$.

Законы сохранения импульса и энергии являются следствием отсутствия явной зависимости лагранжиана от x, y и от t.

Аналогично получаются разностные уравнения. На сетке $\omega_h = \{(\alpha_i, \beta_j)\}$ аппроксимируется лагранжиан. Варьирование интеграла действия с учетом уравнений связей на сетке приводит к системе дифференциально-разностных уравнений. Заменяя затем производные по t разностными отношениями, получаем разностные схемы. Соответствующее центрирование по времени правых частей приводит к полностью консервативным схемам второго порядка аппроксимации. Вводя искусственную диссипацию, получаем схемы сквозного счета (однородные схемы).

Указанный подход без труда обобщается на произвольные системы координат и наибольшее число измерений. Вариационные разностные схемы были положены в основу алгоритмов для расчета гидродинамических задач в различных системах координат с учетом теплопроводности, магнитного поля [I3] и других факторов (например, при изучении устойчивости обжатия термоядерной мишени лазерным импульсом [I2]).

6. В нелинейной оптике и физике плазмы в настоящее время большой интерес представляют задачи о динамике волновых полей, о локализации энергии колебаний в окрестности некоторой точки (например, задачи о самофокусировке света в нелинейной среде [I4], о коллапсе ленгмюровских волн [I5]). Для детального исследования локализованного волнового поля удобно ввести лагранжевы координаты, связанные с энергией колебаний. Поясним такой подход на примере уравнения

$$2i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu}\frac{\partial E}{\partial r}\right)+|E|^2E=0,\quad 0<r<R,\ t>0\quad (i=\sqrt{-1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}(0,t)=0,\quad E(R,t)=0,\quad E(r,0)=E_0(r), \tag{5}$$

которое описывает медленно меняющуюся амплитуду электрического поля плазмы. Используя представление комплекснозначной функции $E=\rho^{1/2}e^{i\varphi}$, запишем (5) в форме уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{\nu}\rho v)=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+g=0, \tag{6}$$

где $\rho=|E|^2$ имеет смысл плотности, $v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ - групповая скорость колебаний. "Уравнение состояния" имеет вид

$$P=-\frac{1}{4}\rho^2\left[\frac{1}{\rho r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^{\nu}}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)+1\right], \tag{7}$$

а

$$g = \frac{\nu}{4} r^{2\nu-1} \left(\frac{1}{\rho r^{\nu}} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 .$$

В (6) можно ввести энергетическую лагранжеву координату $\ell = \int_0^r \rho r^{\nu} dr$. Уравнения (6),(7) с использованием ℓ можно решать при помощи разностных схем для уравнений газодинамики на фиксированной сетке по координате ℓ .

Реализация такого подхода позволила исследовать динамику самофокусировки в кубичной среде [16] , динамику ленгмюровского коллапса [15] , успешно строить вычислительные алгоритмы для ленгмюровской турбулентности.

7. Приведем еще один пример, иллюстрирующий важность преобразования исходной задачи к виду, удобному для применения численных методов.

Одна из актуальных задач физики плазмы - отыскание возможных равновесных конфигураций высокотемпературной плазмы, удерживаемой магнитным полем. Равновесие в тороидальном плазменном шнуре описывается уравнением для функции потока ψ :

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r j_{\varphi} , \quad j_{\varphi} = r \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{r} f \frac{\partial f}{\partial \psi} , \qquad (8)$$

где j_{φ} -тороидальная компонента плотности тока, p - давление плазмы, $f = r B_{\varphi}$, B_{φ} - тороидальная компонента магнитного поля. Для плазмы внутри идеально проводящего кожуха к (8) надо присоединить краевое условие $\psi = 0$ на кожухе. Ищутся линии уровня решения (8) при заданных $p(\psi)$ и $f(\psi)$. Для численного решения задач о квазиравновесном поведении плазмы с конечной проводимостью в осесимметричном случае удобно обратить переменные и сформулировать задачу для новых неизвестных функций $r(\psi, \theta)$, $z(\psi, \theta)$ от переменной ψ и некоторой второй координаты θ. При этом граница кожуха является координатной поверхностью, а исходная область отображается на прямоугольник.

В случае ортогональных координат (ψ, θ) выполнены условия ортогональности

$$\mu r \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \mu r \frac{\partial \theta}{\partial r} = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{9}$$

где $\mu = \mu(\psi, \theta)$ удовлетворяет следствию уравнения (8)

$$\frac{\partial \mu}{\partial \psi} = - J j_{\varphi}, \quad J = \frac{\mathcal{D}(r, z)}{\mathcal{D}(\psi, \theta)}. \tag{10}$$

Отсюда следуют эллиптические уравнения

$$L r = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\mu r \frac{\partial r}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial r}{\partial \theta}\right) = 0, \quad L z = 0. \tag{11}$$

При $\theta = 0$, $\theta = \theta_{max}$ заданы условия периодичности. При $\psi = \psi_{max}$ (магнитная ось) считаем заданными r_0, z_0, при $\psi = 0$ (кожух) для r и z должна быть введена параметризация по θ, удовлетворяющая уравнению кожуха $F(r(\theta), z(\theta)) = 0$ и условиям (9).

Переход к (10),(11) позволяет развивать новый подход для численного решения задач МГД-равновесия, который является более точным и исключает процедуру построения формы магнитной поверхности.

8. В заключение остановимся на одном вопросе теории численных методов, представляющим общий интерес. После разностной ап-

проксимации дифференциальных уравнений получается система сеточных уравнений высокого порядка, решение которых является большой самостоятельной проблемой вычислительной математики. В последние годы были получены существенные результаты в теории итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Выделим два результата: I) построение набора итерационных чебышевских параметров, при которых процесс итераций вычислительно устойчив, 2) разработка универсального попеременно-треугольного итерационного метода.

Начнем с общих факторов.

Пусть H – конечномерное пространство со скалярным произведением $(\ ,\ )$, $A, B, \ldots$ – линейные операторы, заданные в H, $A B$: $H \to H$. Требуется решить уравнение

$$Au = f, \quad A: H \to H. \tag{I2}$$

Запишем двухслойный (одношаговый) итерационный метод в следующей канонической форме

где

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k=0,1,\ldots \quad \forall y_0 \in H, \tag{I3}$$

где y_k – итерационное приближение номера k, $\tau_k > 0$ – параметры, $B: H \to H$. Если $B=E$ – единичный оператор, то (I3) – явный метод.

Будем предполагать, что выполнены условия

$$A=A^* > 0, \quad B=B^* > 0, \quad \gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0. \tag{I4}$$

Требуется найти параметры $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ из условия минимума числа итераций $n = n(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, при котором:

$$\|y_n - u\|_D \leq \varepsilon \|y_0 - u\|_D, \quad D = D^* > 0 : H \to H, \quad \|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}. \tag{15}$$

Эта задача сводится к классической задаче о нахождении полинома n -ой степени, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$. Ее решением является полином Чебышева.

Приведем значения искомых (чебышевских) параметров [1]

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \sigma_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{16}$$

причем для числа итераций верна оценка

$$n \geq \ln \frac{1}{\rho}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \text{или} \quad n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \ln \frac{2}{\varepsilon}. \tag{17}$$

Здесь σ_k – корень полинома Чебышева n -ой степени:

$$\sigma_k = -\cos \beta_k, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2n} \theta_n(k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где $\theta_n(k)$ – одно из чисел 1,3,5,...$2n$-1. Оценка (15) с $D = AB^{-1}A$ верна при любом способе нумерации множества $\theta_n = \{\theta_n(k)\}$. Однако, при "естественных" способах выбора $\theta_n(k)$:

$$\theta_n(k) = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\theta_n(k) = 2n - (2k - 1) = 2(n - k) + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

итерационный процесс (13),(16),(18) с параметрами (19) или (20) вычислительно неустойчив, т.е. не сходится при вычислениях с конечным числом знаков [I].

Вычислительный процесс можно сделать устойчивым, если перенумеровать соответствующим образом множество $\theta_n = \{\theta_n(k)\}$. Такие устойчивые наборы чисел $\theta_n = \theta_n^*$ и тем самым параметров $\{\tau_k^*\}$ найдены: а) для $n = 2^p$ ($p>0$ – целое число) в работах [I8] и [I9], б) для произвольного n – в работах [20] и [2I]. Алгоритм получения "устойчивого набора" параметров $\{\tau_k^*\}$ дан в [I].

9. Построение устойчивого чебышевского итерационного метода (2),(3),(5),(7) (иногда его называют методом Ричардсона) делает возможным его применение к решению разностных задач, аппроксимирующих краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

Оператор B выбирается из условий минимума итераций (максимума $\xi = \gamma_1/\gamma_2$) и экономичности оператора B, т.е. минимума операций для решения уравнения $Bv = F$, где F – заданный вектор.

Представим матрицу $A = (a_{ij})$ в виде суммы

$$A = A^- + A^+ + \mathcal{D}_0 ,$$

где $\mathcal{D}_0$ – диагональная матрица, A^- – нижняя, а A^+ – верхняя треугольные матрицы с нулями на главной диагонали. Для метода Зейделя имеем $B = A^- + \mathcal{D}_0$, $\tau_k = 1$. Для метода верхней релаксации (SOR) $B = \omega A^- + \mathcal{D}_0$, $\tau_k = \omega$. В обоих случаях $B \neq B^*$ – несамосопряженный оператор и потому нельзя использовать чебышевский набор параметров для ускорения сходимости итераций.

Самосопряженным является оператор B, представимый в виде произведения "треугольных" (имеющих треугольные матрицы) операторов:

$$B = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2)$$

$$A_1 = A^- + \frac{1}{2}\mathcal{D}_0, \quad A_2 = A^+ + \frac{1}{2}\mathcal{D}_0, \quad A_2 = A_1^*, \quad A_1 + A_2 = A. \quad (2I)$$

Для определения y_{k+1} из (I3) с учетом (2I) надо решить последовательно две системы уравнений с нижней ($E+\omega A_1$) и верхней ($E+\omega A_2$) треугольными матрицами:

$$(E+\omega A_1)\bar{y}=F_k\,,\ F_k=By_k-\tau_{k+1}(Ay_k-f)\,;\ (E+\omega A_2)y_{k+1}=\bar{y}$$

т.е. оператор B является экономичным.

Итерационный метод (I3) с факторизованным оператором (2I) будем называть попеременно-треугольным методом (ПТМ) [I] , [22] , [23] . При этом мы всегда будем предполагать, что используется чебышевский набор параметров $\{\tau_k^*\}$. ПТМ, очевидно, является универсальным, так как любой оператор $A=A^*$ всегда можно представить в виде суммы "треугольных" операторов A_1 и $A_2=A_1^*$, так что $A_1+A_2=A$.

Теорема I . Пусть $A=A^*>0$ и известны числа $\delta>0,\Delta>0$:

$$A\geq\delta E\ ,\quad A_1A_2\leq\frac{\Delta}{4}A\,. \tag{22}$$

Тогда для ПТМ (I3),(2I) с чебышевскими параметрами $\{\tau_k^*\}$ и $\omega=\omega_0=2/\sqrt{\delta\Delta}$ число итераций

$$n\geq n_0(\varepsilon)=\left(\ln\frac{2}{\varepsilon}\right)/\left(2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\eta}\right),\quad \eta=\frac{\delta}{\Delta}\,. \tag{23}$$

Проиллюстрируем эту теорему на разностной задаче Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате $0\leq x_\alpha\leq1,\ \alpha=1,2$, если схема пятиточечная, а сетка квадратная $(h_1=h_2=h)$. В этом случае

$$n_0(\varepsilon)\approx\left(\ln\frac{2}{\varepsilon}\right)/\left(3{,}54\sqrt{h}\right)$$

(для метода $n_0(\varepsilon)=O\left(1/h\right)$).

Вводя произвольный оператор $D=D^*>0$ и полагая

$$B=(D+\omega A_1)D^{-1}(D+\omega A_2) \tag{24}$$

получим модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) 24

Теорема сохраняет силу, если (22) заменить условиями:

$$A \geqslant \delta D,\ A_1 D^{-1} A_2 \leqslant \frac{\Delta}{4} A_2\ ,\ \delta > 0,\ \Delta > 0\ . \qquad (25)$$

В качестве матрицы $\mathcal{D} = (d_{ij})$ можно взять диагональную матрицу, выбирая d_{ij} так, чтобы отношение $\eta = \delta/\Delta$ было максимальным. МПТМ со специально выбранной матрицей $\mathcal{D}$ и чебышевским набором параметров $\{\tau_k^*\}$ оказался весьма эффективным (см. [I],[24]) для решения разностной задачи Дирихле в произвольной области в случае уравнения Пуассона и в случае уравнения о переменными коэффициентами $div\,(k\,grad\,u) = -f(x)$ в прямоугольнике. Так, для задачи Дирихле в произвольной области число итераций возрастает не более, чем на 5% по сравнению с той же задачей в квадрате, сторона которого равна диаметру области.

Замечание I. В настоящее время трудно указать задачу, для которой метод переменных направлений эффективнее других методов. Если область - прямоугольник и решается уравнение Пуассона, то наиболее экономичны прямые методы. Для области сложной формы или для уравнений с переменными коэффициентами следует предпочесть МПТМ. Для трехмерных задач ПТМ экономичнее ($\simeq$ в 2 раза) метода переменных направлений даже в случае простейшей задачи (область - единичный куб, задача Дирихле для уравнения Пуассона, сетк сетка кубическая ($h_1 = h_2 = h_3 = h$), схема - семиточечная).

Замечание 2. При решении одномерных нестационарных газодинамических задач с использованием неявных полностью консервативных схем надо решать систему нелинейных уравнений для величин на новом слое. Эффективным оказался метод Ньютона с начальным приближением равным значениям на предыдущем временном слое. Теоретические оценки (подтверждены на практике), показывают, что условие сходимости итераций накладывает на шаг по времени более слабые ограничения по сравнению с требованием точности. Для двумерных МГД-задач также используются неявные схемы и итерации по нелинейности.

10. Важным направлением теоретической работы является изучение основных свойств плазмы на простых нелинейных математических моделях, путем сочетания аналитических и численных методов. Это позволяет получить представление о характерных особенностях физики процесса и выработать адэкватные физические понятия.

Одна из главных задач проблемы УТС состоит в получении плазмы термоядерной температуры и удержания ее в течение конечного времени. Наряду с методами магнитной термоизоляции плазмы возможен и другой подход, основанный на использовании инерции тепла и горения в нелинейной среде. Исследования показывают, что в нелинейной среде возможна метастабильная локализация тепла и существует характерная (фундаментальная) длина, на которой локализуется процесс горения [25]-[29].

Рассмотрим в качестве примера, задачу о прогреве покоящейся холодной среды, коэффициент теплопроводности которой $\varkappa = \varkappa(T)$ является степенной функцией температуры T ($\varkappa = \varkappa_0 T^\sigma, \sigma > 0$), а на границе задан следующий закон роста температуры ("режим с обострением"):

$$T_{гр} = T_0 (t_f - t)^n, \quad n < 0, \quad 0 \leq t < t_f .$$

Если $-\frac{1}{\sigma} \leq n < 0$, то тепловая волна проникает в среду на конечную глубину. При $n < -\frac{1}{\sigma}$ или при $n > 0$ локализации нет и фронт волны распространяется (с конечной скоростью) по холодному фону.

Локализация тепла при $-\frac{1}{6} \leq n < 0$ происходит по истечении конечного времени действия режима ("времени установления локализации"). После локализации растекание тепла из нагретого объема в окружающую среду не происходит в течение конечного времени ("времени локализации"). Учет газодинамических процессов не мешает проявлению локализации тепла.

Метастабильная локализация тепла возможна для одномерных, двухмерных и трехмерных задач нелинейной теплопроводности. Парадоксальной является форма области локализации тепла в многомерных задачах. В пространстве может быть задано начальное распределение температуры, обращающейся в нуль на поверхности многогранника (например, тетраэдра) и в результате в нелинейной среде конечное время осуществляется удержание тепла внутри такого "теплового кристалла" (задча Коши) [28] .

Эти свойства характерны и для других квазилинейных процессов переноса другой физической природы (например, диффузия магнитного поля в среде с проводимостью, зависящей от температуры, для фильтрации жидкостей и газов и др.) [26] .

В плазме, в которой действуют источники тепла, нелинейно зависящие от температуры (например, источники от термоядерного горения) или источники тепла за счет ионной вязкости (зависящие от температуры и градиента скорости) или источники джоулева тепла (зависящие от температуры и от градиента магнитного поля) могут возникать локализованные области выделения тепла [26],[27],[29]. Их возникновение приводит к росту температуры в режиме обострения. Благодаря этому процесс горения может локализоваться на определенном участке среды, несмотря на наличие в среде нелинейной теплопроводности.

Эти явления выходят за рамки физики плазмы и проблемы УТС.

Они представляют общефизический интерес, так как связаны с проявлением инерции тепла и горения и являются причиной возникновения организации (структур) в нелинейных средах.

ЛИТЕРАТУРА

I А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., "Наука", 1977.

2 А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, А.А.Заклязминский, П.П.Волосевич, Л.М.Дегтярев, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.С.Соколов, А.П.Фаворский. ДАН СССР, 1967, 173, № 4.

3 А.А.Власов. Теория многих частиц. М., 1950.

4 С.В.Иорданский. Труды матем. института АН СССР, 1961, 60, 181-194.

5 A. Chaljub-Simon C.r. Acad. Sci, 1973, A276, N20, 1343-1346

6. А.А.Арсеньев. Ж.вычисл.матем. и матем.физ. 1975, 15, № I, 136-147.

7 А.А.Арсеньев. ДАН СССР, 1975, 220, № 6, 1249-1250.

8 А.А.Арсеньев. Матем.сб. 1977, 102 (144), № I, 13-32.

9 А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1961, I, № I, 6-64.

10 А.А.Самарский, Ю.П.Попов. Разностные схемы газовой динамики. М., "Наука", 1976.

11 В.М.Головизнин, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. ДАН СССР, 1977, 235, № 6, 1285-1288.

12 П.П.Волосевич, Е.Г.Гамалий, А.В.Гулин, В.Б.Розанов, А.А.Самарский, Н.Н.Тюрина, А.П.Фаворский. Письма в ЖЭТФ, т.24, вып.5, 283-286.

13 Р.А.Волкова, В.М.Головизнин, Ф.Р.Улинич, А.П.Фаворский. Препринт ИПМ АН СССР, № III, 1976.

14 В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 1972, 62, 1745.

15 Л.М.Дегтярев, В.В.Крылов. Ж.вычисл.мат. и матем.физ.,1977, 17, № 4.

16 Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, 9.

17 В.Д.Шафранов. ЖЭТФ, 1957, 33, 710.

18 А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.

19 В.И.Лебедев, С.А.Финогенов. Ж.выч.матем. и матем.физ., 1971, 11, № 2, 425–438.

20 Е.С.Николаев, А.А.Самарский. Ж.выч.матем. и матем.физ.,1972, 12, № 4, 960-973.

21 В.И.Лебедев, С.А.Финогенов. Ж.выч.матем. и мат.физ., 1973, 13, № 1, 18–33.

22 А.А.Самарский. Ж.выч.матем. и матем.физ., 1964, 4, № 3, 580–585.

23 А.А.Самарский. ДАН СССР, 1969, 185, № 3, 524-527.

24 А.Б.Кучеров, Е.С.Николаев. Ж.выч.матем. и матем.физ., 1976, 16, № 5, 1164-1174; 1977, 17, № 3, 664–675.

25 А.А.Самарский, И.М.Соболь. Ж.выч.матем. и матем.физ., 1963, 3, № 4, 702.

26 Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. ПМТФ, 1977, № 1.

27 А.А.Самарский, С.П.Курдюмов, Н.В.Змитренко, А.П.Михайлов. ДАН СССР, 1975, 223, № 6, 1344-1347; 1976, 227, № 2, 321-324 Препринт ИПМ АН СССР № 74, (1976), Препринт ИПМ АН СССР, № 109 (1976).

28 С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, К.Э.Плохотников. Препринт ИПМ АН СССР № 22 (1977).

29 А.А.Самарский, Г.Г.Еленин, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П. Михайлов. ДАН СССР, 1977,