103
ПРЕПР.
М 54

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.В. Змитренко, С.П. Курдюмов,
А.П. Михайлов, А.А. Самарский.

МЕТАСТАБИЛЬНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ И УСЛОВИЯ ЕЕ ПРОЯВЛЕНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Препринт №103 за 1977 г.

Москва.

УДК. 517.946:536.24: 533.9

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена подробному изложению результатов, касающихся эффекта метастабильной локализации ("инерции") тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условий его проявления в эксперименте.

В сплошной среде с квазилинейными процессами диффузии распределения (профили) температуры (магнитного поля, концентрации вещества и т.д.), имеющие определенную форму, локализованы конечное время в конечной области среды.

Действие определенного вида граничных режимов с обострением проявляет свойство тепловой "инерции", создавая в среде "инерционные" профили температуры. Под режимами с обострением понимается нарастание температуры (теплового потока) до бесконечности за конечный промежуток времени.

Обсуждаются общие требования, предъявляемые к эксперименту по обнаружению и исследованию метастабильной локализации тепла.

Ключевые слова: нелинейная теплопроводность, локализация тепла.

ABSTRACT

The paper presents the main results concerning effect of metastable localization ("inertia") of heat and conditions of it discovery in experiment.

In a oontinuous medium with quasi-linear transfer processes distributions (profiles) of the temperature (magnetic field, matter concentration, etc.) with some shape are localized in finite medium region during finite time interval.

The action of some class of boundary peaking regimes causes formation "Inertial" profiles of the temperature and metastable heat localization. Peaking regimes mean processes with parameter values rising with time in accordance with a law under which they become infinite within a finite time.

General conditions of discovery and investigation of the effect in experiment are considered.

Key words: nonlinear heat conductivity, heat localization.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Аннотация

Введение..... 7

§ I. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ, НАРАСТАЮЩИХ С ОБОСТРЕНИЕМ.

I.I. Постановка задачи 14

I.2. Автомодельная задача..... 14

I.3. HS- режим. Отсутствие локализации тепла.. 17

I.4. Локализация тепла в S- режиме..... 19

I.5. Локализация тепла в LS- режиме..... 20

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА. "ИНЕРЦИОННЫЕ" и "БЕЗИНЕРЦИОННЫЕ" ПРОФИЛИ ТЕМПЕРАТУРЫ.

2.I. Связь эффекта локализации тепла и вида профиля температуры..... 24

2.2. Локализация тепла в задаче Коши..... 26

2.3. Оценки времени удержания тепла при различных физических условиях..... 28

§ 3. УСЛОВИЯ ПРОЯВЛЕНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗЛИЧНЫХ ОСЛОЖНЯЮЩИХ ФАКТОРОВ.

3.I. Вторая краевая задача..... 29

3.2. Отклонения в граничном законе..... 32

3.3. Влияние на локализацию ненулевого начального фона температуры..... 33

3.4. Коэффициент теплопроводности - произвольная растущая функция температуры..... 34

Стр.

3.5. Критерии установления S- и LS- режимов при граничном воздействии конечной длительности..... 36

3.6. Локализация тепла в многомерном случае... 40

§ 4. ТРЕБОВАНИЯ К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА.

4.I. Основные требования..... 42

4.2. Расчетные формулы..... 43

§ 5. ОЦЕНКИ ДЛЯ ДТ- ПЛАЗМЫ.

5.I. Постановка задачи и оценки..... 46

5.2. Влияние газодинамического движения на локализацию..... 48

5.3. Сравнение с режимом без обострения. Признаки локализации..... 50

Литература..... 52

Введение

I. Изучаются явления, сопровождающие процесс распространения тепла в среде с нелинейной теплопроводностью в случае, когда на границе вещества задан режим нарастания температуры или теплового потока с обострением. Под граничными режимами с обострением понимаются сильно нестационарные режимы, в которых величины растут по закону, приводящему к обращению их в бесконечность в конечный момент времени.

Задачи нелинейной теплопроводности являются традиционным предметом исследования, что имеет под собой глубокую основу.

Во-первых, эти задачи представляют самостоятельный интерес, так как часто встречаются в физике и технике.

Во-вторых, многие процессы, имеющие разнообразную физическую природу, допускают, наряду с нелинейной теплопроводностью, единое математическое описание в рамках квазилинейного параболического уравнения. К ним относятся, например, нелинейная диффузия, фильтрация газов в пористой среде, движение грунтовых вод, распространение магнитного поля при проводимости, зависящей от температуры. В дальнейшем, для определенности, будем говорить о процессах нелинейной теплопроводности.

Отметим, также, что если в среде с коэффициентом теплопроводности $\varkappa(T)$ и теплоемкостью $C(T)$ температура T зависит только от времени t и одной пространственной координаты (случай плоской симметрии), то уравнение теплопроводности

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

может быть заменой $u(T) = \int C(T)\,dT$ сведено к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

рассмотренному в настоящей работе (здесь $k(u) = \frac{\varkappa(T(u))}{c(T(u))}$)

В-третьих, простейшие варианты квазилинейного параболического уравнения математически достаточно хорошо изучены, что значительно облегчает исследование физических задач и позволяет делать строго обоснованные выводы общего характера.

Наконец, существуют эффективные численные методы решения указанных задач.

Тем самым в распоряжении исследователя имеется богатый арсенал средств - от чисто математических методов до вычислительного и, наконец, физического эксперимента, позволяющих подробно изучать нелинейную среду и ее весьма тонкие свойства на относительно простой модели.

При этом даже в простейших задачах процессы распространения тепла в нелинейной среде обнаруживают неожиданные свойства.

2. Первые исследования по теории нелинейной теплопроводности, выполненые еще Буссинеском, были продолжены в работах [I,2].

При дальнейшем изучении [3-7] обнаружилась важная особенность процесса распространения тепла в нелинейной среде - конечная скорость движения фронта тепловой волны по холодному фону (коэффициент теплопроводности на фоне обращается в нуль). Конечная скорость является прямым следствием зависимости теплопроводности от температуры. Этот результат, полученный при анализе различных автомодельных решений вырождающегося квазилинейного параболического уравнения, был обобщен в работах [8,9] . Проведено подробное математическое исследование решений этого уравнения [9,I0] . Были доказаны теоремы существования и единственности

решений задач Коши и краевых задач, а также утверждения, позволяющие сравнивать решения, не решая самих задач, а лишь сравнивая начальные и граничные условия. Эти теоремы сравнения, благодаря существованию частных решений (напр., [4]), позволили получить достаточно общие условия конечности скорости распространения тепла [9,II] .

Таким образом, теоремы сравнения [9] дают возможность исследовать процессы теплопереноса путем построения каких-либо частных решений уравнения теплопроводности.

3. В работе [12] было построено такое частное решение с обостряющимся граничным режимом, в котором фронт тепловой волны вообще не распространяется (1) в холодную среду. В дальнейшем было показано, что существует целый класс граничных режимов с обострением (S -и LS-режимов), действие которых порождает метастабильную локализацию тепла [13-25] . Эффект метастабильной локализации тепла состоит, в частности, в том, что область пространства с отличной от нуля температурой не меняется в течении конечного промежутка времени. При этом температура и количество тепла в области локализации могут возрастать до сколь угодно больших значений (вплоть до бесконечности). Эффективная (скиновая) глубина проникновения вещества тепловой волной остается постоянной в течении процесса (S-режим) или уменьшается с течением времени (LS- режим).

При действии S- и LS-режимов тепло обнаруживает не только свойство распространения с конечной скоростью, но и свою способность вообще не распространяться в течение конечного времени за пределы фиксированной области пространства. Тем самым проявляется "инерция" тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.

Условия существования эффекта метастабильной локализации тепла могут быть строго получены с помощью теорем сравнения (см., [14,15,18,][25] и данную работу).

4. Подвод энергии к веществу в режиме с обострением был известен в проблеме лазерного термоядерного синтеза (ЛТС)[26-28]. Такой подход к задачам ЛТС связан с существованием режимов с обострением в задачах газовой динамики [23, 29-32 , 53].

Дальнейшее исследование показало, что режимы с обострением могут возникать в самой среде за счет ее нелинейных свойств, например, в результате действия в среде источников тепла. Имеется глубокая связь между режимами с обострением, метастабильной локализацией, рождением и сложным взаимодействием структур в нелинейной среде [13, 19,20,23,33-37].

5. Ранее явление локализации связывалось с действием в среде объемных стоков тепла [38-40] . Стоки могут возникать в результате действия различных физических процессов - охлаждения среды при ее расширении, объемного излучения и т.д. Имеет место некоторая эквивалентность сильно нестационарных процессов с обострением процессам, протекающим в среде с физическими стоками, в том смысле, что в обоих случаях возможна локализация тепла, однако физическая причина явлений в обоих случаях различна.

6. Причина локализации тепла - специфический "вогнутый" профиль температуры в тепловой волне. Именно такие профили создаются граничными S- и LS-режимами в отличие от HS-режимов и обычных, растущих со временем не по закону обострения [3 -7] режимов, создающих распространяющийся "выпуклый" профиль температуры (см.,например, [18-23] и § 2 настоящей работы.Данный граничный режим, создающий локализованный профиль, определяет его параметры, в частности, размер области локализа-

зации и время, в течение которого эффект локализации тепла имеет место после отключения граничного режима.

7. Настоящая работа посвящена по возможности подробному и строгому изложению результатов, относящихся к эффекту метастабильной локализации тепла и предварительному обсуждению путей его экспериментального обнаружения.

Основные представления излагаются в § I на примере задачи о проникновении тепла в холодную среду, если на ее границе задан степенной закон роста температуры с обострением

$$T \sim (t_f - t)^n, \quad t < t_f, \quad t \to t_f - 0, \quad n < 0$$

В § 2 подробно исследуются "локализованные" профили на примере решений задачи Коши для уравнения нелинейной теплопроводности.

Результаты исследования задачи § I обобщаются на случай, когда распространение тепла носит более сложный характер (§3).

С помощью теорем сравнения выделяется класс граничных режимов с обострением (не обязательно степенного вида), приводящих к локализации тепла.

Анализ численных расчетов и некоторые соображения физического характера позволяют сделать важный вывод о том, что на асимптотической стадии режимов с обострением распространения процесс тепла определяется только граничным законом и не зависит от начальных данных. В частности, локализация эффективно имеет место и при ненулевом начальном фоне температуры.

Построение численных и аналитических решений для двух- и трехмерных задач нелинейной теплопроводности показывает, что представления, развитые в одномерном случае, переносятся на многомерный случай [I8,22].

Для обнаружения эффекта достаточно, чтобы значение температу-

ры в зоне локализации превышало максимальное значение начальной (фоновой или граничной) всего в 10÷15 раз. Эффект может наблюдаться, в принципе, в любых диапазонах температур и времен. Это может дать возможность для выбора такого диапазона, в котором процесс описывается уравнением нелинейной теплопроводности, а времена локализации разумны с экспериментальной точки зрения. Так, для ДТ-плазмы с электронной теплопроводностью и плотностью $2 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 (см. § 5) времена локализации равны $5 \cdot 10^{-10}$ и $5 \cdot 10^{-7}$ сек для значений характерной температуры, равных 100 и 10 эв соответственно при глубине локализации $\simeq 5 \cdot 10^{-3}$ см.

Обсуждается возможность исследования эффекта метастабильной локализации тепла в эксперименте (§4,5). Приводятся расчетные формулы, оценки и общие требования предъявляемые к такому эксперименту. Анализ этих требований показывает, что они не являются экстраординарными и, по-видимому, практически достижимы.

В качестве примера оценены параметры полностью ионизированной водородной плазмы (в которой коэффициент электронной теплопроводности зависит от температуры), нагреваемой в режиме с обострением. Формулируются предположения, в которых данные оценки являются справедливыми. Сравниваются режим нагрева плазмы, приводящей к локализации тепла и обычный режим нагрева, в котором локализация отсутствует. С помощью численных расчетов выясняется влияние газодинамического движения на эффект локализации.

Обзор исследования особенностей нелинейных газодинамических и тепловых процессов можно найти в работах [41, 42]. Явления, связанные с распространением тепловых волн в сжимаемой среде, при зависимости коэффициентов теплопроводности от температуры, изучались в [43-47].

8. Эксперимент по обнаружению локализации может быть поставлен, разумеется, не только на плазме. Известно немало физических объектов, в которых теплопроводность носит нелинейный характер. К тому же, в силу общности,физической природы и математического описания, результаты настоящей работы приложимы и к процессам диффузии вещества, фильтрации газов в пористой среде и т.п., если соответствующие коэффициенты переноса нелинейным образом зависят от свойств среды, а граничные режимы нарастают с обострением.

Авторы признательны В.Б.Розанову за полезные обсуждения.

§ I. Локализация теплового воздействия граничных режимов, нарастающих с обострением.

I.I. Постановка задачи.

Пусть среда, коэффициент температуропроводности которой $k = k_0 \cdot T^{\sigma}$ (постоянные $k_0 > 0$ и $\sigma > 0$), заполняет полупространство $0 \leq z < +\infty$, и на границе $z = 0$ для значений времени $t_0 \leq t < t_f$ задан закон роста температуры

$$T(0,t) = T_0 (t_f - t)^n, \quad T_0 = Const > 0, \; n < 0 \tag{I,I}$$

Распространение тепла от границы $z=0$ внутрь такой среды описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{I.2}$$

В начальный момент времени $t = t_0$ в среде $z \geq 0$ задано распределение $T(z, t_0)$.

Уравнение (I.2) допускает сдвиг по времени t. Поэтому, в дальнейшем различные режимы вида (I.I) будем рассматривать при одном и том же значении параметра $t_f = 0$.

Кроме того, если не оговорено противное, будем считать, что тепло распространяется в первоначально холодную среду

$$T(z, t_0) = 0, \qquad z > 0. \tag{I.3}$$

I.2. Автомодельная задача.

Если $t_0 = -\infty \, (T(0, t_0) = T(0, -\infty) = 0)$, то первая краевая задача (I.I)-(I.3) имеет автомодельное решение [I8,24], Обычный анализ размерностей [4I] в этом случае представляет температуру и поток тепла в виде

$$T(r,t)=T_0(-t)^n\cdot f(\xi)$$

$$W(r,t)=-\kappa_0 T^\sigma\frac{\partial T}{\partial r}=\kappa_0 T_0^{\frac{\sigma+2}{2}}(-t)^{\frac{n(\sigma+2)-1}{2}}\omega(\xi) \qquad (I.4)$$

где автомодельная координата

$$\xi=r\left(\kappa_0^{1/2}T_0^{\sigma/2}(-t)^{\frac{1+n\sigma}{2}}\right)^{-1} \qquad (I.5)$$

а $f(\xi)$ (и, следовательно, $\omega(\xi)=-f^\sigma\frac{df}{d\xi}$) находится из

$$\frac{d}{d\xi}\left(f^\sigma\frac{df}{d\xi}\right)-\frac{1+n\sigma}{2}\xi\frac{df}{d\xi}+nf=0 \qquad (I.6)$$

с граничными условиями

$$f(0)=1,\qquad f(\xi_\varphi)=\omega(\xi_\varphi)=0 \qquad (I.7)$$

Условия обращения температуры и потока в нуль на фронте тепловой волны (ξ_φ - координата фронта) являются необходимыми требованиями при описании процесса проникновения тепла в холодную среду [3; 8] .

Автомодельное решение (I.4) для (I.I)-(I.2) с $f(\xi)$ определяемым из (I.6)-(I.7), имеет место и при начале процесса от момента $t_0>-\infty$, если в этот момент вместо (I,3) задано соответствующее начальное распределение

$$T(r,t_0)=T_0(-t_0)^n\cdot f(\xi(r,t_0))$$

При построении автомодельной задачи для режима с обострением можно, подобно работам [31], отталкиваться от автомодельной задачи для $T(0,t)=T_0\cdot t^n$ с $t>0$. С точки зрения анализа размерностей задачи с $t>0, t\to\infty$ и $t<0, t\to 0$ одинаковы, однако в задаче с $t>0$ (соответствующей режиму без обострения) $|t|\to\infty$, а в задаче с $t<0$, $|t|\to 0$. В приведенной выше постановке мы написали знак минус перед величиной t в (I.4). При этом T_0 - положительно, а время возрастает от $t=-\infty$ до $t=0$. Это привело к появлению знака минус в (I.6) (по сравнению с соответствующим уравнением для задачи с $t>0, t\to\infty$) перед членами, получившимися при постановке (I.4) в член $\partial T/\partial t$ из (I.2). Если же, следуя [31], оставить $T(0,t)$ в виде $T_0\cdot t^n$ но положить время возрастающим от $t=-\infty$ до $t=0$, $(t<0)$, то T_0 будет комплексной величиной (т.к. $T(0,t)>0$), а в (I.4) вместо K_0 войдет $K_1=-K_0$ (т.к. $z>0$), Последнее приведет в (I.6) к изменению (по сравнению с соответствующим уравнением для задачи с $t>0, t\to\infty$) знака перед диффузионным членом, что соответствует общему принципу отрицательности безмерных коэффициентов диссипации в безразмерных уравнениях для задач с обострением [31]. Легко видеть, что оба подхода дают для режима обострения ($-\infty<t<0$) одно и то же уравнение (I.6), отличающееся от соответствующего уравнения для задачи без обострения ($0<t<+\infty$). Существенно, что решение задачи с обострением нельзя получить из решения задачи без обострения с теми же $|T_0|$ и n, поменяв в нем лишь направление хода времени. Физически ясно, что при наличии в среде диссипативных процессов, действие на нее режимов с обострением должно приводить к иным результатам, чем действие режимов без обострения, несмотря на размерную и мажущуюся математическую эквивалентность таких граничных законов.

Чтобы понять, как происходит проникновение тепла в холодную среду при наличии режима (I.I) в автомодельной задаче ($t_0 = -\infty$), достаточно исследовать уравнение (I.6) с условиями (I.7) Такое исследование достаточно полно приведено в [24].

В случае $t_0 > -\infty$ ставится обычный при наличии у задачи (I.I)-(I.3) решения (I.4) вопрос о приближении решения задачи с $t_0 > -\infty$ к автомодельному при $t \to 0$. Для его выяснения, кроме необходимого здесь численного решения задачи (I.I)-(I.3), привлекаются теоремы сравнения из [9]. Основываясь на них и используя известный вид автомодельных решений можно сделать строгие математические утверждения о локализации тепла в задаче (I.I.)-(I.3).

Приведем результаты исследования задачи (I.I)-(I.3) в автомодельной $(t_0 = -\infty)$ и в неавтомодельной $(t_0 \neq -\infty)$ постановках.

I.3. HS - режим. Отсутствие локализации тепла.

При $n < -1/6$ (HS - режим) прогрев характеризуется распространением тепла в глубь вещества в виде волны с конечным фронтом.

В автомодельном решении координата фронта z_φ, а также эффективная (скиновая) глубина прогрева $z_{эфф}$ (например; точка ξ эфф, где f (ξ эфф)=0.5 - полуширина) увеличиваются со временем:

$$\begin{cases} z_\varphi(t) = \xi_\varphi K_0^{1/2} T_0^{6/2} (-t)^{\frac{1+n6}{2}} \\ z_{эфф}(t) = \xi_{эфф} K_0^{1/2} T_0^{6/2} (-t)^{\frac{1+n6}{2}} \end{cases} \qquad (I.8)$$

Значения $\xi_\varphi < \infty$ и ξ эфф находятся из решения (I.6)-(I.7). В окрестности фронта справедливо разложение

$$T(z,t)=T_0(-t)^n\left[((1+n\sigma)\sigma\xi_\varphi/2)^{1/\sigma}(\xi_\varphi-\xi)^{1/\sigma}+\dots\right] \quad (I.9)$$

Размеры волны, температура и тепловой поток в любой точке пространства неограниченно возрастают при $t\to 0$.

Последнее утверждение справедливо и для неавтомодельной задачи (I.I)-(I.3), когда $t_0\neq-\infty$. Строгое доказательство этого факта основывается на теоремах сравнения: в [25] для некоторого t^0, зависящего от t_0, и $n<-1/\sigma$ строится автомодельное решение с граничным HS-режимом, которое при $t^0<t<0$ всюду меньше решения задачи (I.I)-(I.3) с $t_0\neq-\infty$, $n<-1/\sigma$. Поэтому, в такой задаче размер области прогрева и количество тепла в ней неограниченно возрастают.

В отличие от задачи прогрева граничным режимом без обострения [4-7], в HS- режиме величины, характеризующие процесс, обращаются в бесконечность по истечении конечного промежутка времени $t_0\le t<0$, $t_0>-\infty$ (в задаче без обострения при $t\to\infty$, $t_0\le t<+\infty$).

Численная реализация задачи (I.I)-(I.3) в HS- режиме с $t_0\neq-\infty$ показывает, что, начиная с некоторого момента $t=t_{уст}$, $t_0<t_{уст}<0$, решение с достаточной (и улучшающейся при $t\to 0$) степенью точности описывается автомодельным решением (I.4)-(I.7). В качестве иллюстрации на рис. I^{а} приведены результаты численного решения задачи (I.I)-(I.3) с параметрами $\sigma=2$, $k_0=0.5$, $n=-1<-1/\sigma=-0.5$, $T_0=0.12$, $t_0=0.112$ (крестиками отмечена полуширина). Это решение в соответствующих переменных (ξ,f) приведено на рис. I^{б}. При $t=t_{уст}\simeq-0.01$ происходит "выход" на автомодельное решение (пунктир), полученное численным интегрированием (I.6)-(I.7).

I.4. Локализация тепла в S-режиме.

При $n=-1/\sigma$ (S - режим) автомодельное решение задачи (I.I)-(I.3) представляется в виде с разделенными переменными ж):

$$T(r,t)=\begin{cases} T_0(-t)^{-1/\sigma}(1-r/r_{\varphi})^{2/\sigma}, & 0\le r\le r_{\varphi} \\ 0, & r>r_{\varphi} \end{cases} \qquad (I.I0)$$

$$r_{\varphi}=(2k_0T_0^{\sigma}(2+\sigma)/\sigma)^{1/2}$$

Здесь r_{φ} -глубина прогрева вещества остановившейся тепловой волной. Как видно из (I.I0) она определяется и свойствами вещества (k_0, σ), и интенсивностью граничного режима (T_0). Это решение воспроизводится численно. Результаты расчета для значений параметров $k_0=0.5, \sigma=2, n=-0,5=-1/\sigma, T_0=0.354, (r_{\varphi}=0.5)$ приведены на рис.2а. Крестиками отмечена полуширина, которая, как и r_{φ} не меняется с течением времени, хотя температура и количество тепла в зоне локализации $0\le r\le r_{\varphi}$ неограниченно нарастают в соответствии с (I.I0).

При реализации граничного S -режима с момента $t_0>-\infty$ решение задачи (I.I)-(I.3) всегда и всюду меньше решения (I.I0) в силу теорем сравнения. В частности глубина прогрева в этом случае не превосходит величины r_{φ} . Кроме этого, численная реализация такой задачи показывает наличие "выхода" на решение (I.I0). На рис.2б представлены результаты такого расчета с $t_0=-0.1125$. Остальные параметры те же, что и в предыдущем

ж) Решения в разделяющихся переменных для уравнения нелинейной теплопроводности известны давно [I,48], но внимание на остановку фронта тепловой волны впервые было обращено в [I2], где получено и численно реализовано рассматриваемое в п.I.4 решение.

примере. Для каждой константы T_0 существует своя (в данной среде) глубина прогрева r_{φ} и свой, локализованный в течении времени $t_{уст} \leq t < 0$ профиль, определяемые (I.IO). В данном примере ($\sigma=2$, $k_0=0.5$) $t_{уст} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ и профиль есть линейная функция радиуса r. Связь между $t_{уст}$ и t_0 будет рассмотрена в § 3, свойство профиля быть локализованным в течение конечного времени - в § 2. Из результатов расчета видно:

а) полуширина остается постоянной уже начиная с момента

$$t \simeq 6.5 \cdot 10^{-3}$$

б) глубина проникновения не превосходит r_{φ}, а с момента $t_{уст}$ близка к r_{φ} и практически не меняется; с этого момента профиль температуры соответствует (I.IO);

в) все поступающее с границы среды тепло распределяется в области локализации $0 \leq r \leq r_{\varphi}$, температура и количество тепла в этой области неограниченно возрастают.

Тепловая волна перестает проникать в холодную среду, не имеющую стоков тепла.

I.5. Локализация тепла в LS- режиме.

При $-1/6 < n < 0$ (LS-режим) эффективная глубина проникновения тепла в среду сокращается со временем по закону (I.8) для $r_{эффф}$. Отсюда же следует, что при $\xi_{\varphi} < +\infty$, радиус фронта тепловой волны уменьшается, что физически бесмысленно*). Потому, необходимо, чтобы $\xi_{\varphi} = \xi_{\varphi}(n, \sigma) = +\infty$. Анализ задачи (I.6)-(I.7) для S - режима подтверждает этот вывод. В этом случае разложение в окрестности фронта имеет

---

*) Это имело бы смысл, если бы в точке $r = r_{\varphi}$ находился бы поршень с заданным тепловым потоком.

вид

$$T(r,t)=T_0(-t)^n\cdot\left[C\cdot\xi^{\frac{2n}{1+n\sigma}}+C_1\cdot\xi^{\frac{2n-2}{1+n\sigma}}+\dots\right] \qquad (I.II)$$

где $C = C(n,\sigma)$ определяется из (I.6)-(I.7), а для следующего члена разложения

$$C_1=\frac{-2n(n(\sigma+2)-1)}{(1+n\sigma)^2}\,C^{\sigma+1}<0$$

Для каждой фиксированной точки r_0 значение координаты ξ_0 в соответствии с (I.5) при $t\to-0$ становится сколь угодно большим. Значит, в каждой фиксированной точке r_0 с некоторого момента времени (при $t\to-0$) начинает быть справедливым разложение (I.II). Выясним, каково значение температуры в некоторой фиксированной точке r при $t\to-0$. Для этого ограничимся в (I.II) первым членом разложения и подставим в (I.II) ξ из (I.5). Получим

$$\lim_{\substack{t\to-0\\ r>0}} T(r,t)=\frac{C(n,\sigma)\,T_0}{(k_0T_0^{\sigma})^{\frac{n}{1+n\sigma}}}\cdot r^{\frac{2n}{1+n\sigma}}-0 \qquad (I.I2)$$

$$\lim_{\substack{t\to-0\\ r>0}} W(r,t)=\lim_{\substack{t\to-0\\ r>0}}\left(-k_0T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial r}\right)=$$

$$=-\frac{2nC^{\sigma+1}}{1+n\sigma}\,k_0^{\frac{1-n}{1+n\sigma}}\cdot T_0^{\frac{\sigma+1}{1+n\sigma}}\cdot r^{\frac{2n+n\sigma-1}{1+n\sigma}}-0$$

Если $t_0\neq-\infty$, то для любого граничного LS-режима (т.е. для любых $n\in(-1/\sigma,0)$, T_0, t_0) можно построить такой граничный S-режим, что

$$T_{0LS}(-t_0)^n = T_{0S}(-t_0)^{-1/\sigma}$$

$$t_0 < t < 0$$

$$T_{0LS}(-t) < T_{0S}(-t)^{-1/\sigma}$$

Эта возможность следует из неравенства $n > -1/\sigma$: с течением времени граничный S -режим растет быстрее всякого граничного LS-режима. Здесь $T_{0S} = T_{0LS}(-t_0)^{n+1/\sigma}$ зависит от t_0 и тем больше, чем больше $|t_0|$."Поле" S-режимов (сплошные линии), мажорирующих данный LS -режим (пунктир) для разных значений t_0 изображено на рис.4б. Используя построенную мажоранту граничных условий и теоремы сравнения, можно строго доказать , что решение задачи (I.I)-(I.3) для LS- режима всегда и всюду не превосходит решения (I.I0) с соответствующей контантой $T_{0S} = T_{0LS}(-t_0)^{n+1/\sigma}$.Итак, распространение тепла в LS-режиме локализовано. Глубина локализации не превооходит глубины локализации соответствующего S - режима :

$$r_{\varphi_{LS}} \le r_{\varphi_S} = \left[\frac{2}{\sigma}(\sigma+2)k_0 T_{0S}^{\sigma}\right]^{1/2} = \left[\frac{2}{\sigma}(\sigma+2)k_0 T_0^{\sigma}\right]^{1/2}(-t_0)^{\frac{1+n\sigma}{2}} \quad (I.I3)$$

или $r_{\varphi_{LS}} = R(n,\sigma)\cdot r_{\varphi_S}$. Введенная здесь функция $R(n,\sigma)\in(0,1]$, зависящая только от безразмерных параметров n и σ , определяется в § 3 из численного решения (I.I)-(I.3). Итак, глубина локализации в LS-режиме зависит не только от свойств вещества (k_0, σ) и параметров граничного режима (T_0, n), но и от момента начала процесса, причем она конечна при любом конечном t_0 , монотонно растет с ростом $|t_0|$ и обращается в бесконечность лишь при $t_0 \to -\infty$. Поскольку в автомодельном LS -режиме $r_\varphi = \infty$, то при $t_0 \ne -\infty$ "бесконечный хвост"

автомодельного решения ($T(r,t) \to 0$ при $r \to \infty$) не реализуется, но любая "внутренняя часть" решения $f(\xi), \xi \in (0, \xi_0)$ для любого сколь угодно большего ξ_0 (т.к. для фиксированного r_0 соответствующая $\xi_0 \to \infty$ при $t \to 0$) реализуется, и, значит, вблизи границы (для $0 < r < r_{\varphi_{LS}}$) решение стремится к предельной кривой (I.I2) при $t \to -0$.

На рис.3а приведены результаты численного решения задачи (I.I)-(I.3) для $K_0 = 0.5, \sigma = 2, T_0 = 1{,}06, n = -0.25, t_0 = -0.1125$ Для этих параметров $r_{\varphi_S} = 0.87$. К моменту $t_{уст} = -3 \cdot 10$ тепловая волна достигает глубины локализации $r_{\varphi_{LS}} = 0.57$, фронт волны дальше не продвигается, полуширина начинает сокращаться и к моменту $t = -10^{-6}$ составляет уже $1/6$ от максимальной. Виден процесс смены "выпуклого" распространяющегося профиля температуры на "вогнутый" нераспространяющийся. Рис.3б иллюстрирует установление автомодельного профиля вблизи границы ($r = 0$) для результатов расчета рис.3а. Видно нарушение автомодельности в окрестности точки фронта $r = r_{\varphi_{LS}}$.

Результаты численного решения задачи (I.I)-(I.3) с $K_0 = 0.5$ $\sigma = 2; T_0 = 1/\sqrt{2}; n = -0.25$ и различными значениями t_0 , а именно $t_{01} = -1$, $t_{02} = -81/256$, $t_{03} = -1/16$ на момент $t = -10^{-6}$ приведены на рис.4а . Соответствующие значения r_{φ_S} здесь $r_{\varphi_{1S}} = 1$, $r_{\varphi_{2S}} = 0.75$, $r_{\varphi_{3S}} = 0.5$, а реально достигнутые в счете $r_{\varphi_{1LS}} = 0.72$, $r_{\varphi_{2LS}} = 0.51$, $r_{\varphi_{3LS}} = 0.36$ соответственно. Следовательно, можно считать, что $R(-0.25, 2) \simeq 0.7$.

Таким образом, тепловое воздействие граничного LS-режима на среду локализовано, причем:

а) глубина локализации конечна, зависит от момента начала процесса и определяется формулой (I.I3);

б) полуширина, а вместе с ней область, где распределяется поступающее с границы тепло, сокращается;

для $t \to 0$ количество тепла в обла$1/(\sigma+2)$изации неограниченно возрастает при $-1/\sigma < n \le -1/(\sigma+2)$ и стремится к конечной величине при $-1/(\sigma+2) < n < 0$; это следует из формулы для количества тепла

$$Q(t) = \int_0^{r_\varphi(t)} T(r,t)\,dt = \int_{t_0}^{t} W(0,t)\,dt + Q_0$$

с учетом того, что для $t_{уст} \le t < 0$ поток $W(0,t)$ может быть выражен по (I.4);

а) автомодельные закономерности устанавливаются вблизи границы $r = 0$ и не имеют места у фронта волны;

г) в силу теорем сравнения, т.к. граничные условия для задачи (I.I)-(I.3) с $t_0 \ne -\infty$ мажорируются граничными условиями для задачи с $t_0 = -\infty$, температура всюду и всегда меньше значения, даваемого формулой (I.I2).

§ 2. Физические причины локализации тепла. "Инерционные" и "безинерционные" профили температуры.

2.I. Связь эффекта локализации тепла и вида профиля температуры.

Приведем сначала физические соображения, указывающие на связь степени "выпуклости" профиля температуры с его свойством не распространяться в холодную среду. Эти соображения носят качественный, поясняющий характер и не являются строгим доказательством отсутствия движения фронта волны.

Свойство профиля быть локализованным можно связать с характером поведения температуры вблизи фронта $T(r)$. Так, нераспространяющимися оказываются профили для которых :

$$\frac{\partial^2 T^{\sigma/2}}{\partial r^2} \ge 0, \qquad r \to r_\varphi . \tag{2.I}$$

Будем называть их "вогнутыми". В случае $\sigma=2$ понятие "вогнутости" совпадает с обычным.

Рассмотрим участок среды, ограниченный плоскостями, находящимися на расстоянии $x+\Delta x$ и x от точки фронта. Тепло, поступающее с границы, распределяется по профилю тепловой волны и приносится в рассматриваемый участок посредством процесса теплопроводности. Предположив, что в точке x профиль температуры в данный момент времени t имеет вид $T(x,t)=A(t)\cdot\varphi(x)$ легко вычислить поступающее в участок и вытекающее из него тепло. Разница этих двух потоков тепла поднимает температуру в данном участке. Если предположить, что форма профиля в следующий момент времени та же, т.е. $T(x,t)=A(t+\Delta t)\cdot\varphi(x)$, то сразу находим, что $T(x,t)=\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)k_0}\right]^{1/\sigma}(t_f-t)^{1/\sigma}x^{2/\sigma}$, т.е. решение (I.IO) ($x=r_\varphi-r$). Это рассуждение показывает, что при зависимости $T(x,t)\sim x^{2/\sigma}$ в течение конечного времени $t_f<t<0$ все поступающее в данный участок тепло расходуется на поддержание формы профиля. Если предположить зависимость $T(x,t)\sim x^{\alpha}, \alpha<2/\sigma$ и повторить те же рассуждения, то получим, что при $\alpha<2/\sigma$ кроме тепла, необходимого на поддержание формы профиля, остается еще некоторое количество тепла. Оно может разместиться лишь правее точки $r=r_\varphi$, и, следовательно, фронт будет продвигаться. Для $\alpha>2/\sigma$ поступившего тепла не хватает для поддержания вида профиля, то есть распространения фронта не будет, а поступающие извне порции тепла вообще не достигают некоторой области вблизи фронта (см.рис.3[а]). Эти же выводы следуют из (2.I), если $T(x,t)\sim x^{\alpha}$, $x=r_\varphi-r$. Приведенным рассуждением обосновывается физическая осмысленность формулы (2.I).

Ниже будет сформулировано строгое утверждение, касающиеся локализации, и основывающееся на использовании теорем сравнения (п.2.2). Это утверждение относится к профилям, удовлетворяющим условию (2.I) и дает нижнюю границу времени локализации.

Отметим, что понятие локализованных профилей, если трактовать его эффективно (п.3.3) связано с характером профиля в целом и не зависит от деталей поведения температуры в окрестности фронта. Реализовать тонкую структуру фронта в численном и тем более в физическом эксперименте затруднительно или невозможно, ее знание необходимо лишь для доказательства математически строгих утверждений.

2.2. Локализация тепла в задаче Коши.

Для выяснения вопроса о связи формы профиля температуры с эффектом локализации тепла рассмотрим эволюцию некоторого профиля, поставленного в виде начальных данных (задача Коши).

Пусть в момент $t = t_0$ для уравнения (I.2) при $-\infty < r < \infty$ задано следующее начальное распределение

$$T(r, t_0) = \begin{cases} T_m (1 - |r|/r_0)^{2/\sigma}, & |r| \le r_0 \\ 0, & |r| > r_0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Функция $T(r, t_0)$ из (2.3) удовлетворяет условиям теорем существования и единственности решения и теорем сравнения [9]. В работах [18],[20], [25] сравнивались решения первых краевых задач, совпадающих при $r \geq 0$ и $r \leq 0$ с решением задачи Коши (I.2)-(2.3) с автомодельным решением (I.I0) для S-режима с начальными данными (2.3). Основываясь на решении (I.I0) и теоремах сравнения нетрудно показать, что решение $T(r, t)$ задачи Коши (I.2),(2.3) мажорируется при $r \geq 0$ и $r \leq 0$ решением (I.I0) (при $r \leq 0$ в (I.I0) вместо r берется $-r$) и, следовательно, локализовано в области $-r_0 < r < r_0$ в течение промежутка времени, не меньше-

го чем:

$$t_* = r_0^2\sigma/(2k_0(\sigma+2)T_m^\sigma) \qquad (2.4)$$

то есть $T(r,t)\equiv 0$ при $|r|\geq r_0$ для $t_0\leq t\leq t_0+t_*$
Кроме этого, любое начальное распределение, имеющее совпадающие с (2.3) фронты и всюду не превосходящее (2.3), также локализовано в области $|r|\leq r_0$. Время локализации оценивается снизу по (2.4).

Сформулированное утверждение строго определяет для данной среды (т.е. данного значения σ) класс "вогнутых" профилей температуры. Время их локализации зависит от свойств среды (k_0, σ), а также от характеристик начального распределения температуры r_0 и T_m.

На рис.5а приведены результаты численного решения задачи (I.2), (2.3) с параметрами $\sigma=2, k_0=1, r_0=2, T_m=1, t_0=-1\,(t_*=1)$. В течение времени $t_0\leq t\leq 0$ возмущение температуры локализовано. За этот промежуток времени формируется "выпуклый" профиль температуры и при $t>0$ тепло начинает уходить из области локализации.

Этот расчет также показывает эволюцию "инерционного" профиля температуры после того, как создавший его граничный режим "отключается" (поток на границе становится равным нулю).

Примером "выпуклого" профиля, не обладающего свойством тепловой "инерции", является распределение вида

$$T(r,t_0)=\begin{cases} T_m(1-r^2/r_0^2)^{1/\sigma}, & |r|\leq r_0 \\ 0, & |r|>r_0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

то есть решение задачи о мгновенном точечном источнике тепла [3], взятое в некоторый момент времени. на рис.5б приведены результаты расчета задачи Коши с начальными данными (2.5) для $T_m=0.62$, $r_0=2$ в среде с $k_0=1, \sigma=2$. количества тепла

здесь, то же, что и в случае рис.5а. В данном примере тепло начинает сразу проникать в среду. На рис.5в показана эволюция "комбинированного" профиля: при $z > 0$ взята (2.3), при $z < 0$ – (2.5) (T_m =I , z_0 =2, K_0 =I, σ =2). В результате "правая часть" локализована в течении времени $t_* = 1$, слева же тепло начинает распространяться сразу. В течение конечного промежутка времени происходит направленное распространение тепла(!).

2.3. Оценки времени удержания тепла при различных физических условиях.

Пусть в плазме из однократно ионизирующихся атомов с плотностью частиц n ($n = n_i + n_a$, где n_i - плотность ионов, n_a - плотность нейтральный атомов; плотность электронов $n_e = n_i$) перенос тепла осуществляется электронами. Тогда, если не учитывать другие процессы, для времени локализации получим:

$$t_* = 5 \cdot 10^{-51} \frac{z_0^2 n \Lambda \alpha}{(k T_e)^{5/2}} \qquad (2.6)$$

где величины измеряются в системе СГС, k - постоянная Больцмана (например, $k = 1.6 \cdot 10^{-9} \frac{эрг}{кэв}$) множитель α равен двум для полностью и единице для слабо ионизированной плазмы, Λ - кулоновский логарифм. Оценки для времени локализации различных по масштабам начальных распределений вида (2.3) приведены в таблице, помещенной в конце пункта. T_m в (2.6) есть максимальная температура электронов и при вычислениях принималось, что $T_i \approx T_e$ Это справедливо, если время электрон-ионной релаксации $\tau_{ei} \ll t_*$ Последнее оказывается неверным лишь для первой оценки, где $\tau_{ei} \gg t_*$. При этом передачей энергией от электронов к ионам можно пренебречь и для электронной температуры справедливо (I.2). В пределе, когда $T_i \ll T_e$ вклад в теплоемкость вносят только электроны и значение t_* уменьшается в два раза (в пол-

ностью ионизированной плазме). Таким образом, для двух предельных случаев ($T_i \approx T_e$, обмен энергиями велик, теплоемкость складывается из электронной и ионной и $T_i \ll T_e$, обмен энергиями мал, теплоемкость только электронная) времена локализации в полностью ионизированной плазме отличаются в два раза. Значения τ_{ei}, τ_e приведены, например, в [42 , 49 , 50].

Если турбулентная плазма сильно замагничена (оценка 5), то κ надо уменьшить в $\omega_e \tau_e$ раз (ω_e - ларморовская частота, а τ_e - время пробега электронов). Для $n_a \ll n_e$, $\Lambda = 20$ получим

$$t_* = 3 \cdot 10^{-20} \frac{r_0^2 H}{k T_m} \text{ сек}$$

№ п/п: Объект	$n_e (см^{-3})$	$n_a = n - n_i$	T_m (эв)	r_0 (см)	t_* (сек)
I. Дт-плазма	$5 \cdot 10^{20}$	0	10^3	$8 \cdot 10^{-3}$	10^{-11}
2. Н -плазма	10^{15}	0	I	I0	$2 \cdot 10^{-3}$
3. Фотосфера Солнца	$3 \cdot 10^{13}$	10^{17}	0,5	$2 \cdot 10^8$ = 2000 км	$5 \cdot 10^{14}$ = 10^7 лет
4. Межзвездн. газ, B=0	10^{-3}	I0	10^{-2}	$3 \cdot 10^{19}$ = I00 парсек.	$6 \cdot 10^{25}$ = 10^{18} лет
5. Межзвездн. газ. $B = 10^{-5}$ Э	I0	I	I	" "	$2 \cdot 10^{26}$ = $4 \cdot 10^{18}$ лет

§ 3. Условия проявления локализации при наличии различных осложняющих факторов.

3.I. Вторая кревая задача.

В реальном эксперименте не всегда удобно или возможно задавать на границе со средой температуру (условие (I.2)).

Например, для задач ЛТС [26-28, 51,52] типична ситуация, когда к поверхности мишени подводится поток лазерного излучения, поглощающийся при определенных условиях (аномальное поглощение) вблизи границы.

Рассмотрим для (I.2), (I.3) задачу с граничным условием

$$W(0,t) = -k_0 T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} = W_0(-t)^{n_1} \tag{3.I}$$

где $W_0 > 0$, $n_1 < -1/2$, $t_0 \le t < 0$. Полностью аналогично § I, для $t_0 = -\infty$ решение задачи (3.I), (I.2), (I.3) автомодельно:

$$T(r,t) = W_0^{\frac{2}{2+\sigma}} \cdot k_0^{-\frac{1}{\sigma+2}} \cdot (-t)^{\frac{2n_1+1}{2+\sigma}} \cdot \tilde{f}(\tilde{\xi}) \tag{3.2}$$

$$W(r,t) = W_0(-t)^{n_1} \cdot \tilde{\omega}(\tilde{\xi})$$

$$\tilde{\xi} = r \cdot k_0^{-1/(\sigma+2)} \cdot W_0^{-\sigma/(\sigma+2)} \cdot (-t)^{-\frac{n_1\sigma+\sigma+1}{2+\sigma}}$$

причем функция $\tilde{f}(\tilde{\xi})$ выражается через решение задачи (I.6), (I.7) $f(\xi)$ с помощью замены

$$\tilde{f}(\tilde{\xi}) = [b(n,\sigma)]^{-\frac{2}{2+\sigma}} \cdot f(\xi)$$

$$\tilde{\xi} = [b(n,\sigma)]^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}} \cdot \xi$$

$$n = \frac{1+2n_1}{\sigma+2}$$

где: $b(n,\sigma) = \omega(0) = -f'(0)$

Таким образом, все результаты, касающиеся автомодельной задачи (I.I)-(I.3) (§ I) справедливы и для автомодельной задачи (3.I), (I.2), (I.3). При $n_1 < -\frac{\sigma+1}{\sigma}$ осуществляется $HS-$, при $n_1 = -\frac{\sigma+1}{\sigma}$ – $S-$, при $-\frac{\sigma+1}{\sigma} < n_1 < -1/2$ $LS-$ режимы распространения тепла. (При $-1/2 \le n_1 < 0$ в автомодельной задаче температура падает и тепловой поток направлен из среды ($f'(0) \ge 0$); этот случай здесь не рассматривается).

Решение (I.I0) для $n_1 = -\frac{\sigma+1}{\sigma}$ примет вид:

$$T(r,t) = \begin{cases} \left[(2+\sigma)\sigma W_0^2/2K_0\right]^{1/2+\sigma} (-t)^{-1/\sigma} \cdot (1 - r/r_\varphi)^{2/\sigma}, & r \le r_\varphi \\ 0, & r > r_\varphi \end{cases} \tag{3.3}$$

$$r_\varphi = \left(2K_0 W_0^\sigma (\sigma+2)^{\sigma+1}/\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma+2}}$$

Результаты, полученные в § I для задачи с $t_0 \ne -\infty$ автоматически переносятся и на случай задания на границе теплового потока, так как в [9] теоремы существования, единственности и сравнения доказаны также и для второй краевой задачи. При этом, для $S-$ и $LS-$ режимов формулы (I.I3) и (I.I2) приобретут вид

$$r_{\varphi_{LS}} \le r_{\varphi_S} = \left[\frac{2(\sigma+2)^{\sigma+1} K_0 W_{0LS}}{\sigma}\right] (-t_0)^{\frac{n_1\sigma+\sigma+1}{\sigma+2}} \tag{3.4}$$

$$T(r,t) \le B(n_1,\sigma) W_{0LS}^{\frac{1}{n_1\sigma+\sigma+1}} \cdot K_0^{-\frac{1+n_1}{n_1\sigma+\sigma+1}} \cdot r^{\frac{2n_1+1}{n_1\sigma+\sigma+1}} \tag{3.5}$$

где константа в разложении у фронта задачи с потоком на границе

$$B(n_1,\sigma) = C(n,\sigma)/\left[b(n,\sigma)\right]^{\frac{1}{n_1\sigma+\sigma+1}}, \qquad n = \frac{2n_1+1}{2+\sigma}$$

3.2. Отклонения в граничном законе.

Пусть вместо (I.I) при $z=0$ задано условие

$$T(0,t)=T_0(t)\cdot(-t)^n \qquad (3.6)$$

где $t_0 \le t < 0$, $n<0$, а функция $T_0(t)$ такова, что $0<T_{0_1} \le T_0(t) \le T_{0_2}$ с константами T_{0_1} и T_{0_2}. Влияние такого возмущения граничных условий легко оценить с помощью теорем сравнения.

Для определенности рассмотрим S-режим ($n=-1/6$). Тогда решение задачи (3.6), (I.2), (I.3) сверху и снизу ограничено аналитическим решением (I.I0) с $T_0=T_{0_1}$ или T_{0_2} соответственно. Тем самым, это решение обладает, в целом, свойствами S- режима. Для него имеет место локализация тепла. Относительное отклонение в глубине локализации связано с относительным отклонением в граничном режиме:

$$\Delta z_\varphi \simeq \frac{\sigma}{2}\Delta T(0,t). \qquad (3.7)$$

Здесь $\Delta A=\frac{A-A_0}{A_0}$ и считается $\Delta A<1$; аналогично (3.7) имеем $\Delta z_\varphi \simeq \frac{\sigma}{\sigma+2}\Delta W(0,t)$. Таким же образом можно оценить и отклонения других характерных величин в зависимости от неточности задания температуры или теплового потока на границе.

На рис.6 приведены результаты численного решения задачи (3.6), (I.2),(I.3) при $K_0=1, \sigma=2, n=-1/2, t_0=-1$. Функция $T_0(t)=(1+0.2\sin(-t)^{-1})$, так, что $T_{0_1}=0.8$, $T_{0_2}=1.2$, $\Delta T(0,t)=20\%$. Полученное решение ограничено решениями (I.I0) (показанными пунктиром) с глубинами локализации $z_{\varphi_1}=1.6\ (T_0=T_{0_1})$ и $z_{\varphi_2}=2.4\ (T_0=T_{0_2})$. После установления полуширина колеблется вокруг среднего значения $\langle z_{эф\varphi}\rangle=1$. В целом, осуществляется S-режим

со всеми своими свойствами.

Аналогичные утверждения и оценки могут быть сделаны и для HS и LS-режимов, так как их свойства устанавливались с помощью тех же теорем сравнения.

Таким образом неточность в задании граничных режимов не уничтожает эффекта локализации, а ее влияние легко учитывается.

3.3. Влияние на локализацию ненулевого начального фона температуры.

Если вместо (I.3) принять, например, $T(z,t_0)=T^0=Const>0$ то математически строгие утверждения о локализации тепла, приведенные выше, уже не будут справедливы. Однако, расчеты подтверждают физически понятные соображения о несущественности реального фона и позволяют количественно определить условия его "малости".

В самом деле, при действии режима с обострением значения температуры вблизи границы может превзойти фоновое в любое число раз при приближении к моменту фокусировки. Различие между тепловыми процессами у границы и у фона усиливается из-за нелинейности среды. Эти процессы будут идти гораздно медленнее у фона, чем в зоне нагрева, если температура в ней превзойдет фоновую в достаточное число раз. Представления о локализации, развитые выше для нулевого фона, в данном случае приобретают эффективный характер. Так, существует конечная область пространства, с неизменными в течении конечного времени размерами, такая, что вне нее температура практически не меняется. Поступающее тепло распределяется в этой области локализации и лишь незначительная, уменьшающаяся со временем доля его проникает за эффективный фронт тепловой волны. Полуширина зоны локализации либо постоянна, либо уменьшается со временем. Количество тепла и температура в

зоне локализации могут неограниченно возрастать.

Условие "малости" фона, полученнре из расчетов при таково:

$$T(0; t_{уст})/T^{o} = 8 \div 12 \qquad (3.8)$$

т.е. к моменту установления (см.п.3.5) граничная температура должна на порядок величины превзойти фоновую. При $t \approx t_{уст}$ доля вышедшего из области локализации тепла составляет $\approx$ 5% и уменьшается с дальнейшим развитием процесса. При выполнении (3.8) с хорошей степенью точности справедливы количественные соотношения, полученные для нулевого фона.

На рис.7 показан "выход" на S-режим при $T^{o} = 1$. Здесь $K_0 = 1, \sigma = 2, T_0 = 1, r_{ф} = 2, t_0 = -1$ (см.(I.IO)). После момента $t_{уст} = -9.10^{-3}$ отношение доли выходящего тепла к содержащемуся в зоне локализации составляет 4%, 3.5%, 2% для моментов $-4 \cdot 10^{-3}$, $-1.6 \cdot 10^{-3}$, $-6.4 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

Аналогичный вывод о "малости" фона справедлив и для случая локализации тепла в задаче Коши (§ 2). Расчеты показывают, что для распределения (2.3) и $\sigma = 2$ критерием "малости" служит неравенство $T_m/T^{o} \geqslant 7$; при этом за время локализации из области $r \in [-r_0, r_0]$ уходит менее 5% тепла.

3.4. Коэффициент теплопроводности - произвольная растущая функция температуры.

Если К(Т) - произвольная (растущая) функция температуры, то математическое исследование усложняется, так как нелинейность среды уже не описывается лишь одним параметром σ.

Однако это не меняет принципиальную сторону дела. Для любого вида К(Т) можно заранее указать класс граничных режимов с обострением, приводящих к локализации.

Удобным приемом является представление К(Т) в виде:

$$K(T) = K_0 T^{\sigma(T)}$$

где $0<\sigma_1 \le \sigma(T) \le \sigma_2$ - зависит от температуры.

К локализации приводят граничные законы вида $T(0,t)=T_0(-t)^n$ или $W(0,t)=W_0(-t)^{n_1}$, удовлетворяющие условию: $-1/\sigma_2 \le n < 0$ или условию $-\frac{\sigma_2+1}{\sigma_2} \le n_1 < -1/2$ соответственно

При этом осуществляется либо S- режим, либо LS- режим, либо некотврая их комбинация. Глубина локализации, время локализации и другие величины определяются в каждом конкретном случае с помощью теоретических оценок и расчетов.

На рис.8 приведены данные численного решения уравнения (I.I) с К(Т) вида:

$$K(T)=\begin{cases} K_{0_2} T^{\sigma_2}, & 0 \le T \le 20 \\ K_{0_1} T^{\sigma_1}, & T \geqslant 20 \end{cases}$$

Граничный закон взят в виде (I.2). Параметры: $\sigma_2=2, K_{0_2}=1, n=-1/\sigma_2=-0.5, T_0=1, r_{\varphi_2}=2, \sigma_1=1, K_{0_2}=20, t_0=-1.$

Когда температура на границе $T(0,t) \le 20$ в среде реализуется S - режим, так как граничный закон соответствует S-режиму ($n=-1/\sigma_2$).

При $T(0,t)>20$ происходит смена S-режима на LS-режим, так как граничный закон соответствует LS-режиму. Определяющую роль играют процессы вблизи границы. Поэтому в среде в целом реализуется LS-режим, несмотря на то, что вблизи фона в точках где $T(r,t) \le 20$ вид К(Т) ему не соответствует.

Таким образом и при произвольной зависимости($K'(T) > 0$) всегда можно указать условия, в которых имеет место локализация тепла.

3.5. Критерии установления S и ΔS-режимов при граничном воздействии конечной длительности.

В § I с помощью численных решений задачи (I.I)-(I.3) был показан "выход" на автомодельное решение при $t_0 > -\infty$. Из физических соображений ясно, что такой выход будет происходить всегда, если выполнены определенные условия. Действительно, в S- и HS-режимах в среду поступает (при $t \to 0$) неограниченное количество тепла и любые начальные данные (содержащие конечное количество тепла) "забываются". В ΔS-режиме возможна ситуация, когда $\left(-\frac{1}{\sigma+2} < n < 0\right)$ даже при $t \to 0$ в среду поступает конечное количество тепла.(см,п.I.4. Если бесконечное количество тепла содержится в "хвосте" предельной функции (I.I2), то $\int_{t_0}^{0} W(0,t)dt < \infty$ для конечного t_0). Однако, в ΔS-режиме всегда происходит установление вблизи границы (решение здесь стремится к предельному (I.I2)), так как в уменьшающейся области пространства (например, для $0 < z < z_{эфф}(t)$) количество тепла неограниченно возрастает по сравнению с количеством тепла, содержащемся в любых начальных данных для этой области.

Данные в настоящем пункте условия установления справедливы для любых диапазонов изменения величин, т.е. для различных характерных значений температур, времен, потоков, если они связаны нижеприведенными соотношениями подобия. В самом деле, задача (I.I)-(I.3), $t_0 > -\infty$ может быть обезразмерена следующим образом:

$$t = \bar{t}(-t_0), \qquad T = \bar{T} \cdot T_0 (-t_0)^n$$

$$z = \bar{z}\left(2(\sigma+2) k_0 T_0^{\sigma} (-t_0)^{1+n\sigma}/\sigma\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

$$W = \bar{W}\left(2(\sigma+2) k_0 T_0^{\sigma+2} (-t_0)^{n(\sigma+2)-1/\sigma}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\sigma}{\sigma+2}\,\bar{T}^{\sigma}\,\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}\right)$$

$-1 \le \bar{t} < 0,\ \bar{r} \ge 0;\ \bar{T}(\bar{r},-1);\ \bar{T}(0,\bar{t}) = (-\bar{t})^{n}$. При этом(в соответствии с результатами § I) для S- и $\angle S$-режимов решение отлично от нуля в $0 \le \bar{r} \le R(n,\sigma) \le 1$. Эти соотношения позволяют перенести результаты, полученные для некоторых значений k_0, T_0 и t_0 на задачу с любыми другими значениями этих величин (при фиксированных n и σ). Так, например, для фиксированных среды (k_0, σ) и граничного режима (T_0, n) время локализации зависит лишь от полного времени процесса t_0 , потому что $\bar{t}_{уст}$. есть функция только n и σ : $t_{уст} = R_2(n,\sigma)\cdot t_0$ (функция $R_2(n,\sigma)$затабулирована ниже). Увеличивая t_0 можно наблюдать локализацию в течении любого промежутка времени $t_{уст} \le t < 0$. Как следует из закона (I.I) увеличение времени t_0 снижает характерное значение температуры ($n < 0$). Например, в случае S - режима $(n = -1/6)$, и при изменении масштаба времени в α раз масштаб температуры меняется в $\alpha^{-1/6}$ раз,пространотвенный масштаб неизменен (см.табл.3 в п.5.I). Такое преобразование подобия для конкретной экспериментальной ситуации может позволить выбрать тот диапазон времен и температур, в котором справедливо описание процессов теплопередачи с помощью (I.2) и возможно выполнение условий установления.

Приведем теперь полученные из расчетов критерии "выхода" для S -режима(таблицаI).

Таблица I.

σ	n	n_1	$R_2(n,\sigma)$	$R_1(n,\sigma)$	$R_4(n,\sigma)$	$R_5(n,\sigma)$	$R_3(n,\sigma)$
0.25	-4	-5	$6.0 \cdot 10^{-1}$	8	$1.3 \cdot 10$	$5 \cdot 10^{2}$	0.10
1.0	-1	-2	$9.4 \cdot 10^{-2}$	11	10^{2}	10^{4}	0.33
2.5	-0.4	-1.4	$1.56 \cdot 10^{-3}$	13	$8.4 \cdot 10^{3}$	$2.5 \cdot 10^{7}$	0.66
6.5	-0.1538	-1.154	$1.2 \cdot 10^{-7}$	12	10^{8}	$3 \cdot 10^{15}$	0.87

Здесь, как обычно, n – показатель в граничном законе для температуры (I.I), а $n_1 = \frac{n(\sigma+2)-1}{2}$ – для теплового потока (в S-режиме $n = -1/\sigma$, $n_1 = -(\sigma+1)/\sigma$) . Далее, $R_2(n,\sigma) = -\bar{t}_{уст} = t_{уст}/t_0$ – отношение времени локализации к полному времени процесса; $R_1(n,\sigma) = T(0,t_{уст})/T(0,t_0)$ и $R_4(n,\sigma) = \bar{W}(0,\bar{t}_{уст})/\bar{W}(0,-1) = W(0,t_{уст})/W(0,t_0)$ – отношение температуры и потока на границе в момент установления к начальным; $R_5(n,\sigma) = \bar{W}(0,\bar{t}^*)/\bar{W}(0,-1) = W(0,t^*)/W(0,t_0)$ – контрастность потока в момент $t = t^*$, когда $T(0,t^*) = 10 \cdot T(0,t_{уст})$ $R_3(n,\sigma) = r_{эфф}/r_{фф}$ – отношение полуширины к глубине локализации после установления $(t > t_{уст})$.

Как и в случае ненулевого фона (см.формулу (3.8)) оказалось, что $R_1 = 8 \div 12$. Тем самым, для установления S- режима даже при наличии ненулевого фона достаточно, чтобы температура на границе выросла в $10 \div 15$ раз по отношению к начальной. В силу (I.I) функция R_2 выражается через R_1 : $R_2 \simeq R_1^{-\sigma}$. После момента установления $(t_{уст} < t)$ поток и температура на границе связаны автомодельным соотношением $W(0,t) \sim T^{\sigma+1}(0,t)$, следовательно $R_4 \simeq R_1^{\sigma+1}$. В связи с этим, будем считать критерием установления одно из следующих трех соотношений:

$$\frac{T(0,t_{уст})}{T(0,t_0)}=10\div15;\quad \frac{W(0,t_{уст})}{W(0,t_0)}=(10\div15)^{\sigma+1};\quad \frac{t_{уст}}{t_0}=(10\div15)^{-\sigma}. \tag{3.10}$$

С увеличением σ сильно растут "контрастности" R_4 и R_5, уменьшается R_2, укручается профиль волны (увеличивается R_3).

Расчеты на установление S-режима при задании на границе теплового потока показали, что значение критерия R_4 ненамного увеличивается. Условия установления LS-режима при фиксированном значении $n=-1/4$ приведены в таблице 2.

Таблица 2.

σ	n	n_1	n_2	R_2	R_1	R_4	R_5	R
0.5	-0.25	-0.8125	0.4375	0.16	1.6	5	10^4	0.85
1.0	-0.25	-0.875	0.375	0.03	2.4	20	$6\cdot10^4$	0.72
2.5	-0.25	-1.0625	0.1875	$3.4\cdot10^{-3}$	4.1	450	10^7	0.66
3.5	-0.25	-1.189	0.0625	$9.5\cdot10^{-4}$	5.7	3500	$1.5\cdot10^8$	0.77

Здесь, по сравнению с таблицей 1, добавлено значение $n_2=\frac{1+n\sigma}{2}$ - показателя в законе зависимости полуширины от времени,- а функция R_3 заменена на функцию $R(n,\sigma)=\tau_{\varphi_{US}}/\tau_{\varphi_S}$ введенную в § 1. Видно, что требования на рост граничной температуры здесь мягче (функция $R_1(n,\sigma)$ уменьшается с ростом n для фиксированного σ). Расчеты для различных $n\in(-1/\sigma,0)$ при фиксированном σ дают примерно те же значения R_1

Ввиду наличия преобразований подобия (3.9), критерии установления R_1, R_2, R_4 и значения R_1, R_3, R_5 есть функции только n, σ; также и связь между отклонениями в глубине локализации

и в граничном условии (3.7) не зависит от абсолютных масштабов задачи.

В целом, можно сказать, что выполнение условия (3.10) обеспечивает установление режимов с локализацией тепла.

3.6. Локализация тепла в многомерном случае.

В работе [18] и подробно в [22] было показано, что эффект метастабильной локализации тепла не претерпевает принципиальных изменений, если распространение тепла носит неодномерный характер. Как и прежде, при изменении граничной температуры по закону $\sim(-t)^n$ реализуется либо HS- режим $(n<-1/6)$, либо S-режим $(n=-1/6)$, либо LS-режим $(-1/6<n<0)$. Тот же смысл сохраняют такие понятия как "выпуклые" и "вогнутые" профили, мажорирование и т.п.. Количественные значения критериев установления , "малости" фона, влияния отклонений в граничном режиме на локализацию тоже существенно не меняются.

Исследование в многомерном случае оказалось возможным в силу наличия простого аналитического решения для S-режима [18] после нахождения которого с помощью теорем сравнения можно определить класс граничных режимов, приводящих к локализации, а также класс " вогнутых" профилей температуры, обладающих свойством тепловой "инерции".

Все полученные теоретические представления были подтверждены численными решениями соответствующих многомерных задач.

В отличие от одномерных, в многомерных задачах появляется новый объект - форма области локализации. Она может быть гораздо сложнее, чем форма прямой призмы с бесконечно протяженным основанием и высотой, равной глубине локализации, которую имеет область локализации в одномерном случае.

Одной из возможных форм области локализации тепла является октаэдр. В самом деле, как показано в [22] распределение температуры

$$T(t_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} T_m\left(1 - \dfrac{\alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \alpha_3|x_3|}{r_0}\right)^{2/\sigma}, & \alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \alpha_3|x_3| \le r_0 \\ 0 & \alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \alpha_3|x_3| > r_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1;\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, 3$, заданное в восьмиграннике $\alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \alpha_3|x_3| \le r_0$ (r_0 - расстояние от центра до боковой грани) в момент $t = t_0$ в качестве начальных данных задачи Коши удерживается в нем в течение времени не меньшего, чем

$$t_* = \sigma r_0^2 / (2k_0(\sigma + 2) T_m^\sigma) \tag{3.12}$$

В течение времени локализации температура, максимальная в центре восьмигранника и равная нулю на его гранях, отлична от нуля только внутри него. По истечении этого времени в восьмиграннике формируется выпуклый профиль температуры и начинается растекание тепла. Тем же свойством обладает любое начальное распределение температуры, имеющие совпадающие с (3.11) фронты и мажорируемое выражением (3.11) внутри восьмигранника. Таким образом, в среде с нелинейной теплопроводностью реализуется не имеющий в течение конечного промежутка времени своей формы "тепловой кристалл".

Приведенный пример показывает возможность существования областей локализации тепла парадоксальной формы.

Наличие эффекта метастабильной локализации тепла в многомерном случае расширяет возможности его экспериментального обнаружения и исследования.

§ 4. Требования к экспериментальному исследованию локализации тепла.

4.I. Основные требования.

Полученные в предыдущем параграфе условия, гарантирующие существование локализации тепла, показывают, что этот эффект носит общий физический характер, а не является парадоксальным решением математической задачи. В его основе лежат вполне понятные физические причины (§ 2), и поэтому он может проявляться и в тех реальных условиях, когда " не работают" строгие математические утверждения. Это приводит к необходимости ставить вопрос об экспериментальном изучении эффекта метастабильной локализации тепла.

Подводя итог исследованиям §§ I÷ 3 настоящей работы, сформулируем общие условия к экспериментальному обнаружению эффекта локализации.

I) Необходимо наличие среды с нелинейной теплопроводностью, такой, чтобы характер нелинейности (рост коэффициента температуропроводности с температурой) сохранился при изменении температуры по крайней мере в I0÷ I5 раз (п.п.3.3, 3.5.). Для дальнейшего уверенного наблюдения локализации желательно сохранение свойств среды при росте температуры еще на порядок величины. Не является принципиальным требование степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры (п.3.4). Однако, для уточнения оценок в этом случае желательно провести предварительно серию расчетов.

2) Необходимо иметь источник нагрева, который мог бы обеспечить рост температуры (или теплового потока) на границе среды в нужном режиме и в нужное число раз (в 10÷15 для температуры), чтобы удовлетворить условиям установления (п.3.5). Для дальнейшего наблюдения желательно иметь возможность поднять граничную температуру в данном режиме еще на порядок величины.

3) Строгое соблюдение закона (1.1) или (3.1) необязательно, а допустимые отклонения могут быть оценены (п.3.2).

4) Начальный фон температуры должен быть достаточно "мал" (п.3.3). Отметим, что в S-режиме требование "малости" фона автоматически выполняется при выполнении условий установления, если температура, создаваемая граничным режимом в начальный момент, выше фоновой температуры.

5) Требование одномерности не является принципиальным (п.3.6) Однако, для данной неодномерной установки будет нужно предварительно провести серию расчётов для уточнения оценок.

6) Необходимо наличие аппаратуры, позволяющей разрешить пространственную и временную картины процесса (например, дающей возможность наблюдать фронт волны и полуширину в течении времени локализации, которое, вообще говоря, может быть мало по сравнению с полным временем процесса).

4.2. Расчетные формулы.

Приведем формулы, по которым можно определить масштабы процесса нагрева неподвижной среды с нелинейной теплопроводностью в режиме с обострением.

Рассмотрим, для примера, следующую простую схему. Пусть из вещества с постоянными плотностью ρ_0 удельной теплоемкостью C_0, коэффициентом теплопроводности $\varkappa=\varkappa_0 T^{\sigma}$ изготовлен плоский слой к части поверхности которого площадью $S \simeq (a\, r_{\varphi})^2$, а-число, подведен тепловой поток

$$\Omega(0,t)=\rho_0 C_0 W_0(-t)^{-1-1/\sigma} \tag{4.I}$$

меняющийся в S-режиме ($W_0=Const>0$; тепловой поток в веществе $\Omega=-\varkappa\cdot\frac{\partial T}{\partial r}$) и отличный от нуля в промежутке $t_0\le t\le\varepsilon<0$. Процесс нагрева будет одномерным, если взять достаточно большое число a. Как показывают модельные многомерные расчеты одномерность имеет место в центральной зоне уже при $a\gtrsim 1$, улучшаясь с увеличением a, так, что при $a\simeq 10$ практически во всей зоне нагрева процесс одномерен. Будем считать, что $\varepsilon>t_{уст}$, т.е. критерии установления (п.3.5) выполнены. Тогда реализуется решение (3.3), а после отключения граничного режима в зоне локализации сохранится достигнутая температура и удерживается тепло в течение времени $\varepsilon\le t<0$.

Воспользовавшись (3.3) найдем, что располагая потоком $\rho_0 C_0 W_0(-t_0)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma}}\le\Omega(0,t)\le\rho_0 C_0 W_0(-\varepsilon)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma}}\equiv\Omega_M$, можно получить максимальную температуру

$$T_M=\left[\frac{\sigma(\sigma+2)}{2}\left(\frac{\rho C}{\varkappa_0}\right)W_0^2\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}(-\varepsilon)^{1/\sigma}=$$

$$=\left[\frac{\sigma(\sigma+2)}{2\varkappa_0\rho_0 C_0}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}(-\varepsilon)^{\frac{1}{\sigma+2}}\,\Omega_M^{\frac{2}{2+\sigma}} \tag{4.4}$$

глубину прогрева r_{φ}(размер области локализации),

$$r_{\varphi}=\left[\frac{2\varkappa_0(\sigma+1)^{\sigma+1}}{\sigma\rho_0 C_0}W_0^{\sigma}\right]= \tag{4.5}$$

$$=\left[\frac{2\varkappa_0}{\sigma}\left(\frac{\sigma+2}{\rho_0 C_0}\right)^{\sigma+1}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}\cdot(-\varepsilon)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}\cdot\Omega_M^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}$$

затратив при этом на нагрев вещества энергию E_0

$$E_0=a^2\left[4\varkappa_0^2(\sigma+2)^{2(\sigma+1)}(\sigma\rho_0c_0)^{\sigma}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}\cdot W_0^{\frac{3\sigma+2}{\sigma+2}}(-\varepsilon)^{-1/\sigma}\cdot\left\{1-(\varepsilon/t_0)^{1/\sigma}\right\}=$$

$$=a^2\left[4\varkappa_0^2\sigma^{\sigma}\left(\frac{\sigma+2}{\rho_0c_0}\right)^{2(\sigma+1)}\right]^{\frac{1}{\sigma+2}}\cdot\Omega_M^{\frac{3\sigma+2}{\sigma+2}}\cdot(-\varepsilon)^{\frac{3\sigma+4}{\sigma+2}}\left\{1-\left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{1/\sigma}\right\} \quad (4.6)$$

или, на единицу площади поверхности $E_{уд}$.

$$E_{уд}=\sigma\rho_0c_0W_0(-\varepsilon)^{-1/\sigma}\left\{1-(\varepsilon/t_0)^{1/\sigma}\right\}=\sigma\Omega_M(-\varepsilon)\left\{1-(\varepsilon/t_0)^{1/\sigma}\right\} \quad (4.7)$$

Здесь все величины выражены в одной системе единиц, например, в $СИ$ или в СГС. Отношение $\varepsilon/t_0<t_{уст}/t_0=R_2=R_1^{-\sigma}$ Поэтому, $(\varepsilon/t_0)^{1/\sigma}<R_1^{-1}\approx 0.1\div 0.07$ и выражение в фигурных скобках можно положить равным единице.

Если на поверхности среды задается температура $T(0,t)=$ $=T_0(-t)^{-1/\sigma}$, то выражая Ω_M из (4.4) через T_m,ε или T_0,ε и подставляя это значение в (4.5)-(4.7) получим выражения для $\tau_{ф}$, E_0 и $E_{уд}$ через T_M,ε или T_0,ε.

Чтобы аналогичные формулы написать для случая нагрева в ΔS-режиме из автомодельного решения нужно знать лишь значения двух безразмерных функций: $R(n,\sigma)$ и $b(n,\sigma)=\omega(0)$ (см.п.I.4 и п.3.I), которые легко получить из расчетов. Зависимость же от размерных $\Omega_M,\varepsilon,\varkappa_0,\rho_0,c_0$ получается из (3.2) или (I.4).

§ 5. Оценки для ДТ- плазмы.

5.I. Постановка задачи и оценки.

Применим формулы п.4.2. для оценок одной конкретной ситуации. Пусть на плоский слой ДТ-плазмы из вакуума падает поток лазерного излучения

$$\Omega(0,t) = \begin{cases} \Omega_0(-t)^{-1.4}, & t_0 \le t \le \varepsilon < 0 \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} \qquad (5.I.)$$

Предположим, что излучение целиком поглощается на границе плазмы, тепло внутрь вещества переносится электронной теплопроводностью ($\varkappa_e = \varkappa_0 T^{5/2}$, см.п.2.3.). Газодинамическим движением, объемным излучением из плазмы и другими процессами ж) будем пренебрегать.

Установление S-режима при $\sigma = 5/2$ гарантируется, если выполнено $t_{уст}/t_0 \lesssim 10^{-3}$, причем $\Omega(0,t_{уст})/\Omega(0,t_0) \gtrsim 10^4$, а $t_{уст} \le \varepsilon < 0$ (см.(3.I0) и табл.I). Половина энергии импульса E_0 вкладывается за время обострения $t_{об} \le t \le \varepsilon$ (при $\varepsilon = t_{уст} \cong 10^{-3} t_0$ будет $t_{об} \cong t_0/200$).Подставляя в (4.4)-(4.7) значения констант для полностью ионизированной ДТ- плазмы с плотностью ρ г/см^3 (см.п.2.3) получим

ж) Это, например, учет ограничения теплового потока из-за наличия предельного (вакуумного) потока, аккуратный учет двухтемпературности, переноса лазерного излучения, процессов ионизации (при малых температурах) и т.д.

$$\Omega_м = 7\cdot 10^{13}\cdot T_м^{2.25}\cdot(-\varepsilon)^{-0.5}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-0.5}\cdot d^{-1}\ \frac{вatm}{см^2}$$

$$r_{фр} = 1.1\cdot 10^{-2}\, T_м^{1.25}\cdot(-\varepsilon)^{0.5}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5}\cdot d\ см$$

$$m_{фр} = 0.2\, a^2 r_{фр}^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-1}\ г \qquad (5.2)$$

$$E_0 = 10 a^2 T_м^{4.75}\cdot(-\varepsilon)^{1.5}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5}\cdot d\ дж.$$

$$E_{уд} = 2\cdot 10^5\cdot T_м^{2.25}(-\varepsilon)^{0.5}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-0.5}\cdot d^{-1}\ \frac{дж}{см^2}$$

Здесь $\rho_0 = 0.2\ г/см^3$ - плотность твердого ДТ, время измеряется в нсек, температура - в кэвах; множитель d равен $\sqrt{2}$, если греются только электроны и I, если греются и электроны, и ионы. Оценки для значений $\rho = 10^{-2}\rho_0$, $a = 1/(S \approx r_{фр}^2)$, $\varepsilon = 10^{-3} t_0$ даны в таблице 3.

Таблица 3.

N	Тм(кэв)	$\Omega_м$(Вт/см2)	$r_{фр}$ (см)	ε (нсек)	Ео(дж)
I	I	10^{14}	$8\cdot 10^{-3}$	$5.^{10\ -3}$	4.10^{-2}
2	3	10^{15}	$3.4\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-3}$	I0
3	8	10^{16}	$1.4\cdot 10^{-1}$	$5.2\cdot 10^{-3}$	$8\cdot 10^{2}$
4	0.I	$6\cdot 10^{10}$	$5\cdot 10^{-3}$	$5\cdot 10^{-1}$	$7.2\cdot 10^{-4}$
5	0.0I	$2\cdot 10^{6}$	$5\cdot 10^{-3}$	$1.5\cdot 10^{2}$	$7.2\cdot 10^{-5}$

В данной таблице оценки 4 и 5 демонстрируют соотношения подобия (3.9), Так, время локализации в оценке 5 ($1.5\cdot 10^2$ нсек) в 300 раз больше соответствующего времени оценки 4(0.5 нсек), характерная температура в оценке 5 (I0 эв) в I0 раз меньше соответствующей (I00 эв) в оценке 4, в согласии с (3.9). Тепловой поток и затраченная энергия в оценке 5 меньше, чем в оценке 4 в 3000 и в I0 раз соответственно. Глубина локализации в обоих случаях одинакова, т.к. обе оценки соответствуют разным диапазонам

температур и времен для одного и того же граничного режима.

Таблица 3 и (5.2) показывают, что полученные параметры лежат в диапазоне характерном для лазерной плазмы (в т.ч. и для задач ЛТС). Эти значения могут указать на порядок величин, точнее они должны быть получены из рассмотрения более полной задачи с учетом газодинамического движения, электронной релаксации и т.п. Отметим сразу, что влияние двухтемпературности учтено в оценках двумя предельными случаями: $T_i = T_e$ и $T_i = 0$. Вычисления по известным формулам [42,49,50] показывают, что для оценок I÷3 $\tau_{ei} > t_0$, а для 4÷5, $\tau_{ei} < \varepsilon$, т.е. в первом случае греются только элеткроны, во втором - отрыва температур нет. Время термализации электронов в оценках I÷3 сравнимо с временем локализации. Собственное излучение плазмы оказывается несущественным для оценок I÷4, подразумевается также, что используется лазер с достаточно большой длиной волны излучения, например, на CO_2, для света которого $\rho_{кр} = 4 \cdot 10^{-5}$ г/см^3

5.2. Влияние газодинамического движения на локализацию.

Оценка несущественности этого влияния получается из сравнения глубины проникновения волны разрежения (за время процесса t_0) с глубиной локализации τ_p:

$$\delta_p \equiv \tau_p / \tau_p \simeq 17 \cdot 10^{-3} (-\varepsilon)^{-0.5} T_M^{0.75} \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} \gtrsim 1 \quad (5.3)$$

Расчеты показали, что полученный из оценок критерий (5.3) является верным, и уже при $\delta_p > 1 \div 2$ газодинамическое движение не оказывает существенного влияния на процесс нагрева. Для оценок I÷5 справедливо обратное неравенство $\delta_p \leq 1$, т.е. требуется учет газодинамики.

Приведем данные численного исследования нагрева однотемпературной плазмы обостряющимся импульсом (5.I) для величин оценки

I таблицы 3. Начальное состояние газа:

$$\rho(t_0,m)=2\cdot10^{-3}\ г/см^3,\ T(t_0,m)=1\ эв,\ v(t_0,m)=0$$

v – скорость, m –массовая координата ($dm=\rho dz$).

Параметры импульса: $t_0=-5\cdot10^{-9}$ сек, $\varepsilon=-5\cdot10^{-12}$ сек, $\Omega_M=\Omega(0,\varepsilon)=10^{14}\ \frac{ватт}{см^2}$, так что $\Omega(0,t_0)=6.2\cdot10^{9}\ \frac{ватт}{см^2}$, а $E_0=0.04\ дж$. При $m=0$ заданы условие (5.I) и $\rho(0,t)=0$ (вакуум), в глубине вещества при $m=m_0=4\cdot10^{-5}$ г/см^2, $m_0>m_{\varphi}=1.6\cdot10^{-5}$ г/см^2, куда ни тепло, ни движение еще не дошли, задано $\Omega(m_0,t)=0$, $v(m_0,t)=0$. В результате расчетов оказалось, что до момента $t_1\simeq10\varepsilon=10^{-2}t_0$ тепловая волна продвигается вглубь вещества (рис.9^{а,б,в}). Нагретый газ разлетается в вакуум, перед фронтом тепловой волны движется заметный пик плотности, впереди которого – ударная волна. Распространение тепла происходит с дозвуковой скоростью в режиме ТВП [43-47]. После момента обострения $t_{об}\cong5\cdot\varepsilon$ происходит смена режима ТВП на режим ТВI [46]. Тепло начинает распространяться с дозвуковой скоростью, фронт тепловой волны обгоняет ударную. С этого момента газодинамические величины практически не меняются. Это иллюстрирует расчет с продолженным действием импульса до значений $\Omega(0,\ 0.181\varepsilon)\cong2.7\cdot10^{16}\ \frac{ватт}{см^2}$ $E_0\simeq0.2\ дж$. (см.рис.I0^{а,б,в}). Таким образом, после установления S-режима, определяющую роль играют тепловые процессы, а газодинамические " заморожены". Сопоставив данные расчеты на момент $t=\varepsilon$ с оценкой I, получим:

I) Точная глубина прогрева m_{φ} близка к оцененной. Эффективная глубина прогрева значительно меньше, профиль температуры более вогнутый (см.рис.9^{а}, где пунктиром показано соответствующее решение для неподвижной среды).

2) Уменьшение прогретой массы привело к большему значению температуры вблизи границы (3.5 кэв. вместо I кэв в неподвижной среде). Примерно I/4 часть прогретой массы имеет температуру свыше I кэв.

3) Плотность вещества у границы значительно ниже фоновой (образование "короны").

4) "Выход" на S-режим (установилась полуширина) произошел в момент $t_1 = 10^{-2} t_0$, т.е. на порядок раньше, чем в неподвижной среде ($t_{уст} = 10^{-3} t_0$). С этого же момента, т.е. раньше, чем выполняются условия установления S-режима в неподвижной среде (п.3.5), становится несущественной газодинамика.

5) После окончания импульса происходит разлет газа и его остывание. Из вещества к вакууму идет ударная волна, образовавшаяся в результате "накрывания" пика плотности тепловой волной (см.рис.I2), начавшейся двигаться после перестройки профиля температуры на "выпуклый".

Тем самым газодинамическое движение не является принципиальным препятствием для проявления локализации тепла в силу своей инерционности по сравнению с тепловыми процессами, когда последние развиваются в режиме с обострением. В данном примере газодинамика улучшает локализацию - температура и время локализации увеличиваются, а профиль температуры становится более вогнутым (эффективно прогревается меньшая масса, чем в неподвижной среде).

5.3. Сравнение с режимом без обострения. Признаки локализации.

Сравним полученные результаты с данными расчета, отличающегося лишь граничным законом теплового потока

$$\Omega(0,t) = \begin{cases} \Omega_1 \cdot (t - t_0), & t_0 \le t \le \varepsilon < 0 \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} \qquad (5.5)$$

$\Omega_1 = Const$ выбирается так, что вложенная энергия E_0 одинакова в обоих случаях. Половина энергии вкладывается за то же время $\simeq -4.5 \cdot \varepsilon$, что и в режиме с обострением. $\Omega_M = \Omega_1 \cdot (-\varepsilon) = 3 \cdot 10^{13} \frac{вт}{см^2}$ (см.рис.II[а]).

Оценки показывают, что в случае неподвижной среды граничные режимы (5.I) и (5.5) дают примерно одинаковые температуры и глубины прогрева.

Расчет задачи с учетом газодинамики для режима (5.5) показывает, что распространение тепла происходит в режиме ТВI (рис.II[а], б,в). Волна разрежения практически не влияет на процесс, охватывая малую часть вещества. К моменту $t = \varepsilon$ вещество прогрето до глубины $m_{\varphi} \simeq 1.7 \cdot 10^{-5}$ г/см^2, граничная температура $\simeq 1$ кэв, т.е. параметры близки к оцененным для неподвижной среды.

Из сравнения расчетов с условиями (5.I) и (5.5) следует, что газодинамика приводит к появлению признаков, по которым можно судить о наличии локализации. Таким признаком может служить в том числе сильная ударная волна, идущая в сторону вакуума, которой не возникает в случае режима (5.5).

ЛИТЕРАТУРА

I. Л.С.Лейбензон. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.-Л., ГИТТЛ, I947.

2. П.Я.Полубаринова-Кочина. ДАН, т.63, № 6, 623 (I948).

3. Я.Б.Зельдович, А.С.Компанеец. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвященный 70-летию акад. А.Ф.Иоффе, М., Изд.АН СССР, I950, стр.6I.

4. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.I6, в.I, 67 (I952).

5. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.I7, в.6,739 (I953).

6. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.I6, в.7,679 (I952).

7. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.I8, в.4,409 (I954).

8. Г.И.Баренблатт. М.И.Вишик. ПММ, т.20, в.3, 4II (I956).

9. О.А.Олейник, А.С.Калашников, Чжоу Юй-Линь. Изв.АН СССР, сер.матем., т.22, 667 (I958).

I0. Е.С.Сабинина. ДАН, т.I36, № 5, I034 (I96I).

II. А.С.Калашников. Вестник МГУ, сер. матем., механ., № 6, 45 (I972).

I2. А.А.Самарский, И.М.Соболь. ЖВММФ, т.3., № 4, 702 (I963).

I3. С.П.Курдюмов. О физике плазмы с перегревной неустойчивостью. Материалы Объединенного семинара по вычислительной физике (Сухуми, I973). Тбилиси, Изд-во ТГУ, I976, стр.I65.

I4. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, А.А.Самарский. Особенности нелинейного скина. Доклад на II Международной конференции по теории плазмы. Сб. аннотаций, Киев, I974, стр.,I48.

I5. С.П.Курдюмов. Нелинейные процессы в плотной плазме. Сб.докладов II Международной конференции по теории плазмы "Проблемы теории плазмы", Киев, "Наукова думка", I976,стр.278.

16. С.П.Курдюмов. Нелинейные процессы в плотной плазме. Препринт ИПМ, № 18, М., 1975.

17. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.А.Самарский, А.П.Михайлов. Нелинейные процессы в плотной плазме. Доклад на УШ Международной конференции по лазерному термоядерному синтезу (Рыня ,Польша, 1975). Сб.аннотаций, стр.20-21.

18. А.А.Самарский, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. ДАН, т.223, № 6, 1344 (1975).

19. С.П.Курдюмов. Локализация тепла в нелинейных средах. Препринт ИПМ, № 39, М., 1976.

20. А.А.Самарский, С.П.Курдюмов, Н.В.Змитренко, А.П.Михайлов. Нелинейные процессы в плотной плазме и особенности термодинамики режимов с обострением. Доклад на Международном совещании экспертов МАГАТЭ, СССР, Дубна, 1976. Препринт ИПМ, № 109, М.,1976.
(An english translation is available).

21. А.А.Самарский. Локализация тепла и тепловые структуры в плазме. Доклад на IX Европейской конфепенции по взаимодействию лазерного излучения с вещеотвом, Палесо, Франция, 1976.

22. С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, К.Э.Плохотников. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой "кристалл". Препринт ИПМ, № 22, М., 1977.

23. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. N- и S- режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обоотрением (обзор). ПМТФ, № 1, 3 (1977).

24. В.А.Галактионов, А.П.Михайлов. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности. Препринт ИПМ, № 53, М., 1977.

25. А.П.Михайлов. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью. Препринт,ИПМ, № 64, М., 1977.

26. J. Nuckolls, L. Wood, A. Thiessen, G. Zimmerman, Nature, v. 239, no. 5368, 139(1972).

27. "Проблемы лазерного термоядерного синтеза". Сб.статей под редакцией А.А.Филюкова, М., Атомиздат, 1976.

28. П.П.Волосевич, Л.М.Дегтярев, Е.И.Леванов, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, А.А.Самарский, А.П.Фаворский. Физика плазмы, т.2, № 6, 883 (1976).

29. G. Guderley. Luftfahtforschung, Bd. 19, N9, 302(1942)

30. К.П.Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды, М., "Наука", 1971.

31. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. Препринт ИПМ, № 16, М., 1973; ДАН, т.218, № 6, 1306 (1974).

32. R.E. Kidder. Nuclear Fusion, v. 14, no. 1, 53(1974).

33. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. ДАН, т.219, № 3, 578 (1974).

34. А.А.Самарский, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. ДАН, т.227, № 2, 321 (1976).

35. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, А.А.Самарский. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения. Препринт ИПМ , № 74, М., 1976.

36. Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов, А.А.Самарский. Письма в ЖЭТФ (в печати, 1977).

37. А.А.Самарский , Г.Г.Еленин, Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. ДАН (в печати, 1977).

38. Л.К.Мартинсон, К.Б.Павлов, ЖВММФ, т.I2, № 4, I048 (I972).

39. А.С.Калашников. ЖВММФ, т.I4, № 4, 89I (I974).

40. А.С.Калашников. ЖВММФ, т.I6, № 3, 689 (I976).

4I. Л.И.Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., "Наука", I965.

42. Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., "Наука", I966.

43. R. Marshak. Physics of Fluids; N1, 24 (1958).

44. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Л.Н.Бусурина, В.П.Крус. ЖВММФ, т.3, № I, I59 (I963).

45. А.А.Самарский, С.П.Курдюмов, П.П.Волосевич. ЖВММФ, т.5, № 2, I99 (I965).

46. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Е.И.Леванов. ПМТФ, № 5, 4I (I972).

47. С.П.Курдюмов. Изучение взаимодействия гидродинамических и нелинейных тепловых процессов с помощью бегущих волн. Препринты ИПМ, № 55, № 56,М., I97I; Депонир. в ВИНИТИ : № 339-74 Деп., № 338-74 Деп., № 45,М., I97I, 337-74 Деп.

48. Г.И.Баренблатт. ПММ, т.I6, в.6, 76I (I952).

49. В.В.Ермаков, Н.Н.Калиткин. Электронный перенос в сверхплотной невырожденной плазме. Препринт ИПМ, № 26, М., I977.

50. Л.Спитцер. Физика полностью ионизированного газа. М., ИЛ, I957.

5I. Н.Г. Басов, О.Н.Крохин. ЖЭТФ, т.46, I7I (I964).

52. Ж.Бобэн, Д.Коломба, Г.Тонон. Синтез при лазерном возбуждении термоядерного горения в твердых мишенях. В сб.переводов "Проблемы лазерного термоядерного синтеза", М., Атомиздат, I976.

53. Я.М.Каждан. ПМТФ, № I (I977), 23.

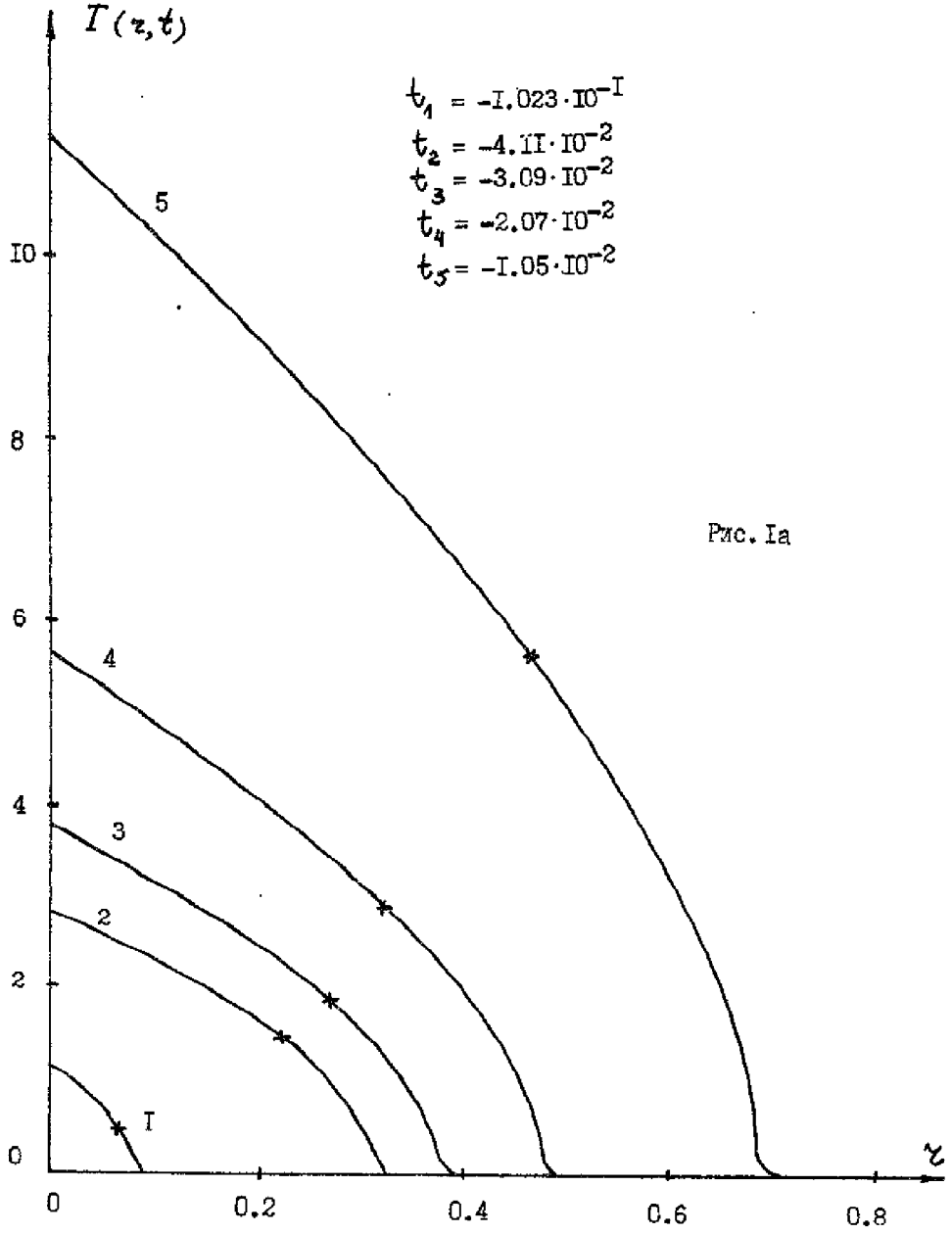

T(r,t)
t1 = -1.023·10^-1
t2 = -4.11·10^-2
t3 = -3.09·10^-2
t4 = -2.07·10^-2
t5 = -1.05·10^-2
5
4
3
2
1
10
8
6
4
2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
r

Рис. Iа

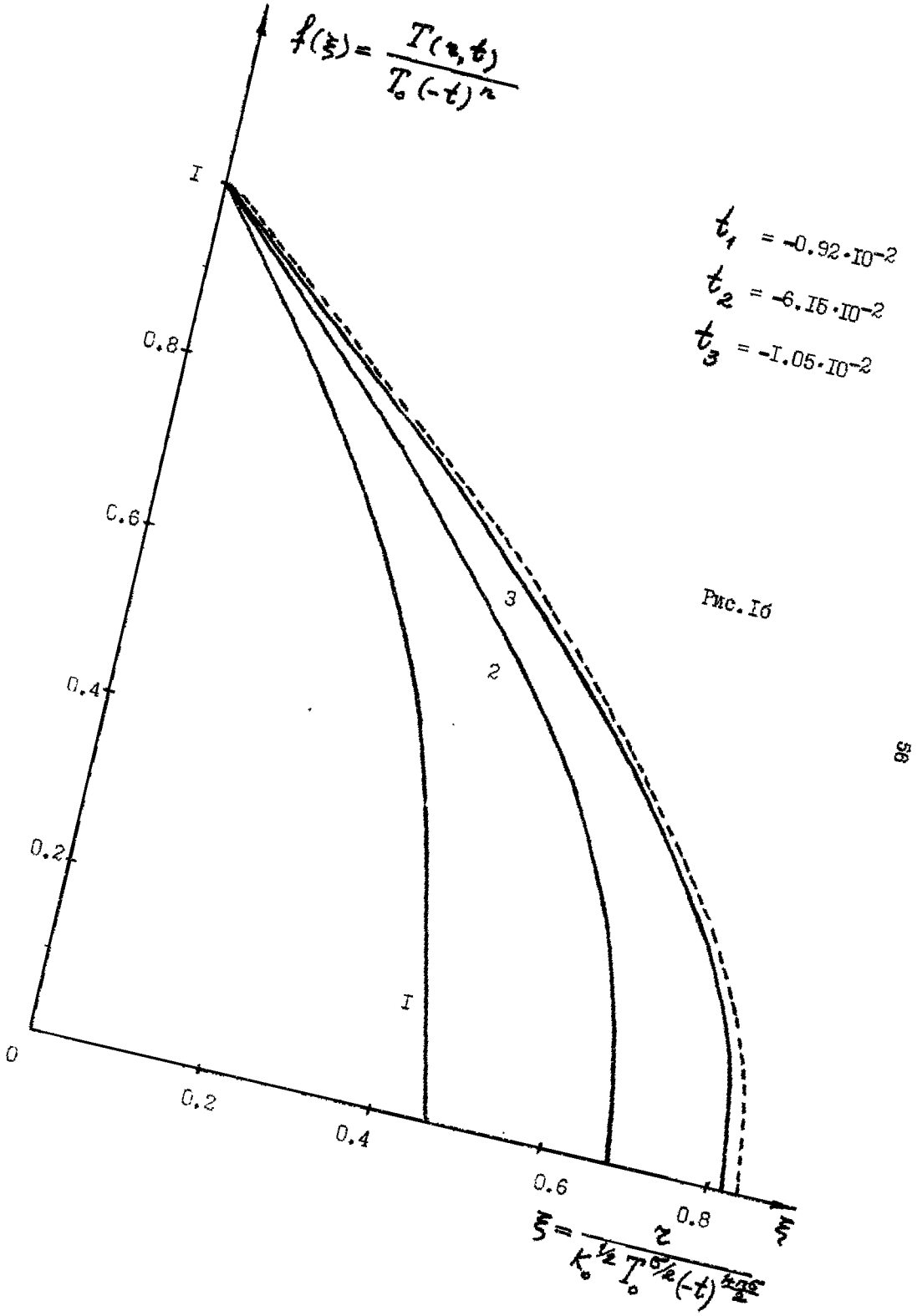

$f(\xi) = \frac{T(r,t)}{T_0(-t)^n}$
$t_1 = -0.92 \cdot 10^{-2}$
$t_2 = -6.15 \cdot 10^{-2}$
$t_3 = -1.05 \cdot 10^{-2}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
3
$\xi = \frac{r}{K_0^{1/2} T_0^{\sigma/2} (-t)^{\frac{4n\sigma}{2}}}$
ξ

Рис. 16

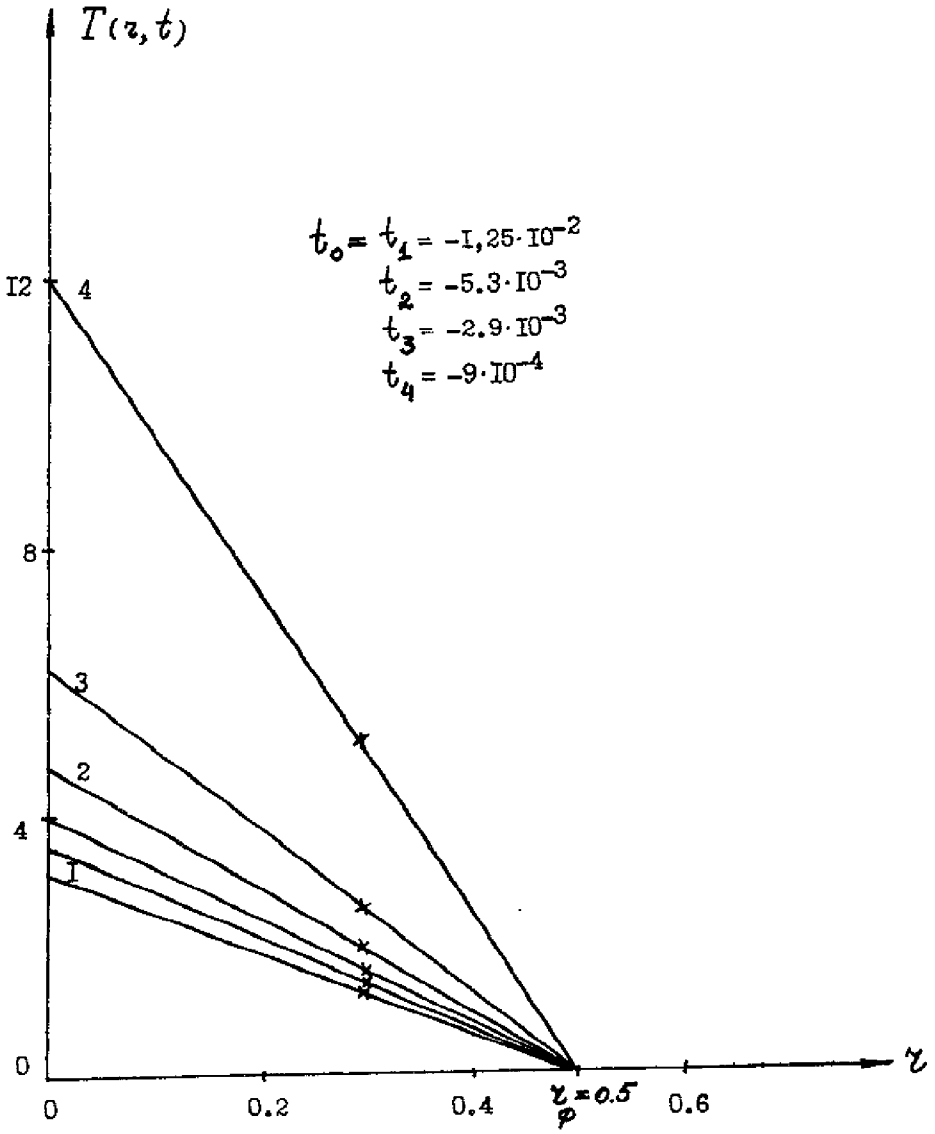

T(r, t)
t₀ = t₁ = -1,25·10⁻²
t₂ = -5.3·10⁻³
t₃ = -2.9·10⁻³
t₄ = -9·10⁻⁴
12
8
4
0
4
3
2
1
0
0.2
0.4
r_p = 0.5
0.6
r

Рис.2а

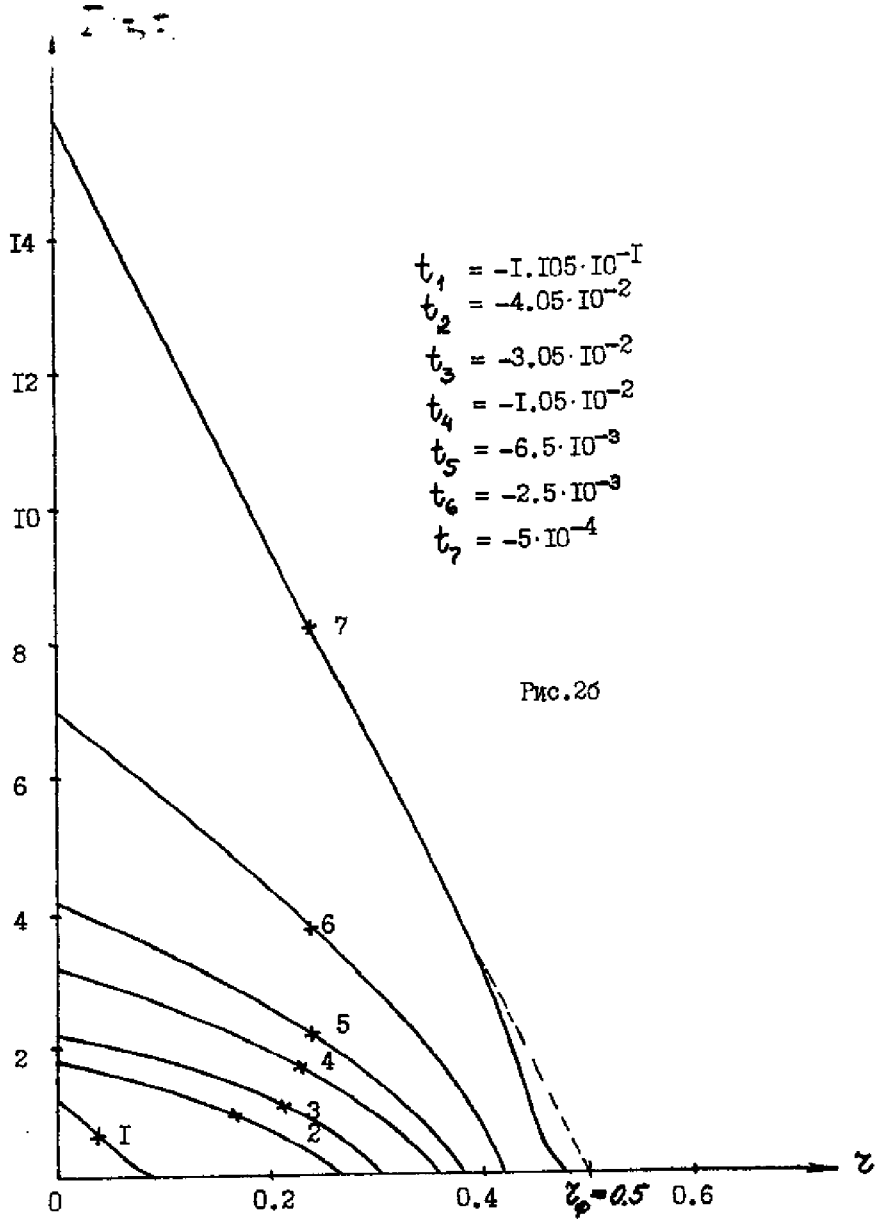

$t_1 = -1.105 \cdot 10^{-1}$
$t_2 = -4.05 \cdot 10^{-2}$
$t_3 = -3.05 \cdot 10^{-2}$
$t_4 = -1.05 \cdot 10^{-2}$
$t_5 = -6.5 \cdot 10^{-3}$
$t_6 = -2.5 \cdot 10^{-3}$
$t_7 = -5 \cdot 10^{-4}$
14
12
10
8
6
4
2
0
0.2
0.4
$\tau_p = 0.5$
0.6
τ
1
2
3
4
5
6
7

Рис.26

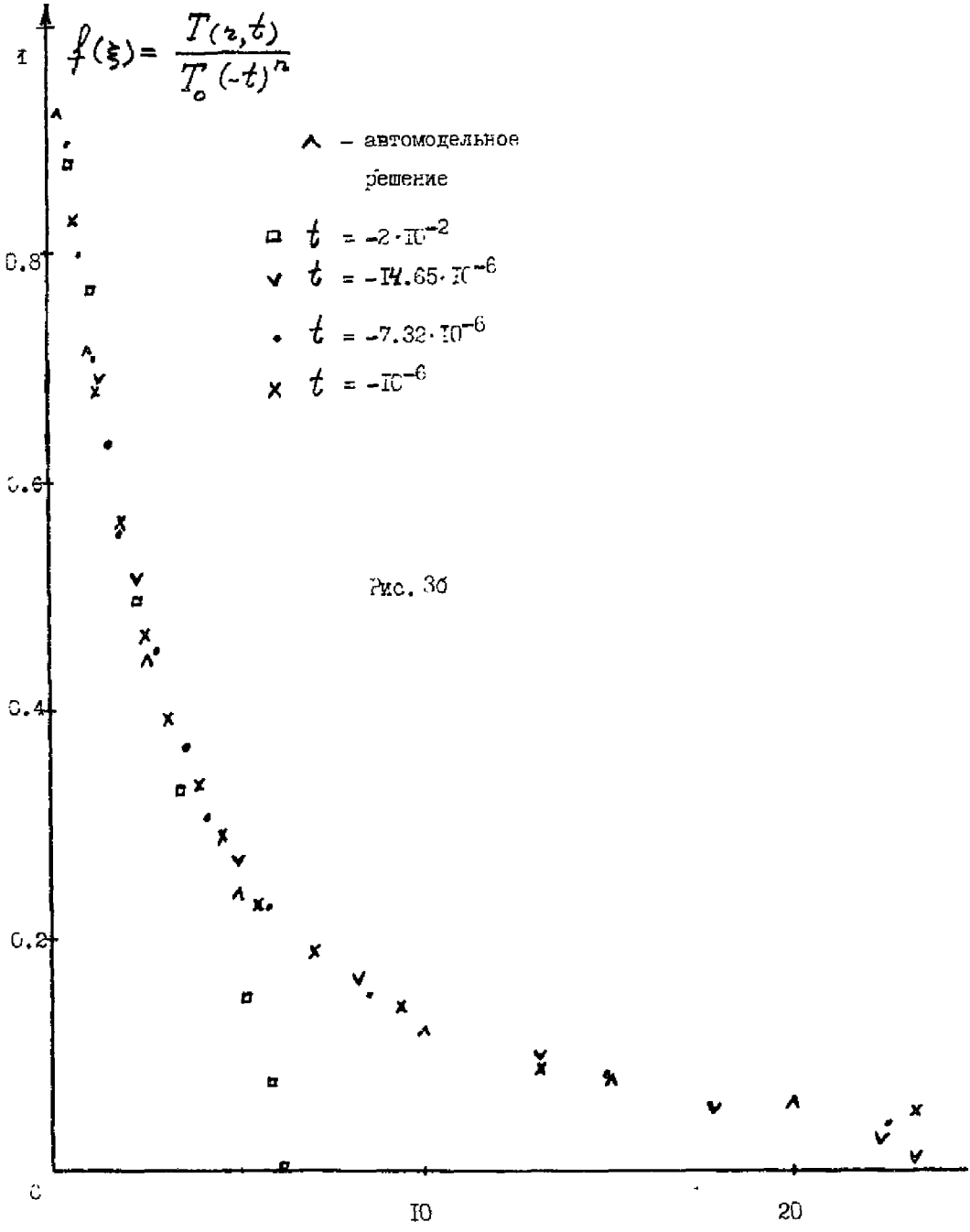
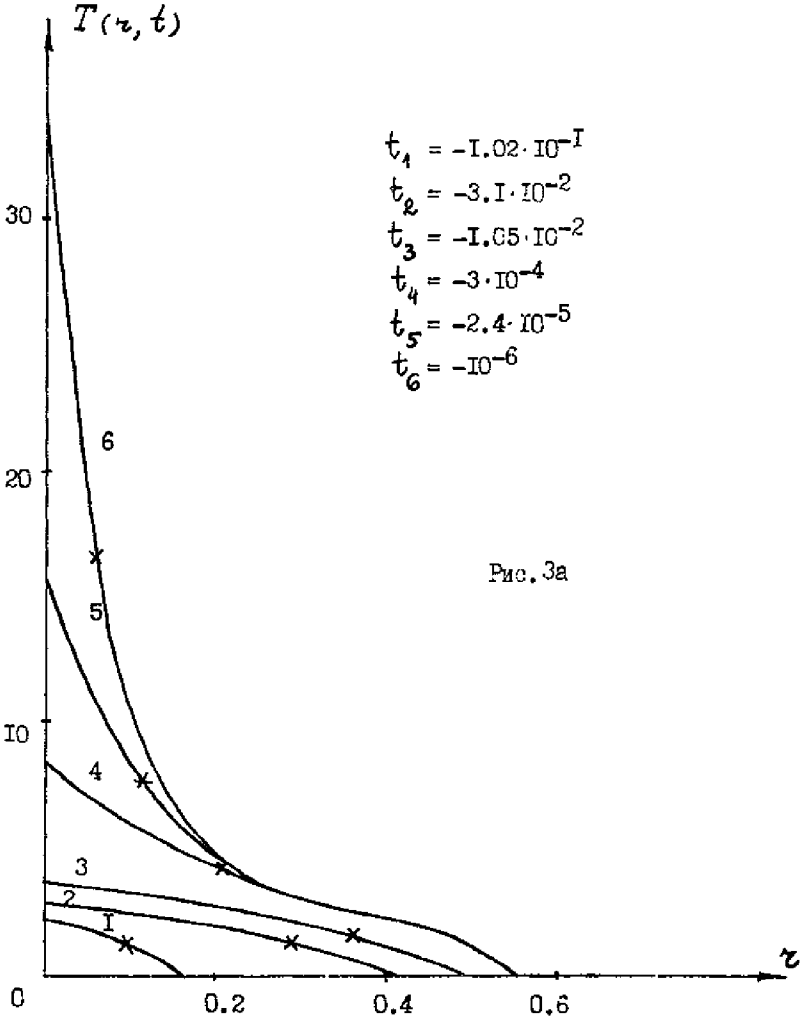
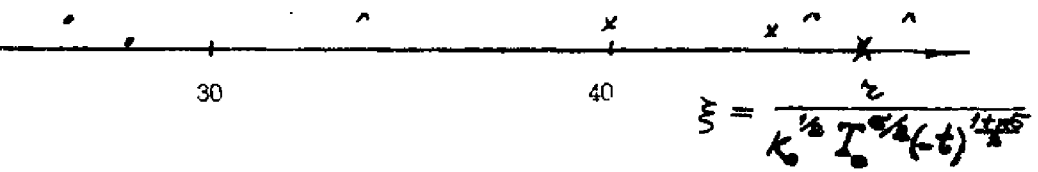

$f(\xi) = \frac{T(r,t)}{T_0(-t)^n}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
– автомодельное решение
$t = -2\cdot10^{-2}$
$t = -14.65\cdot10^{-6}$
$t = -7.32\cdot10^{-6}$
$t = -10^{-6}$

Рис. 3б



T(r, t)
30
20
10
0
0.2
0.4
0.6
r
6
5
4
3
2
1
$t_1 = -1.02 \cdot 10^{-1}$
$t_2 = -3.1 \cdot 10^{-2}$
$t_3 = -1.05 \cdot 10^{-2}$
$t_4 = -3 \cdot 10^{-4}$
$t_5 = -2.4 \cdot 10^{-5}$
$t_6 = -10^{-6}$

Рис. 3а



30
40
$\xi = \frac{r}{K_0^{1/2} T_0^{\sigma/2} (-t)^{1+\frac{\sigma}{2}}}$

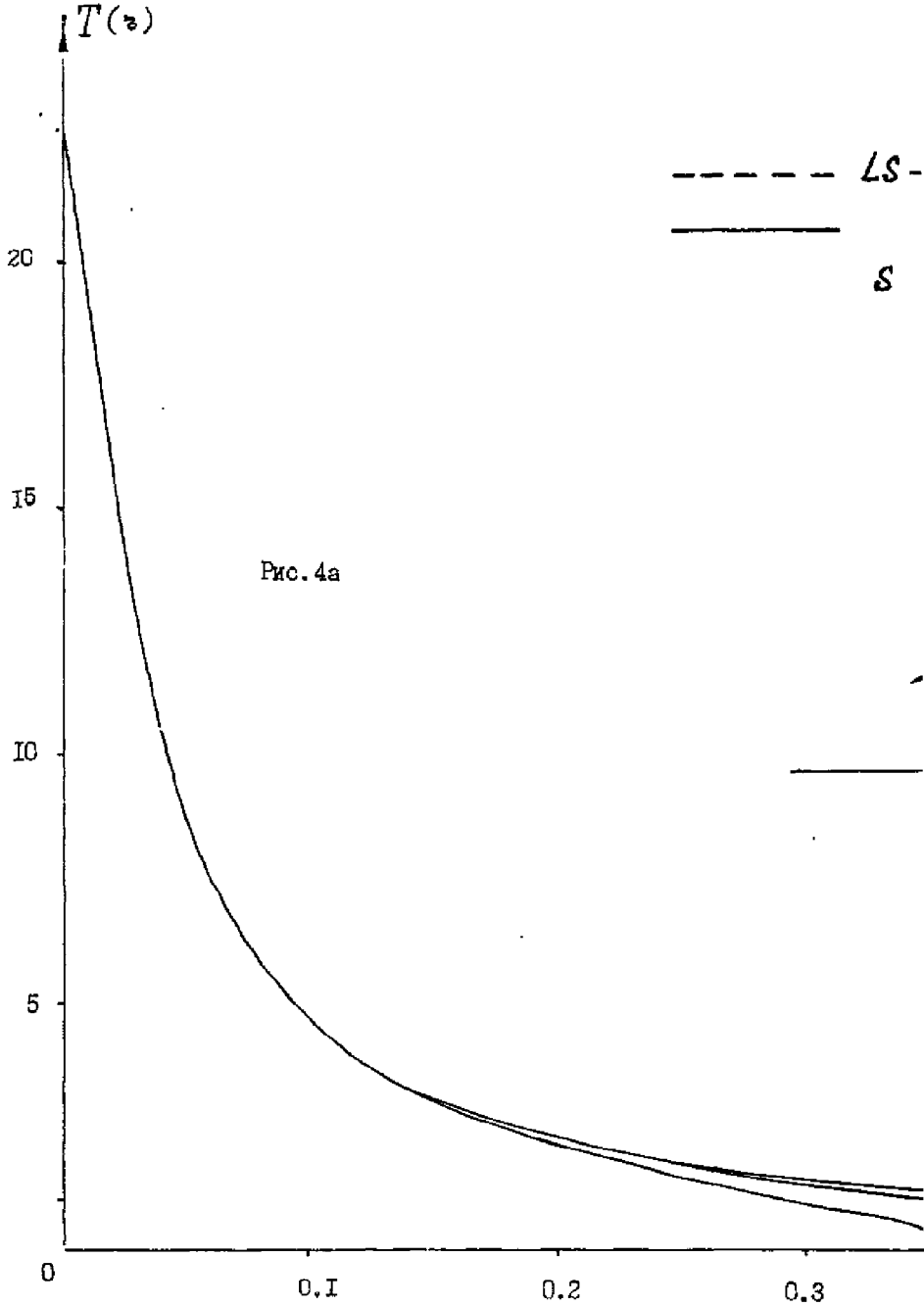


Рис.4а

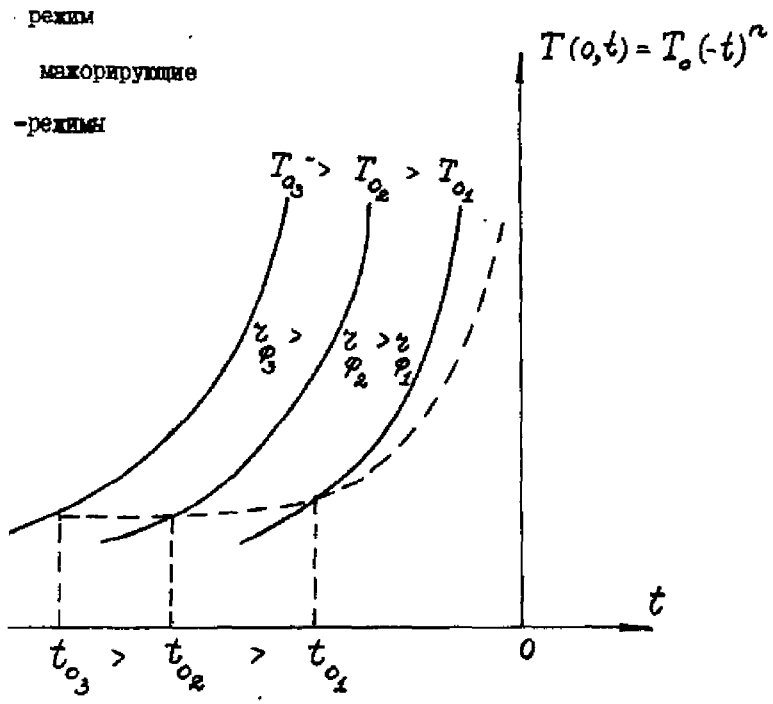
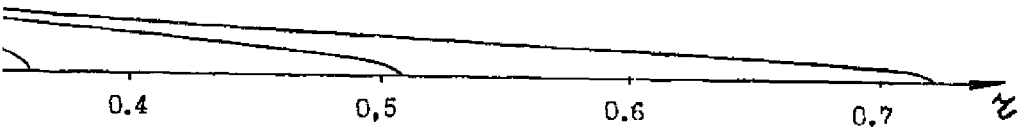

режим
мажорирующие
-режимы
$T(o,t) = T_o(-t)^n$
$T_{o_3} > T_{o_2} > T_{o_1}$
$\eta_{\varphi_3} > \eta_{\varphi_2} > \eta_{\varphi_1}$
t
$t_{o_3} > t_{o_2} > t_{o_1}$
0

Рис. 46


0.4
0,5
0.6
0.7
η

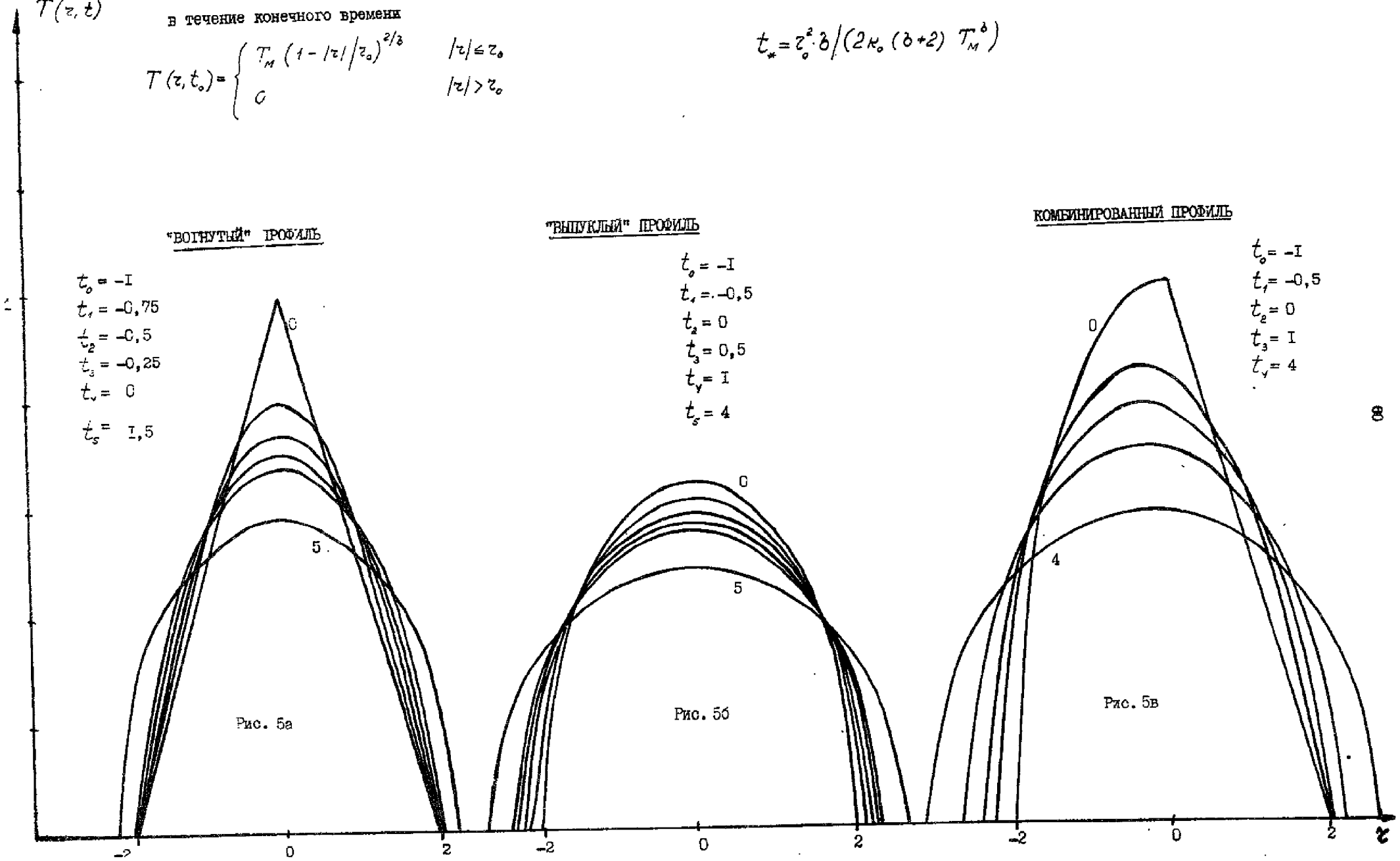
ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛА В ЗАДАЧЕ КОШИ

Профиль температуры, локализованный в течение конечного времени

$$T(r,t_0)=\begin{cases} T_M\left(1-|r|/r_0\right)^{2/\delta} & |r|\le r_0 \\ 0 & |r|>r_0 \end{cases}$$

Время локализации

$$t_*=r_0^2\cdot\delta/\left(2k_0(\delta+2)\,T_M^{\delta}\right)$$



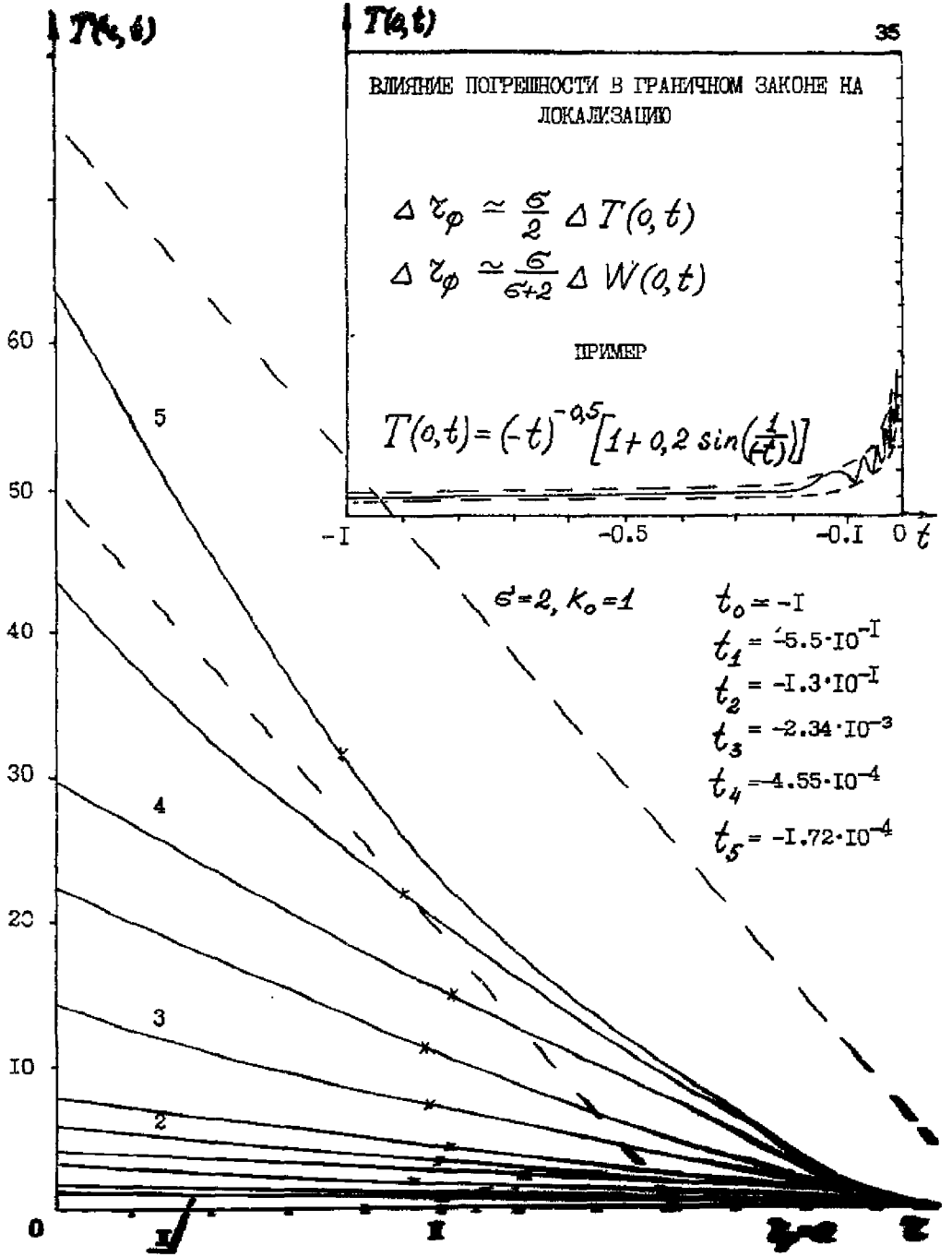

T(0,t)
ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ В ГРАНИЧНОМ ЗАКОНЕ НА ЛОКАЛИЗАЦИЮ
$\Delta \tau_\varphi \simeq \frac{\sigma}{2} \Delta T(0,t)$
$\Delta \tau_\varphi \simeq \frac{\sigma}{\sigma+2} \Delta W(0,t)$
ПРИМЕР
$T(0,t) = (-t)^{-0,5}\left[1 + 0,2 \sin\left(\frac{1}{(-t)}\right)\right]$
-I
-0.5
-0.I
0
t
60
50
40
30
20
10
0
5
4
3
2
$\sigma = 2,\ K_0 = 1$
$t_0 = -I$
$t_1 = -5.5 \cdot I0^{-I}$
$t_2 = -I.3 \cdot I0^{-I}$
$t_3 = -2.34 \cdot I0^{-3}$
$t_4 = -4.55 \cdot I0^{-4}$
$t_5 = -I.72 \cdot I0^{-4}$

Рис.6

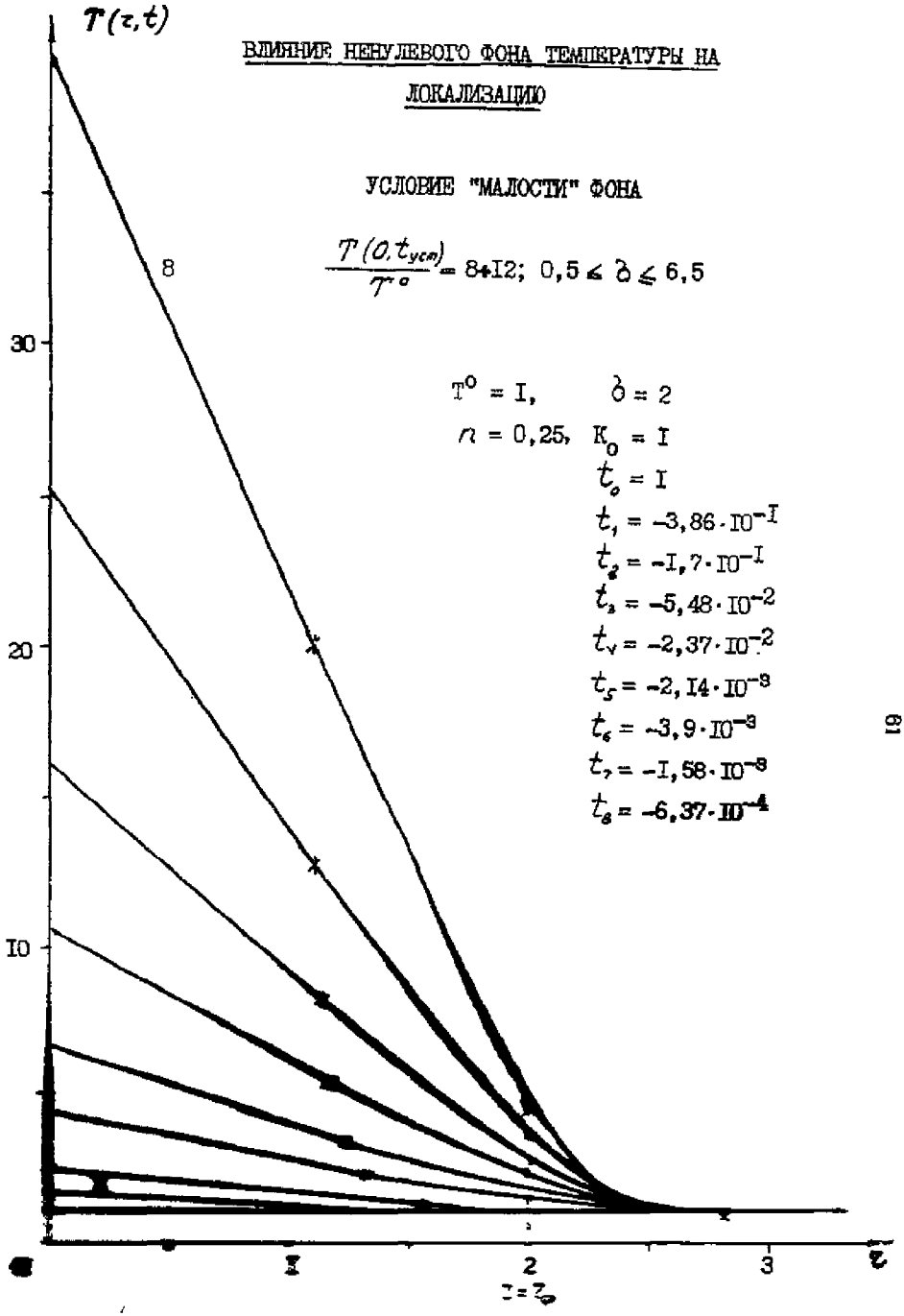

T(τ,t)
ВЛИЯНИЕ НЕНУЛЕВОГО ФОНА ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЛОКАЛИЗАЦИЮ
УСЛОВИЕ "МАЛОСТИ" ФОНА
$\frac{T(0,t_{уст})}{T^0} = 8 \div 12;\ 0,5 \leq \delta \leq 6,5$
8
$T^0 = 1,\quad \delta = 2$
$n = 0,25,\ K_0 = 1$
$t_0 = 1$
$t_1 = -3,86 \cdot 10^{-1}$
$t_2 = -1,7 \cdot 10^{-1}$
$t_3 = -5,48 \cdot 10^{-2}$
$t_4 = -2,37 \cdot 10^{-2}$
$t_5 = -2,14 \cdot 10^{-3}$
$t_6 = -3,9 \cdot 10^{-3}$
$t_7 = -1,58 \cdot 10^{-3}$
$t_8 = -6,37 \cdot 10^{-4}$
30
20
10
0
1
2
3
τ
τ = τ₀

Рис. 7

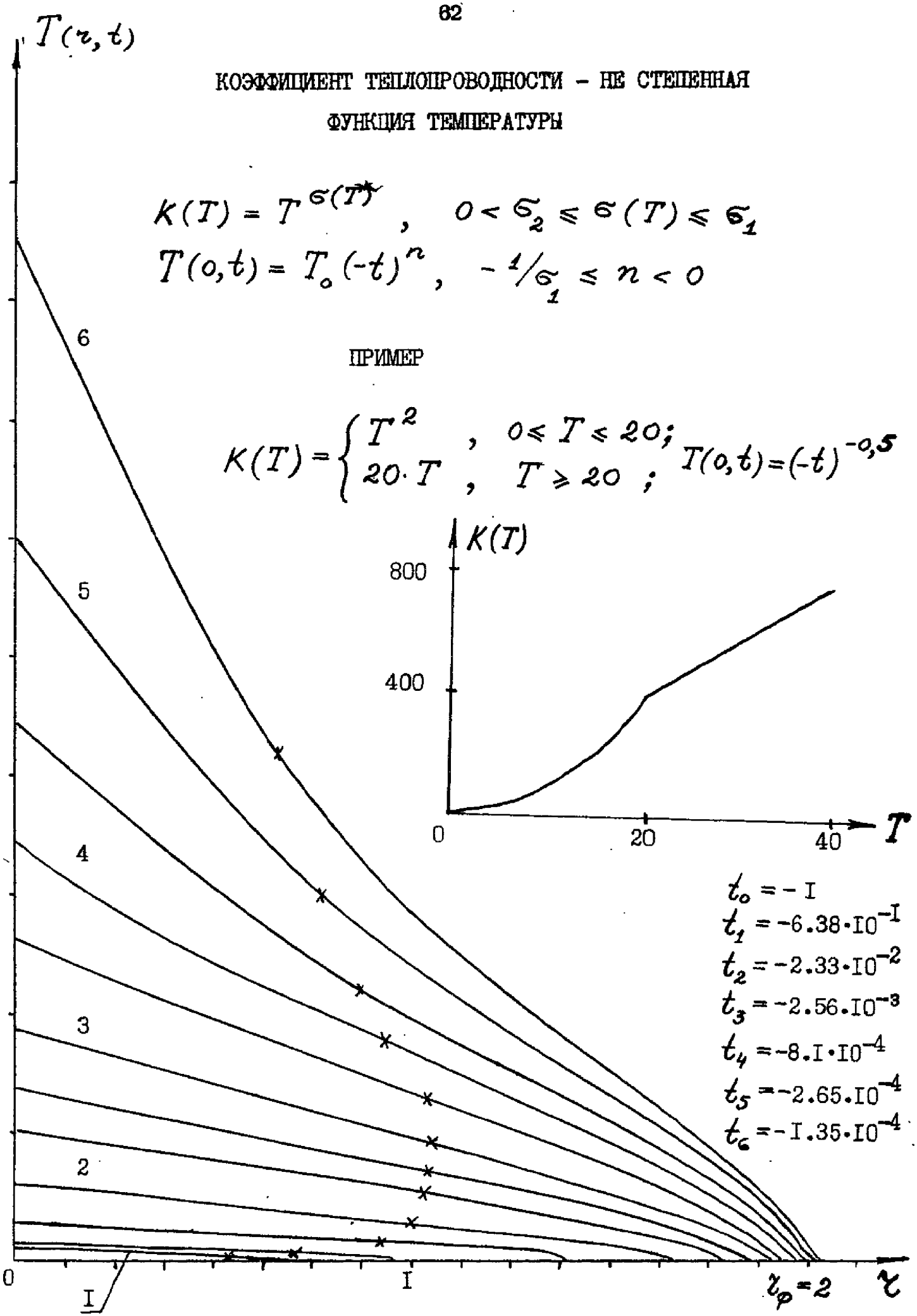
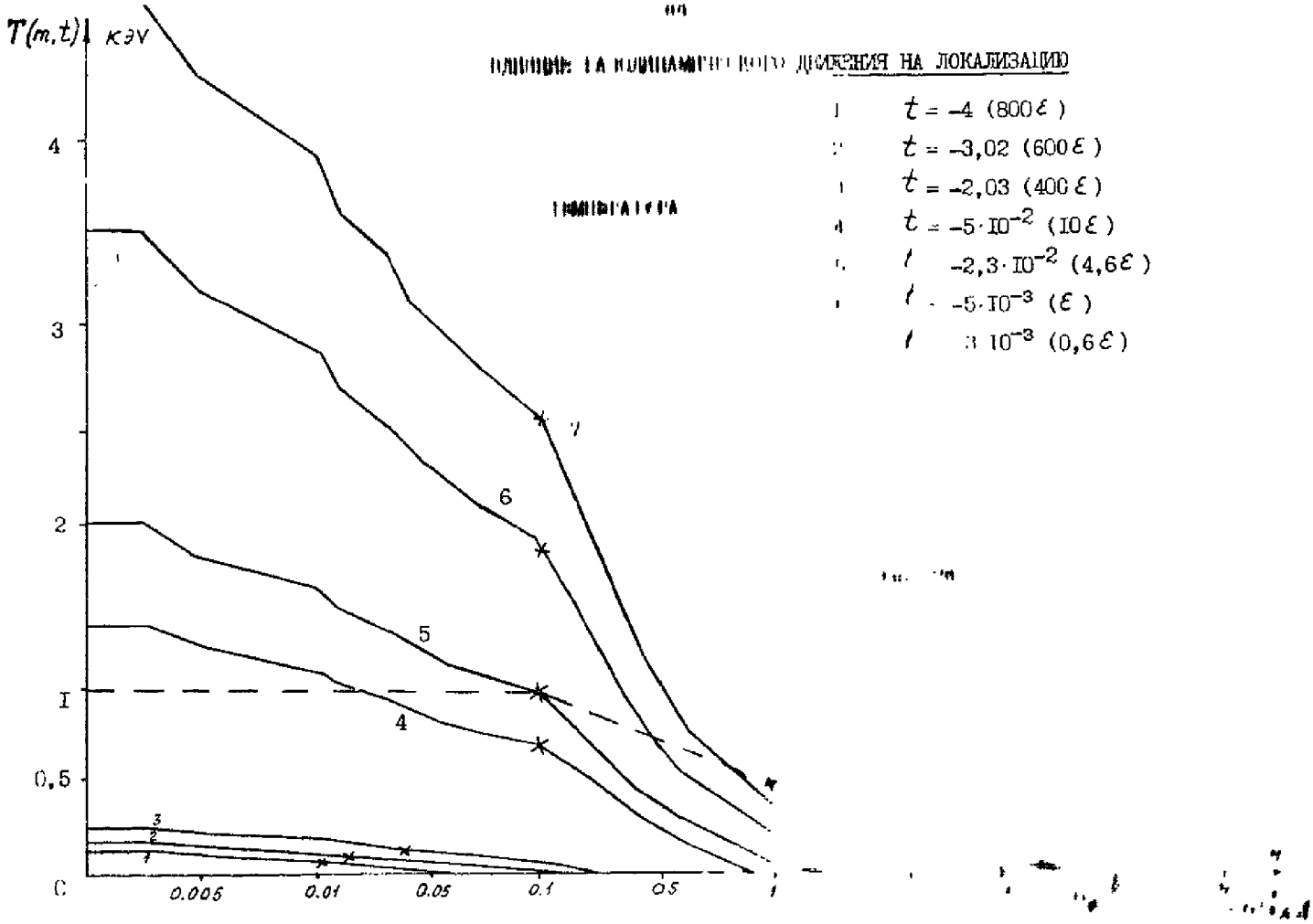

T(r, t)
КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ – НЕ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
$K(T) = T^{\sigma(T)}, \quad 0 < \sigma_2 \leq \sigma(T) \leq \sigma_1$
$T(0,t) = T_0(-t)^n, \quad -1/\sigma_1 \leq n < 0$
ПРИМЕР
$K(T) = \begin{cases} T^2, & 0 \leq T \leq 20; \\ 20 \cdot T, & T \geq 20; \end{cases} \quad T(0,t) = (-t)^{-0,5}$
K(T)
800
400
0
20
40
T
6
5
4
3
2
I
0
I
$r_\varphi = 2$
r
$t_0 = -1$
$t_1 = -6.38 \cdot 10^{-1}$
$t_2 = -2.33 \cdot 10^{-2}$
$t_3 = -2.56 \cdot 10^{-3}$
$t_4 = -8.1 \cdot 10^{-4}$
$t_5 = -2.65 \cdot 10^{-4}$
$t_6 = -1.35 \cdot 10^{-4}$

Рис. 8


T(m,t) кэV
ПЛОТНОСТЬ НА ЛОКАЛИЗАЦИЮ
t = -4 (800ε)
t = -3,02 (600ε)
t = -2,03 (400ε)
t = -5·10^-2 (10ε)
t = -2,3·10^-2 (4,6ε)
t = -5·10^-3 (ε)
t = 3·10^-3 (0,6ε)
4
3
2
1
0,5
0
0.005
0.01
0.05
0.1
0.5
1
6
5
4
3
2
1

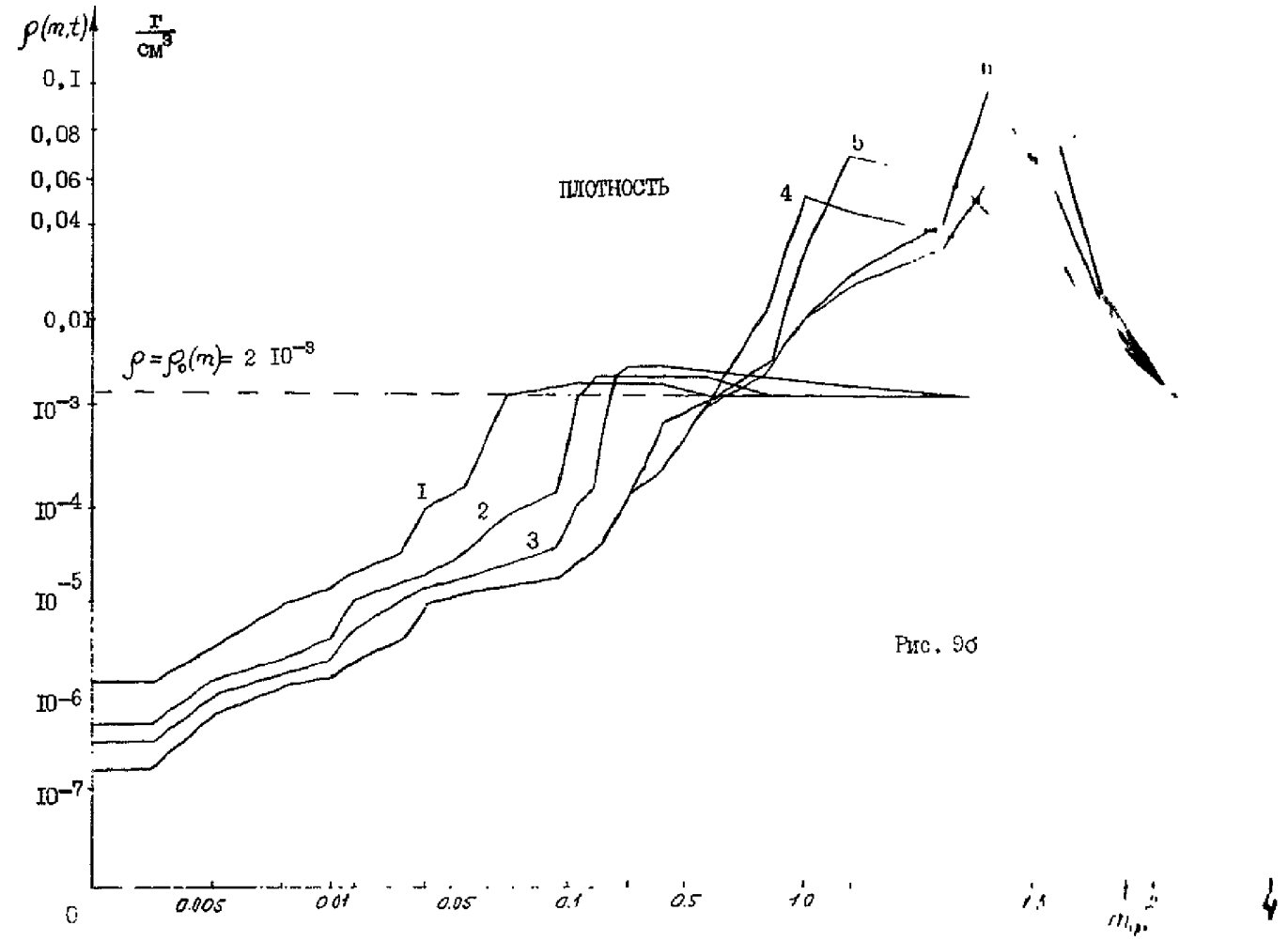

ρ(m,t) г/см³
0,1
0,08
0,06
0,04
0,01
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^-7
0
ПЛОТНОСТЬ
ρ = ρ₀(m) = 2 10^-3
1
2
3
4
5
0.005
0.01
0.05
0.1
0.5
1.0
1.5
m

Рис. 9б

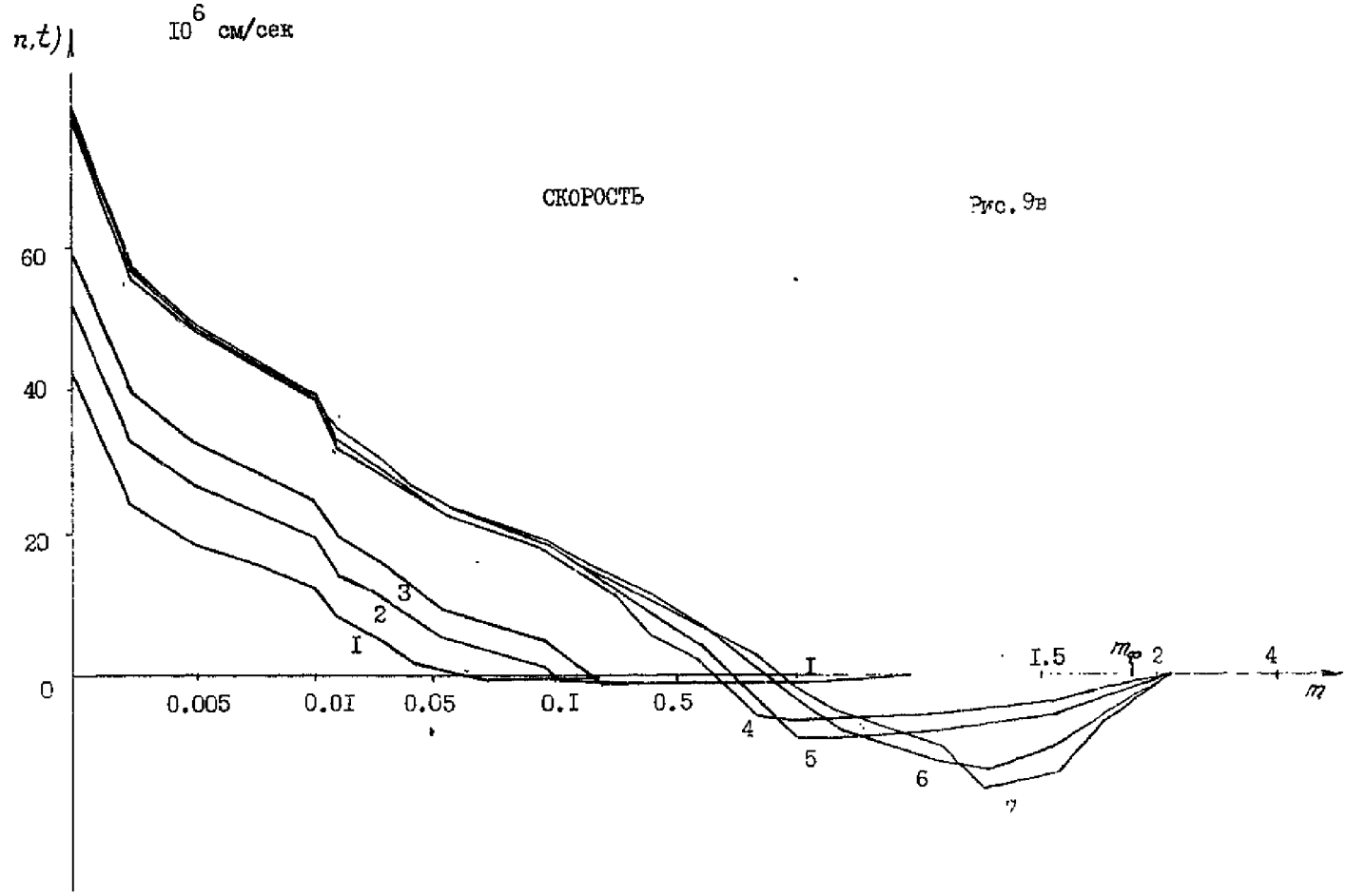


Рис. 9в

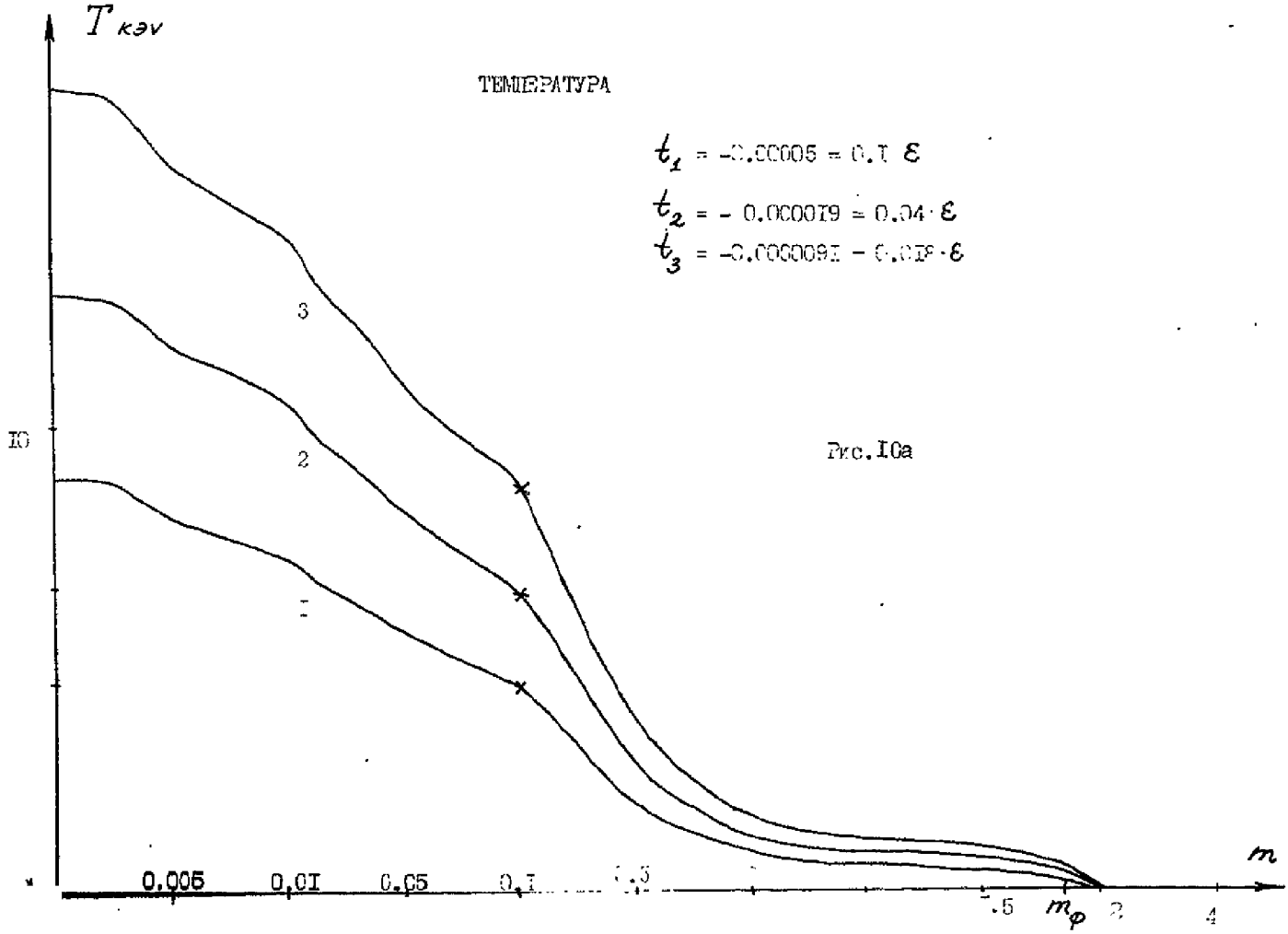


Рис.10а

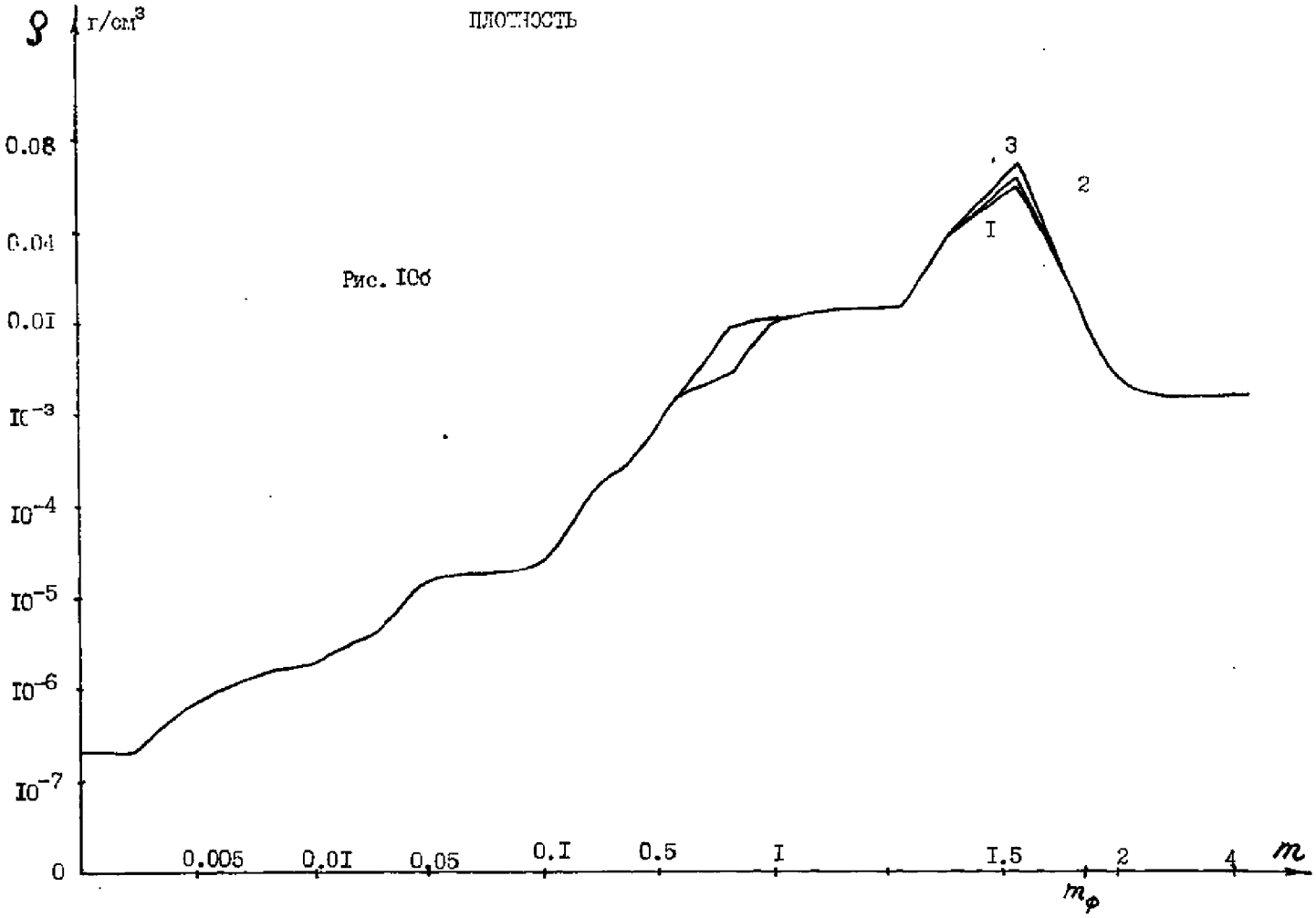


Рис. 10б

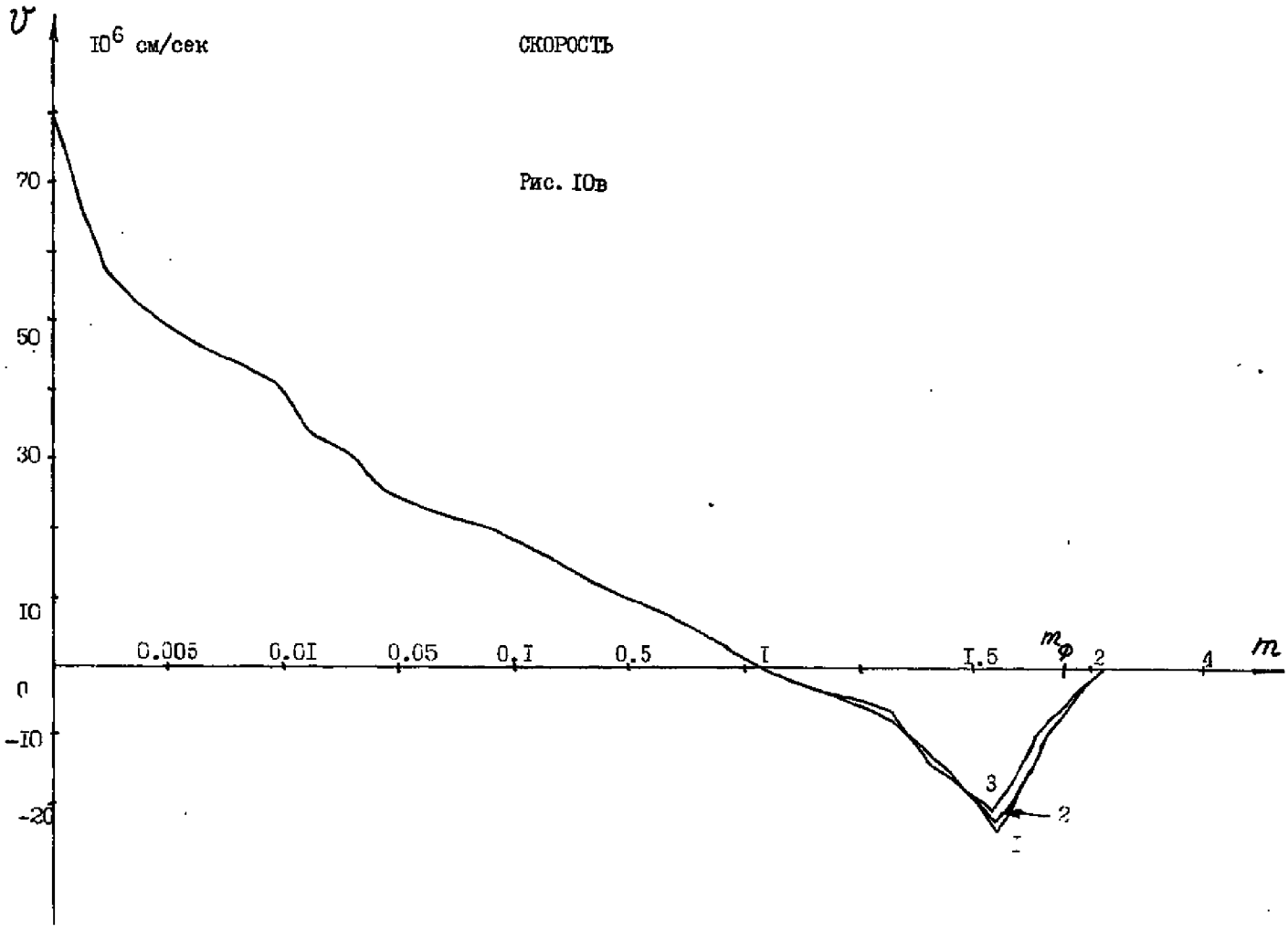


Рис. 10в

НАГРЕВ В РЕЖИМЕ БЕЗ "ОБОСТРЕНИЯ": $W = W_0 \cdot (t - t_0)$.

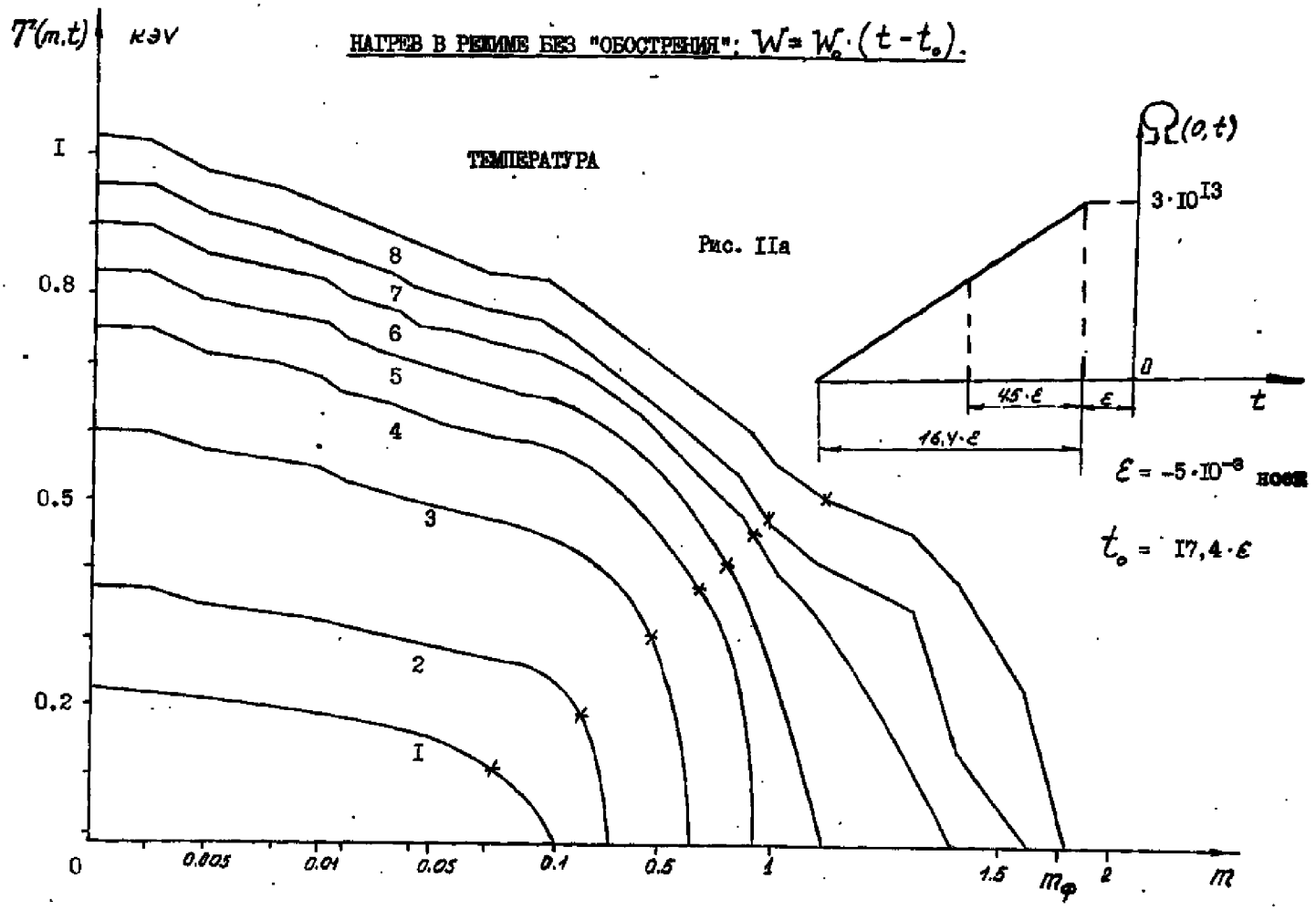


Рис. IIа

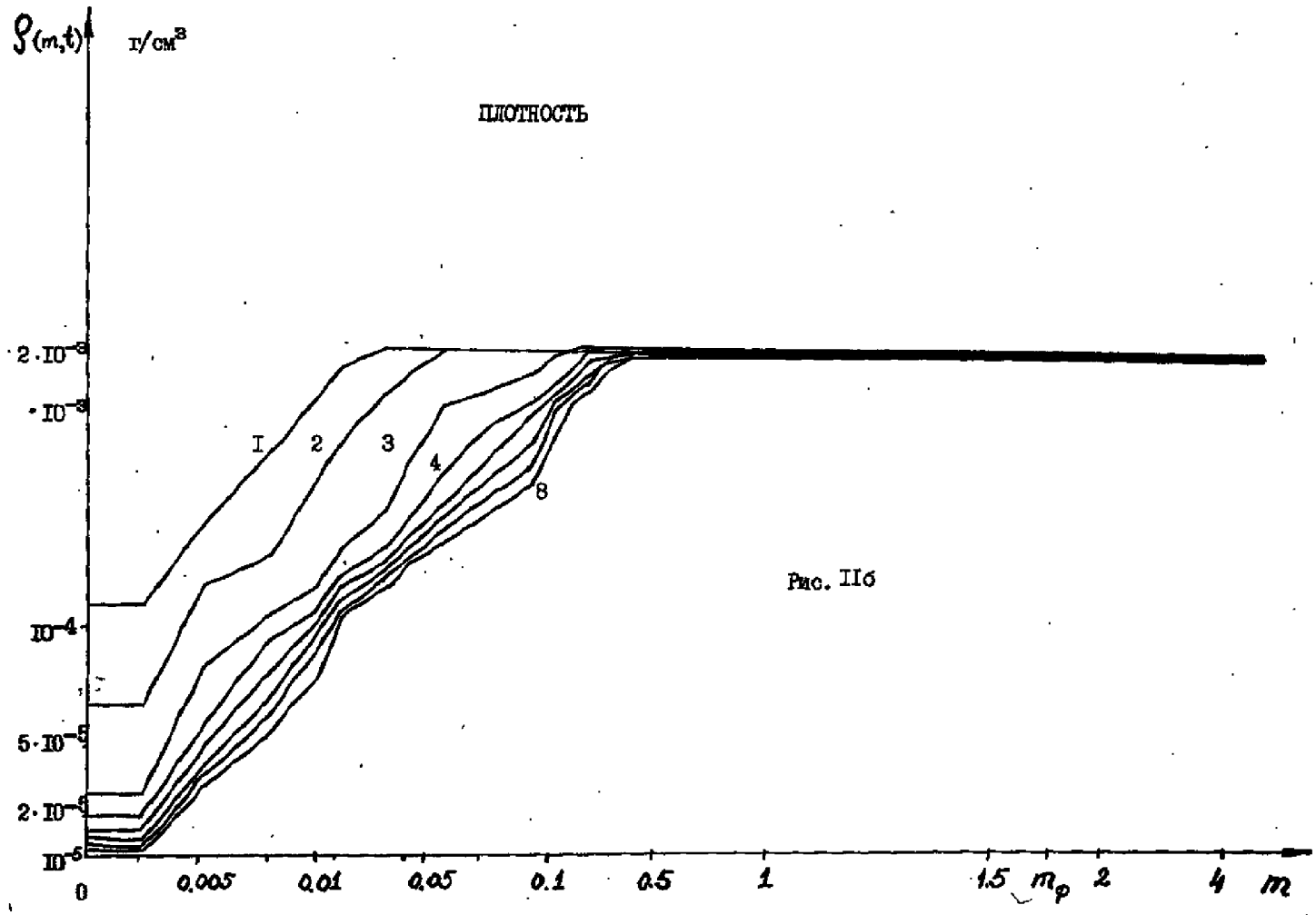


Рис. IIб

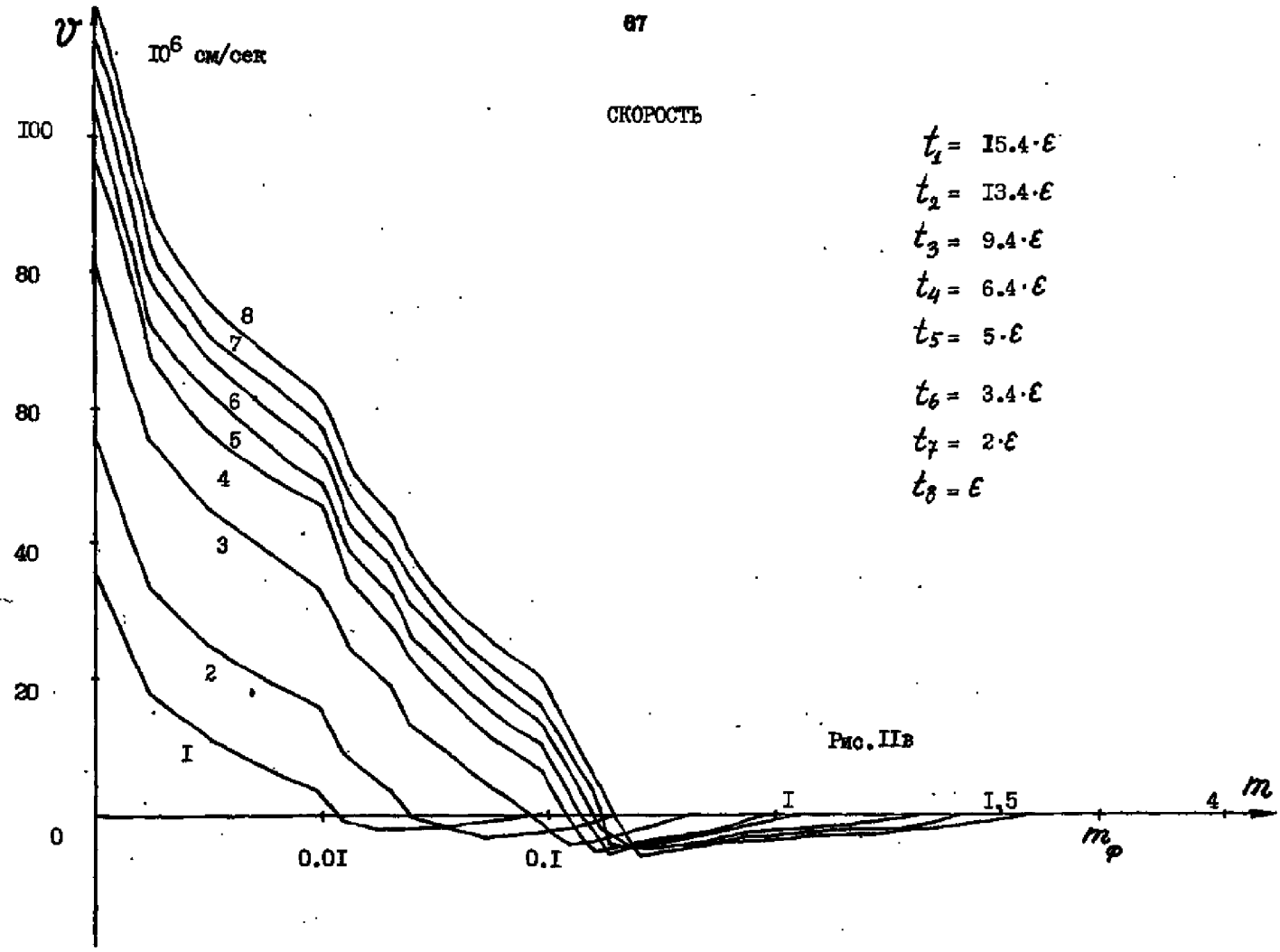


Рис. 11в

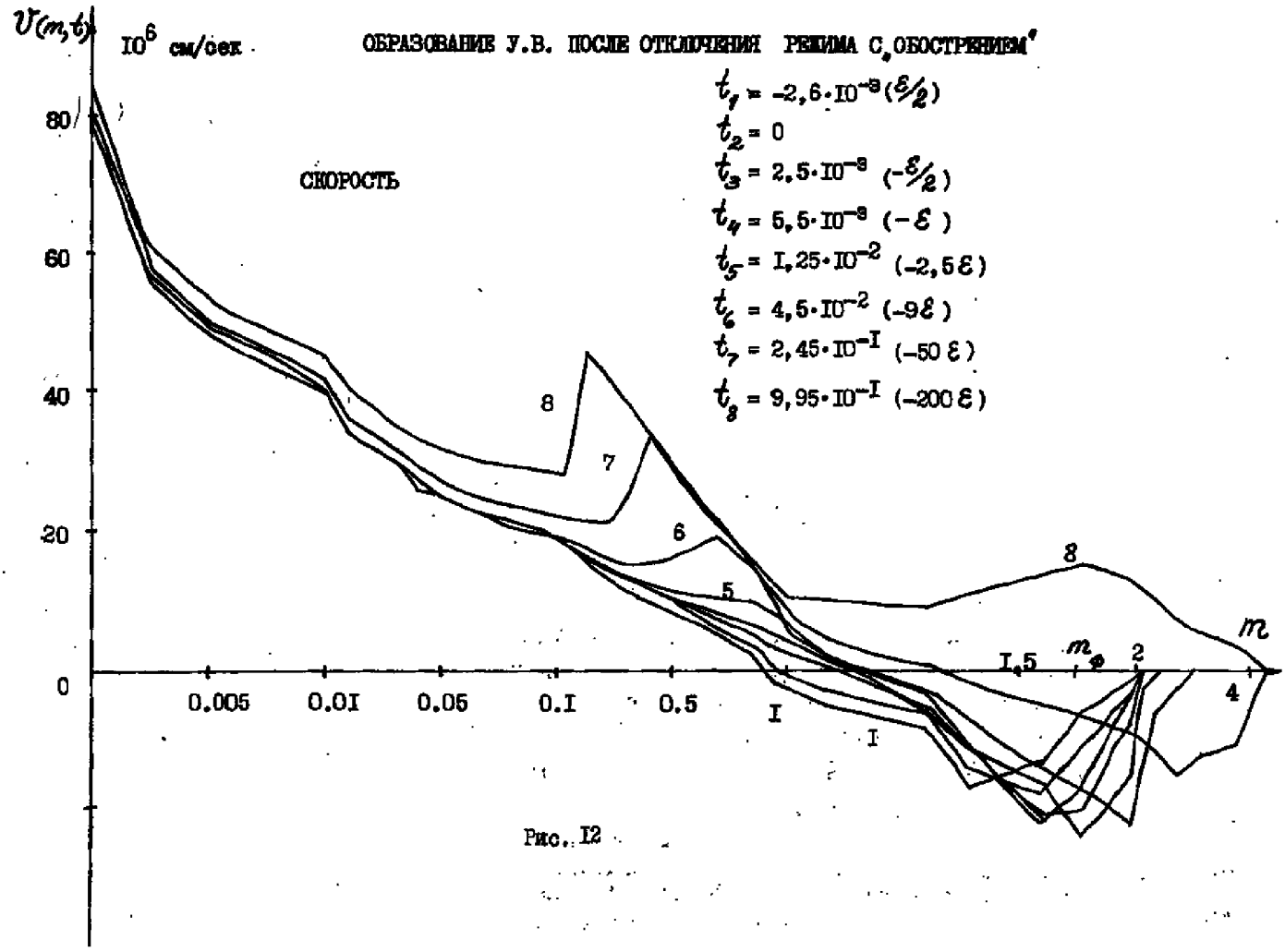


Рис. 12