# ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ*

В.М. ГОЛОВИЗНИН, академик А.А. САМАРСКИЙ,

А.П. ФАВОРСКИЙ

1. Многие вопросы современной науки связаны с решением гидродинамических задач, которое сейчас стало возможным благодаря быстрому развитию конечно - разностных методов.

Разностную схему можно рассматривать как дискретную модель сплошной среды. Очевидно, что такая модель тем лучше воспроизводит процессы в сплошной среде, чем точнее она отражает характерные свойства этой среды. Так, например, консервативные схемы ([1]), для которых имеют место разностные аналоги основных законов сохранения, позволяют обеспечить достаточную точность расчета разрывных течений. Полностью консервативные схемы ([2]), для которых дополнительно выполняются балансные соотношения между определяющими физическими величинами, могут успешно использоваться даже на грубых сетках.

Вопросы, связанные с построением дискретных моделей: сплошной среды, обладающих требуемыми свойствами, представляют значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

2. Для математического описания ряда физических явлений и процессов целесообразно использовать вариационные принципы.

В частности, дифференциальные уравнения и важнейшие свойства гидродинамического движения, включая законы сохранения, следуют из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия Гамильтона для механических систем с конечным числом степеней свободы ([3]). Диссипативные процессы также могут быть учтены введением соответствующих виртуальных работ ([4]). Такой подход позволяет установить прямую связь механики дискретной системы точек с механикой континуума.

3. Применим вариационный подход к построению разностных схем, моделирующих двумерное нестационарное течение газа в декартовых координатах $x$, $y$. Для простоты изложения диссипативные процессы не учитываем.

* ДАН СССР, 1977 т. 235, № 6 с. 1285 -1288.

Пусть некоторому жидкому объему $\Omega$ соответствует в лагранжевых координатах $\alpha$, $\beta$ прямоугольная область $G$. Кинетическая энергия жидкости, заключенной в объеме $\Omega$, $T = 0,5\int\int \rho \cdot (D(x,y)/D(\alpha,\beta))(u^2+v^2)d\alpha d\beta$, потенциальная энергия $U = \int\int \rho \cdot (D(x,y)/D(\alpha,\beta))\varepsilon d\alpha d\beta$ где интегрирование проводится по области $G$; здесь $\rho$ – плотность среды, $u, v$ – проекции вектора скорости на оси $x$ и $y$ соответственно, $\varepsilon$ – удельная внутренняя энергия, $D(x,y)/D(\alpha,\beta)$ – якобиан перехода от эйлеровых координат к лагранжевым.

Функционал действия определим выражением ([3])

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_G \rho \cdot (D(x,y)/D(\alpha,\beta))\cdot\left[0,5\left(u^2+v^2\right)-\varepsilon\right]d\alpha d\beta\right\}dt, \tag{1}$$

где $L = T - U$ – лагранжиан жидкого объема $\Omega$.

В соответствии с принципом наименьшего действия движение жидкости должно происходить так, чтобы первая вариация $\delta S$ функционала (1) обращалась в нуль. Варьирование проведем с учетом дополнительных связей, а именно: уравнения неразрывности и условия адиабатичности

$$\rho \cdot D(x,y)/D(\alpha,\beta) = \tilde{\rho}(\alpha,\beta), \quad d\varepsilon = \left(P/\rho^2\right)d\rho. \tag{2}$$

В результате получим динамические уравнения Эйлера

$$\rho du/dt = -dp/dx, \quad \rho dv/dt = -dp/dy; \tag{3}$$

здесь $d/dt$ означает дифференцирование вдоль траектории частиц. Уравнения (2) также можно представить в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} &d\rho/dt + \rho(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) = 0,\\ &d\varepsilon/dt = \left(P/\rho^2\right)d\rho/dt = -(P/\rho)(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y). \end{aligned} \tag{4}$$

Систему уравнений классической гидродинамики (2), (3), (4) замыкает уравнение состояния $P = P(\rho,\varepsilon)$.

4. Осуществим переход к дискретной модели.

Введем в двумерной области $G$ прямоугольную разностную сетку $\omega\{i = 1,\ldots,N; j = 1,\ldots,M\}$, где $i, j$ – номера узлов по $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Будем предполагать все термодинамические величины постоянными в пределах каждой ячейки сетки и обозначать их $\rho_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$, $P_{ij}$ где индексы $i, j$ совпадают с координатами левого нижнего угла ячейки в пространстве индексов. Скорости $u_{ij}$, $v_{ij}$ и координаты $x_{ij}$, $y_{ij}$ отнесем к узлам сетки $\omega$. Аппроксимируем функционал (1) дискретным по пространству выражением

$$S_h = \int_{t_0}^{t_1} L_h dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1,j=1}^{N-1,M-1} m_{ij} \left[ 0{,}125 \sum_{l,k=0}^{1} \left( u^2_{i+l,j+k} + v^2_{i+l,j+k} \right) - \varepsilon_{ij} \right] \right\} dt, \quad (5)$$

где $m_{ij}$ – масса, заключенная в ячейке с индексом $(i,j)$. Закон сохранения массы (2) и условие адиабатичности заменим соответственно выражениями

$$\rho_{ij} V_{ij} = m_{ij}, \quad m_{ij} d\varepsilon_{ij} = -P_{ij} dV_{ij}, \quad (6)$$

$$V_{ij} = -0{,}5\left[ (x_{i+1,j+1} - x_{ij})(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}) - (x_{i+1,j} - x_{i,j+1})(y_{i+1,j+1} - y_{ij}) \right],$$

$V_{ij}$ – объем ячейки $(i,j)$.

Варьирование функционала (5) приводит к уравнениям Эйлера – Лагранжа

$$d\left(\partial L_h / \partial u_{ij}\right)/dt - \partial L_h / \partial x_{ij} = 0, \quad d\left(\partial L_h / \partial v_{ij}\right)/dt - \partial L_h / \partial y_{ij} = 0,$$

из которых, раскрывая производные $\partial L_h / \partial x_{ij}$, $\partial L_h / \partial y_{ij}$ с учетом (6), получаем систему дифференциально-разностных динамических уравнений виде

$$M_{ij} \frac{du_{ij}}{dt} = \sum_{l,k=0}^{1} P_{i-l,j-k} \frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial x_{ij}}, \quad M_{ij} \frac{dv_{ij}}{dt} = \sum_{l,k=0}^{1} P_{i-l,j-k} \frac{\partial V_{i-l,j-k}}{\partial y_{ij}}; \quad (7)$$

здесь $M_{ij} = 0{,}25 \sum_{l,k=0}^{1} m_{i-l,j-k}$ - масса, отнесенная к узлу $(i,j)$.

Условие адиабатичности (6) дает уравнение для изменения внутренней энергии

$$m_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = -P_{ij} \frac{dV_{ij}}{dt} =$$

$$= -P_{ij} \left\{ \sum_{l,k=0} \left[ \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_{i+l,j+k}} \right) u_{i+l,j+k} + \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_{i+l,j+k}} \right) v_{i+l,j+k} \right] \right\}.$$

Можно показать ([5]), что уравнения (6) – (8) полностью консервативны, что является прямым следствием вариационного метода их получения.

Переход к разностным уравнениям можно осуществить заменой производных по времени конечными разностями. При соответствующем центрировании правых частей (7), (8) по времени, полученные вариационно-разностные уравнения также будут обладать свойством полной консервативности ([5]). Получаемые разностные схемы обладают вторым порядком точности в случае регулярных пространственно-временных сеток и первым порядком – в случае произвольных сеток.

5. Если ввести обобщенные импульсы

$P_{ij}^{(x)} = \partial L_h / \partial u_{ij}$, $P_{ij}^{(y)} = \partial L_h / \partial y_{ij}$, то с помощью преобразования Лежандра

$$H_h = \sum_{i=0,j=0}^{N-1,M-1} (P_{ij}^{(x)} u_{ij} + P_{ij}^{(y)} v_{ij}) - L_h$$

динамические уравнения (7) могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial P_{ij}^{(x)}}{dt} = -\frac{\partial H_h}{\partial x_{ij}}, \quad \frac{\partial P_{ij}^{(y)}}{dt} = -\frac{\partial H_h}{\partial y_{ij}}, \quad \frac{\partial x_{ij}}{dt} = \frac{\partial H_h}{\partial P_{ij}^{(x)}}, \quad \frac{\partial y_{ij}}{dt} = \frac{\partial H_h}{\partial P_{ij}^{(y)}}.$$

Это открывает возможности для дальнейшего исследования вариационно-разностных уравнений гидродинамики, основанного на формализме Лагранжа – Гамильтона и связанных с этим формализмом концепциях.

6. Построенные дифференциально-разностные и разностные схемы не учитывают диссипативных процессов. Однако для расчета течений с ударными волнами необходимо вводить искусственную вязкость. Один из возможных подходов к построению искусственной вязкости предложен в ([6]). В ([6]) показано также, что пространственный оператор «акустической» схемы, получаемой из (6) –(8) в результате линеаризации, является неотрицательным и самосопряженным, а неявная разностная схема безусловно устойчивой. Это дает возможность моделировать течение несжимаемой жидкости путем подбора соответствующего уравнения состояния (5).

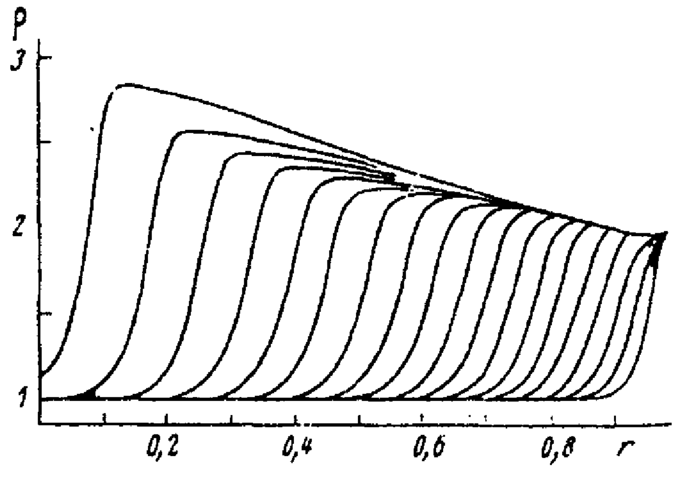

Рис. 1

7. Вариационные разностные схемы гидродинамики были положены в основу алгоритмов для расчета гидродинамических задач в различных системах координат с учетом теплопроводности, магнитного поля и других физических факторов ([5],[7],[8]). В качестве иллюстрации мы приводим результаты некоторых модельных расчетов.

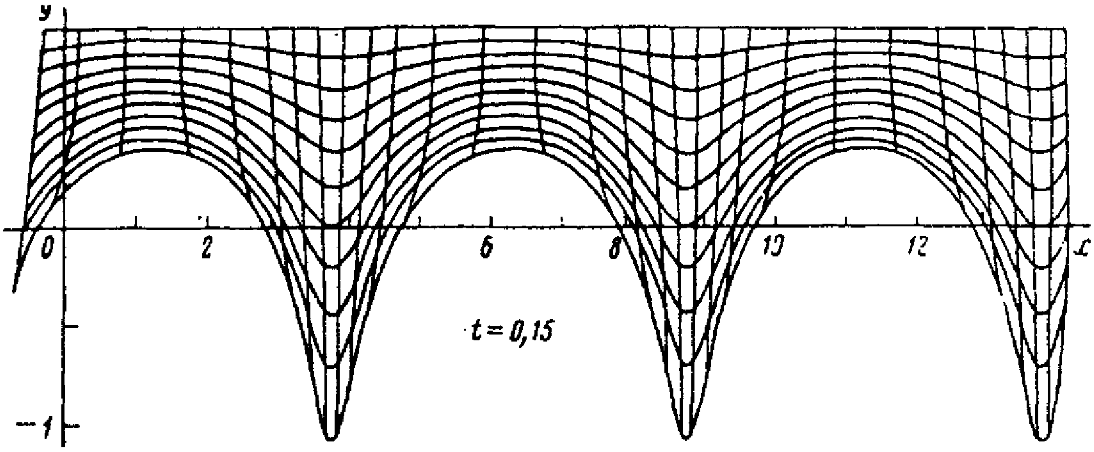


Рис. 2

На рис. 1 представлены профили плотности $\rho$ в сходящейся цилиндрической ударной волне в различные моменты времени.

На рис. 2 приведена стадия развитой релей-тейлоровской неустойчивости бесконечного плоского слоя несжимаемой жидкости, поддерживаемого снизу противодавлением. На верхней границе слоя задано условие непротекания, на боковых стенках области - условие периодичности, нижняя граница является свободной. Расчет проведен до сильно нелинейной стадии образования равноускоренно падающих струй, разделенных равномерно всплывающими пузырями ([9]).

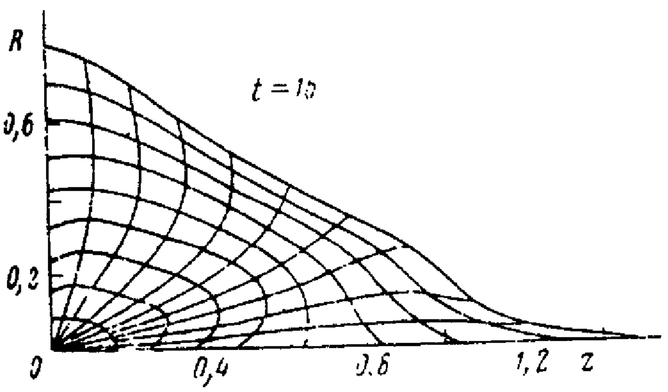


Рис. 3

На рис.3 изображена форма, которую принимает однородный сфероид в процессе сжатия давлением, приложенным к свободной границе. Сравнение с результатами решения аналогичной задачи ([10],[11]) показало удовлетворительное согласие.

8. Отметим, что не возникает принципиальных трудностей при распространении вариационного подхода к построению разностных схем на случаи большей пространственной размерности, произвольных систем координат и систем отсчета.

Авторы благодарны В.Ф. Тишкину, В.А. Гасилову, Т.К. Коршия, Р.А. Волковой и Н.Н. Тюриной за полезные обсуждения и помощь в проведении расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Самарский,* Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971. [2] *А. А. Самарский, Ю. П. Попов,* Разностные схемы газовой динамики, М., «Наука», 1975. [3] *R. L. Seleger, G. B. Whitham,* Proc. Roy. Soc. A, v. 305, 1 (1968). [4] *Л. И. Седов,* УМН, т. 20. 5 (125) (1965). [5] *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский,* Препринт ИПМ АН СССР; № 65, 1976. [6] *В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский,* Препринт ИПМ АН СССР, № 70, 1976. [7] *В. М. Головизнин, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский,* Препринт ИПМ АН СССР, № 16, 1977. [8] *Р. А. Волкова, В. М. Головизнин и др.,* Препринт ИПМ АН СССР, № 111, 1976. [9] *D.L. Book, Edward Ott,* Phys. Fluids, v. 17. № 4 (1974). [10] *W. D. Shultz,* J. Math. Phys., № 5 133 (1965). [11] *И. Д. Софронов, Н. А. Дмитриев и др.* Препринт ИПМ АН СССР, № 59. 1976.