ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.М. Головизнин, А.А. Самарский,
А.П. Фаворский

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Препринт № 65 за 1976 г.

Москва.

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассматривается вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики. Получен конкретный вид разностных уравнений в цилиндрических и декартовых координатах. Показано, что полученные уравнения обладают свойством полной консервативности.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

стр.

§ I. Введение 3

§ 2. Вариационная формулировка динамических уравнений адиабатической магнитной гидродинамики 7

§ 3. Вариационная формулировка одномерных разностных уравнений бездиссипативной гидродинамики I7

§ 4. Вариационная формулировка двумерных разностных уравнений адиабатической гидродинамики 28

§ 5. Граничные условия 4I

§ 6. Алгоритм решения разностных уравнений 44

§ 7. Примеры численных расчетов 47

§ I. Введение

Многие вопросы современной науки и техники в той или иной мере связаны о решением двух- и трехмерных уравнений газовой динамики.

Нелинейный характер уравнений газовой динамики, отсутствие хорошо разработанного аналитического аппарата их исследования, приводят к тому, что численные методы оказываются фактически единственным эффективным способом их решения.

Метод конечных разностей, который в основном используется для численного решения задач газовой динамики, состоит в замене непрерывной среды некоторой ее дискретной моделью. При этом физическое пространство аппроксимируется разностной сеткой, а дифференциальные уравнения, описывающие исходную задачу - системой алгебраических уравнений - разностной схемой. Как правило, для одной и той же дифференциальной задачи можно построить большое число различных разностных схем. Поэтому возникает проблема отбора наилучших в некотором смысле схем из общего класса допустимых схем. Такой отбор должен производиться в соответствии с определенными критериями.

Качество результатов, полученных с помощью той или иной разностной схемы, зависит, естественно, от величины шагов сетки: на мелких подробных сетках разностные схемы "работают" лучше. Однако даже при решении некоторых одномерных задач, применение мелких сеток зачастую не представляется возможным, ибо это приводит к большим затратам машинного времени даже при использовании современных ЭВМ. Поэтому важно строить такие схемы , которые сохраняли бы свои "хорошие" качества на сетках, применяемых в реальных расчетах.

Уравнения газодинамики - это математическое выражение основ-

ных законов сохранения (массы, импульса и энергии). Поэтому разумно строить разностную схему так, чтобы в ней также выполнялись аналоги этих законов. Схемы этого типа называются консервативными [I] . Требование консервативности следует считать одним из основных принципов построения разностных схем.

Дальнейшее развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности [2] . Полностью консервативные схемы для уравнений газовой динамики характеризуются тем, что в них выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также и дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии. Примеры одномерных расчетов [3] показывают, что применение таких схем особенно эффективно при использовании "грубых" сеток для задач, которые описываются функциями, резко изменяющимися во времени и пространстве.

Эффективность одномерных полностью консервативных схем выдвигает в качестве другого основополагающего принципа построения многомерных разностных схем - принцип полной консервативности.

Развитие одномерных методов в гидродинамике - от схем, просто аппроксимирующих исходные дифференциальные уравнения - к балансным (консервативным), а от них - к полностью консервативным схемам, наводит на мысль целенаправленно распоряжаться имеющимся произволом в построении разностных схем таким образом, чтобы придавать им как можно большее количество свойств, присущих исходным дифференциальным уравнениям.

Кажется несомненным, что чем больше это количество общих свойств дифференциальных и разностных уравнений, тем совершеннее модель среды, определяемая разностными уравнениями, тем с большей точностью она будет описывать поведение "реальной" среды.

В качестве следующего свойства газодинамических уравнений,

которое наряду с консервативностью и полной консервативностью может быть перенесено на разностные уравнения, выделим их "вариационность".

Вариационные принципы являются фундаментальным средством получения и исследования ряда уравнений теоретической и математической физики.

Известно (см., например, [5], [7]), что дифференциальные уравнения газовой динамики также могут быть получены из требования равенства нулю первой вариации функционала, являющегося обобщением функционала действия по Гамильтону в классической механике.

В настоящей работе, посредством замены Лагранжиана для сплошной среды его разностной аппроксимацией, и последующего варьирования функционала действия, получена нелинейная система дифференциально-разностных уравнений (дифференциальных по времени и разностных по пространственным переменным).

По виду разностного Лагранжиана устанавливаются законы изменения полной и внутренней энергии системы.

Показано, что система дифференциально-разностных уравнений полностью консервативна.

Переход от дифференциально-разностных уравнений к разностным осуществляется путем замены производных по времени соответствующими разностями. При этом такое свойство как консервативность не претерпевают никаких изменений. При соответствующем центрировании некоторых членов по времени, удается сохранить и свойство полной консервативности.

Методы решения получающихся таким образом разностных уравнений, представляют самостоятельный предмет исследования, и отражены в данной работе лишь конспективно. Следует отметить, что приводимые в § 6 алгоритмы близки к описанным в [7].

В заключение, в качестве иллюстрации, приводятся результаты некоторых численных расчетов, выполненных по разностным методикам, полученным из вариационного принципа. Расчеты и графическую обработку результатов провела Р.А. Волкова, за что авторы приносят ей глубокую благодарность.

§ 2. Вариационная формулировка динамических уравнений адиабатической магнитной гидродинамики

В этом параграфе демонстрируется техника вывода дифференциальных динамических уравнений магнитной гидродинамики в случае одного и двух измерений, в плоской и цилиндрической системах координат.

II.I. Известно, что поведение невязкой, нетеплопроводной, бесконечно проводящей среды, погруженной в магнитное поле, описывается системой уравнений Эйлера с учетом пондемоторных сил и условия вмороженности магнитного поля [4] . В том случае, когда течение зависит только ст одной пространственной переменной, эти определяющие уравнения имеют вид:

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right) = 0 \qquad (I)$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -P \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

$$\rho \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \rho_0(\alpha) \qquad (3)$$

$$H \frac{\partial x}{\partial \alpha} = H_0(\alpha) \qquad (4)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon)$$

Здесь и в дальнейшем применяются следующие обозначения:

x – эйлерова координата,

α – лагранжева координата "жидкой частицы",

P – давление,

H – напряженность магнитного поля,

ε – удельная внутренняя энергия среды,

$y=\frac{1}{\rho}$ – удельный объем,

v – скорость,

$H_0(\alpha)$ – напряженность магнитного поля в Лагранжевых координатах,

$\rho_0(\alpha)$ – плотность в Лагранжевых координатах при t_0

$\frac{d}{dt}$ – субстанциональная производная

П.2. Динамическое уравнение (I) может быть получено на основании вариационного принципа. Построим функционал S, аналогичный действию по Гамильтону для механических систем с конечным числом степеней свободы.

Полная кинетическая энергия среды $E_к$, в момент времени t, определяется в этом случае интегралом:

$$E_к=\frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\rho\frac{\partial x}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt=\frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\rho_0(\alpha)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 d\alpha;\quad \alpha\in[\alpha_0\,\alpha_1] \tag{5}$$

полная внутренняя энергия есть:

$$E_{вн}(t)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\rho\frac{\partial x}{\partial\alpha}\varepsilon\,d\alpha=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\rho_0(\alpha)\varepsilon\,d\alpha \tag{6}$$

Полная энергия магнитного поля $E_H(t)$ –

$$E_H(t)=\frac{1}{8\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{\partial x}{\partial\alpha}H^2 d\alpha \tag{7}$$

Тогда, обозначая через $\mathcal{L}$ – Лагранжиан сплошной среды [5]

$$\mathcal{L}(t) = E_к(t) - E_{вн}(t) - E_н(t) \tag{8}$$

получаем:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho \frac{\partial x}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{2} v^2 - \varepsilon - \frac{1}{8\pi} \frac{H^2}{\rho} \right\} d\alpha \right\} dt \tag{9}$$

Варьирование этого функционала дает:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho_0(\alpha) \left\{ v\delta v - \delta\varepsilon - \frac{1}{4\pi} \frac{H}{\rho} \delta H + \frac{1}{8\pi} \frac{H^2}{\rho^2} \delta\rho \right\} d\alpha \right\} dt \tag{9'}$$

Уравнение неразрывности (3) и условие вмороженности магнитного поля (4) накладывают определенную связь на вариации величин $\delta\rho$, δx, δH – а именно:

$$\delta\rho \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \rho \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} = 0 \tag{3}$$

$$\delta H \frac{\partial x}{\partial \alpha} + H \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} = 0 \tag{4}$$

Поскольку, в силу предположений, процессы, приводящие к изменению энтропии в среде отсутствуют, удельная внутренняя энергия является функцией только одной термодинамической переменной – удельного объема. Поэтому $\delta\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \delta\rho$. Принимая во внимание известное термодинамическое равенство $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = -p$ (здесь частная производная берется при постоянной энтропии), и

выражая $\delta\rho$, δH через δx в (9'), получаем:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left\{\rho\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial\delta x}{\partial t} + P\frac{\partial\delta x}{\partial\alpha} + \frac{1}{8\pi}H^2\frac{\partial\delta x}{\partial\alpha}\right\}d\alpha\,dt \qquad (10)$$

Интегрируя по частям, и принимая δx равным нулю на границе области интегрирования, находим:

$$\delta S = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left\{\rho\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial\alpha} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H^2)\right\}\delta x\,d\alpha\,dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left\{\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right)\right\}\delta x\,dx\,dt \qquad (10')$$

Требование равенства нулю первой вариации (10') приводит к уравнению (1).

П.3. Применим вариационный принцип для получения динамических уравнений в двумерном случае.

Пусть G – область в плоскости Лагранжевых переменных $\alpha;\beta$, занятая жидкостью; $x(\alpha,\beta,t)$, $y(\alpha,\beta,t)$ – декартовы координаты частиц среды в момент t.

В качестве координат α,β выберем соответственно координаты x,y в начальный момент времени t_0. Предположим, что магнитное поле имеет единственную составляющую H_z, перпендикулярную плоскости течения.

Условие сохранения массы в Лагранжевых координатах в случае двух измерений имеет вид:

$$\rho\frac{D(x,y)}{D(\alpha;\beta)} = \rho_0 \qquad (11)$$

Условие вмороженности магнитного поля (условие постоянства магнит-

ного потока через любой "жидкий" контур):

$$H_z \cdot \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} = H_{z0} \tag{12}$$

Здесь $\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$ – якобиан перехода от Эйлеровых координат к Лагранжевым.

Кинетическая энергия среды $E_к$, внутренняя энергия $E_{вн}$ и энергия магнитного поля $E_н$, "вмороженного" в среду, определяются, соответственно, интегралами:

$$E_к(t) = \frac{1}{2}\iint\limits_G \rho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right\} d\alpha\, d\beta \tag{13}$$

$$E_{вн}(t) = \iint\limits_G \rho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}\, \varepsilon\, d\alpha\, d\beta \tag{14}$$

$$E_н(t) = \iint\limits_G \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \frac{H_z}{8\pi}\, d\alpha\, d\beta \tag{15}$$

Аналогом действия по Гамильтону в двухмерном случае является выражение:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{E_к(t) - E_в(t) - E_н(t)\right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint\limits_G \rho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] - \varepsilon - \frac{1}{8\pi}\frac{H_z^2}{\rho}\right\} d\alpha\, d\beta \right\} dt \tag{16}$$

Как и в п.2, найдем вариацию функционала (16) с учетом условий (11),(12). Последние накладывают связь на вариации δx, δy, $\delta\rho$, δH_z, а именно:

$$\delta\rho\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}+\rho\frac{D(\delta x,y)}{D(\alpha,\beta)}+\rho\frac{D(x,\delta y)}{D(\alpha,\beta)}=0 \qquad (11')$$

$$\delta H_z\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}+H_z\frac{D(\delta x,y)}{D(\alpha,\beta)}+H_z\frac{D(x,\delta y)}{D(\alpha,\beta)}=0 \qquad (12')$$

Поскольку диссипативные процессы в среде отсутствуют, то удельная внутренняя энергия ε зависит только от удельного объема, т.е.

$$\delta\varepsilon=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\rho \qquad (17)$$

Выражая из (11′),(12′) $\delta\rho$ и δH_z через $\delta x, \delta y$ находим:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_G\left\{\rho\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}\left\{\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial\delta x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial\delta y}{\partial t}\right\}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\left\{\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{D(x,\delta y)}{D(\alpha,\beta)}\right\}+\frac{1}{8\pi}H_z^2\left\{\frac{D(\delta x,y)}{D(\alpha,\beta)}+\frac{D(x,\delta y)}{D(\alpha,\beta)}\right\}\right\}d\alpha\,d\beta\right\}dt \qquad (18)$$

Из первого начала термодинамики: $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}=-P$ (19)

Учитывая следующие свойства якобианов:

$$\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}=-\frac{D(y,x)}{D(\alpha,\beta)}=\frac{D(y,x)}{D(\beta,\alpha)} \qquad (20)$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\alpha,y)}=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\ ; \qquad \frac{D(x,y)}{D(x,\beta)}=\frac{\partial y}{\partial\beta} \qquad (21)$$

и полагая δx, δy равными нулю на границе области интегрирования, после интегрирования (18) по частям, получаем:

$$\delta S = -\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_G\left\{\left[\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}\right]\delta x+\left[\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial y}\right]\delta y\right\}dx\,dy\right\}dt \qquad (18')$$

Требование равенства нулю первой вариации δS (18') приводит к системе уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}=0 \qquad (22)$$

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial y}=0 \qquad (23)$$

П.4. Если магнитное поле, вмороженное в жидкость, не зависит от z и лежит в плоскости течения ($H_x = H_x(\alpha,\beta,t)$; $H_y = H_y(\alpha,\beta,t)$), то при всех остальных предположениях предыдущего пункта, условие вмороженности поля, т.е. условие постоянства магнитного потока через произвольную жидкую линию $z(\alpha,\beta)$, запишется в виде:

$$\varphi_z = \int_z \vec{H}\cdot dS = \int_z (H_x dy - H_y dx) = const \qquad (24)$$

Делая замену

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta}d\beta; \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}d\beta$$

находим, что (24) эквивалентно условиям:

$$\left.\begin{aligned} H_x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - H_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= C_1(\alpha,\beta) \\ H_x \frac{\partial y}{\partial \beta} - H_y \frac{\partial x}{\partial \beta} &= C_2(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (24')$$

Последние налагают следующую связь на $\delta H_x, \delta H_y, \delta x, \delta y$:

$$\left.\begin{aligned} \delta H_x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \delta H_y \frac{\partial x}{\partial \alpha} + H_x \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} - H_y \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} &= 0 \\ \delta H_x \frac{\partial y}{\partial \beta} - \delta H_y \frac{\partial x}{\partial \beta} + H_x \frac{\partial \delta y}{\partial \beta} - H_y \frac{\partial \delta x}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24'')$$

Полная энергия магнитного поля есть:

$$E_H(t) = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_G \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \left(H_x^2 + H_y^2\right) d\alpha\, d\beta \qquad (15')$$

Варьирование соответствующего функционала действия при ограничениях (II′), (24″) и учете соленоидальности магнитного поля приводит к уравнениям:

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} H_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) \qquad (25)$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} H_x \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \qquad (26)$$

П.5. Перейдем от декартовых координат (X,У) к цилиндрическим: (R, ξ). Предполагая, что магнитное поле представлено компо-

нентой $H_\varphi = H_\varphi(\alpha,\beta)$, перпендикулярной плоскости (R,z), и производя формально замену переменных в (16), получаем:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint_{G(\alpha,\beta)} \rho \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \frac{D(R,z)}{D(x,y)} \left\{ \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right] \frac{1}{2} - \mathcal{E} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{8\pi\rho} H_\varphi^2 \right\} d\alpha\, d\beta \right\} dt \qquad (16')$$

В цилиндрических координатах закон сохранения массы имеет вид:

$$\rho \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} = \rho_0 \qquad (27)$$

Условие вмороженности магнитного поля:

$$\frac{1}{R} H_\varphi \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{H_\varphi(\alpha,\beta,t_0)}{R(\alpha,\beta,t_0)}. \qquad (28)$$

Выражения (27),(28) накладывают следующие связи на вариации δH_φ, $\delta\rho$, δR, δz:

$$\delta\rho \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} + \rho \frac{D(\delta R,z)}{D(\alpha,\beta)} + \rho \frac{D(R,\delta z)}{D(\alpha,\beta)} = 0 \qquad (27')$$

$$\frac{1}{R} \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} \delta H_\varphi + \frac{1}{R} H_\varphi \left\{ \frac{D(\delta R,z)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{D(R,\delta z)}{D(\alpha,\beta)} \right\} = \frac{1}{R^2} H_\varphi \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} \delta R \qquad (28')$$

Варьирование функционала (16') с учетом ограничений (27'), (28'), и приравнивание первой вариации нулю, приводит к системе уравне-

ний:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \dfrac{\partial P}{\partial R} + \dfrac{1}{8\pi} \dfrac{\partial H_\varphi^2}{\partial R} + \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{H_\varphi^2}{R} = 0 & (29) \\ \rho \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{1}{8\pi} \dfrac{\partial H_\varphi^2}{\partial z} = 0 & (30) \end{cases}$$

П.6. Если при всех прочих предположениях п.5 вектор магнитного поля лежит в плоскости (R, z), то условие вмороженности примет вид:

$$\begin{cases} R \left(H_R \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - H_z \dfrac{\partial R}{\partial \alpha} \right) = C_1 (\alpha, \beta) \\ R \left(H_R \dfrac{\partial z}{\partial \beta} - H_z \dfrac{\partial R}{\partial \beta} \right) = C_2 (\alpha, \beta) \end{cases} \qquad (31)$$

а полная энергия магнитного поля определится интегралом:

$$E_H (t) = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_G \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} \left(H_z^2 + H_R^2 \right) d\alpha\, d\beta \qquad (32)$$

Приравнивание нулю первой вариации функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iint\limits_G \rho \frac{D(R,z)}{D(\alpha,\beta)} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathcal{E} - \frac{1}{8\pi\rho} \left(H_R^2 + H_z^2 \right) \right\} d\alpha\, d\beta \right\} dt \qquad (16'')$$

с учетом условий (27),(31) и соленоидальности магнитного поля:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (R H_z) = 0$$

приводит к системе уравнений, совпадающей по форме записи с (25), (26)

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial P}{\partial R} + \dfrac{1}{4\pi} H_z \left(\dfrac{\partial H_R}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial R} \right) & (33) \\ \rho \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{1}{4\pi} H_R \left(\dfrac{\partial H_z}{\partial R} - \dfrac{\partial H_R}{\partial z} \right) & (34) \end{cases}$$

§ 3. Вариационная формулировка одномерных разностных уравнений бездиссипативной гидродинамики

В предыдущем параграфе было показано, что динамические уравнения адиабатической магнитной гидродинамики являются следствием равенства нулю первой вариации функционала действия при дополнительных требованиях неразрывности среды и вмороженности магнитного поля.

Ниже, на примере одномерных уравнений, демонстрируется возможность вариационного метода получения разностных схем. В результате здесь получаются полностью консервативные схемы из книги [3].

При выводе разностных уравнений, с целью сокращения выкладок, будем предполагать магнитное поле отсутствующим.

II.I. Разобьем область изменения лагранжевой переменной α – отрезок $[\ell_1, \ell_2]$ на N частей точками α_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$

$$\ell_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_i < \alpha_{i+1} < \ldots < \alpha_N = \ell_2$$

Соответствующее разбиение декартовой координаты x обозначим $\{x_i\}$.

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_N$$

Будем в дальнейшем называть точки $\{\alpha_i\}$; $\{x_i\}$ этих разбиений "узлами", а отрезки $[\alpha_{i+1}, \alpha_i]$ - "ячейками".

Полагая величины удельной внутренней энергии $\mathcal{E}_i$ и плотностей ρ_i постоянными, а величину кинетической энергии меняющейся линейным образом внутри каждой ячейки $[\alpha_i ; \alpha_{i+1}]$, аппроксимируем Лагранжиан сплошной среды ((8), § 2) механическими квадратурами.

$$L_h = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \frac{(x_{i+1}-x_i)}{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} \left\{ \frac{1}{4} \left(v_{i+1}^2 + v_i^2 \right) - \mathcal{E}_i \right\} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \tag{I}$$

Выражение (I) (разностный Лагранжиан), совместно с разностным аналогом закона сохранения массы

$$\rho_i(t) \left\{ x_{i+1}(t) - x_i(t) \right\} = \rho_{0i} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) = m_i = const \tag{2}$$

и уравнением состояния

$$P_i = P(\rho_i, \mathcal{E}_i) \tag{3}$$

полностью определяют дискретную модель сплошной среды.

Величину m_i можно трактовать как полну массу i-ой лагранжевой ячейки.

П.2. Приравняем нулю первую вариацию функционала действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L_h \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i \frac{(x_{i+1}-x_i)}{(\alpha_{i+1}-\alpha_i)} \left\{ \frac{1}{4} \left(v_{i+1}^2 + v_i^2 \right) - \mathcal{E}_i \right\} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \right\} dt \tag{4}$$

Это приведет к системе уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{5}$$

Входящие неявным образом в (5) производные $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial x_{i+1}}$; $\dfrac{\partial \rho_i}{\partial x_i}$ выражаются из уравнения (2). Подставляя в (5) выражение (I), получаем следующую систему дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{cases} M_i \dfrac{dv_i}{dt} + P_i - P_{i-1} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{5'}$$

где $$M_i = \frac{m_i + m_{i-1}}{2}$$

Следует отметить, что уравнения (5), (5') справедливы только для внутренних узлов разностной сетки (об уравнениях для граничных точек речь пойдет отдельно в § 5).

Нетрудно видеть, что уравнение (5') консервативно, т.е. изменение импульса внутренних узлов равно импульсу внешних сил, действующих на их границы, т.е.

$$\sum_{i=i1}^{i2} M_i \frac{dv_i}{dt} = P_{i1-1} - P_{i2} \tag{6}$$

<u>Пусть задан Лагранжиан L_h в виде (I), и v_i - есть решение системы уравнений (5'),(2),(3), тогда справедлив закон сохранения полной энергии в виде:</u>

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=i1}^{i2} M_i \frac{v_i^2}{2} + \sum_{i=i1}^{i2-1} m_i \varepsilon_i\right\} = P_{i1-1} v_{i1} - P_{i2} v_{i2} \tag{7}$$

$$(0 < i1 < i2 < N)$$

Рассмотрим выражение

$$\tilde{L} = \sum_{i=i1}^{i2-1} \left[m_i \frac{1}{4} \left(v_{i+1}^2 + v_i^2 \right) - m_i \varepsilon_i \right]$$

Поскольку $\tilde{L}$ не зависит явно от времени, имеем:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \sum_{i=i1+1}^{i2-2} \left\{ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right\} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_{i1}} \ddot{x}_{i1} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_{i2}} \ddot{x}_{i2} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_{i2}} \dot{x}_2 \qquad (7')$$

Вследствие того, что для внутренних точек подобласти ($i1$, $i2$) справедливы уравнения (5), выражение в фигурных скобках можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right)$$

Обозначая $L_{i1-1} = m_{i1-1} \frac{1}{4} \left(v_{i1}^2 + v_{i1-1}^2 \right) - m_{i1-1} \varepsilon_{i1-1}$

$$L_{i2} = m_{i2} \frac{1}{4} \left(v_{i2}^2 + v_{i2+1}^2 \right) - m_{i2} \varepsilon_{i2}$$

прибавим к левой и правой частям равенства (7′) выражение:

$$\frac{\partial L_{i1-1}}{\partial \dot{x}_{i1}} \ddot{x}_{i1} + \frac{\partial L_{i1-1}}{\partial x_{i1}} \dot{x}_{i1} + \frac{\partial L_{i2}}{\partial \dot{x}_{i2}} \ddot{x}_{i2} + \frac{\partial L_{i2}}{\partial x_{i2}} \dot{x}_{i2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} m_{i1-1} v_{i1} \dot{v}_{i1} + \frac{1}{2} m_{i2} v_{i2} \dot{v}_{i2} - m_{i1-1} \frac{\partial \varepsilon_{i1-1}}{\partial x_{i1}} v_{i1} - m_{i2} \frac{\partial \varepsilon_{i2}}{\partial x_{iR}} v_{i2}$$

С учетом справедливости динамических уравнений (5) для точек $i1$ и $i2$, правая часть выражения (7') преобразуется при этом к виду:

$$\sum_{i=i1}^{i2-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)$$

Перенося последнее выражение в левую часть, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{L}-\sum_{i=i1}^{i2-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)+\frac{1}{2}m_{i1-1}v_{i1}\dot{v}_{i1}+\frac{1}{2}m_{i2}v_{i2}\dot{v}_{i2}-$$

$$-m_{i1-1}\frac{\partial \varepsilon_{i1-1}}{\partial x_{i1}}\dot{x}_{i1}-m_{i2}\frac{\partial \varepsilon_{i2}}{\partial x_{i2}}\dot{x}_{i2}=0$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\hat{L}-\sum_{i=i1}^{i2-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right\}+\frac{1}{2}m_{i1-1}v_{i1}\dot{v}_{i1}+\frac{1}{2}m_{i2}v_{i2}\dot{v}_{i2}\equiv$$

$$\equiv-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=i1}^{i2}M_i\frac{v_i^2}{2}+\sum_{i=i1}^{i2-1}m_i\varepsilon_i\right)$$

Выражая производные $\frac{\partial \varepsilon_{i1-1}}{\partial x_{i1}}$; $\frac{\partial \varepsilon_{i2}}{\partial x_{i2}}$ через давление, приходим к соотношению (7)

П.3. Найдем уравнение, описывающее изменение удельной внутренней энергии ε_i.

Из равенства (7) следует:

$$\sum_{i=i1}^{i2}M_i v_i\frac{dv_i}{dt}+\sum_{i=i1}^{i2-1}m_i\frac{d\varepsilon_i}{dt}=P_{i2}v_{i2}-P_{i1}v_{i1} \qquad (8)$$

Подставляя в (8) выражение для $M_i\frac{dv_i}{dt}$ из (5'), получаем уравнение баланса внутренней энергии

$$m_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = - P_i (v_{i+1} - v_i) \qquad (9)$$

Отметим, что уравнение (9) может быть представлено и в других формах:

$$m_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = - P_i \frac{dV_i}{dt} \qquad (9')$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = P_i \frac{1}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt} \qquad (9'')$$

где $V_i = x_{i+1} - x_i$ – "объем" ячейки с номером i

Уравнение (9″) следует из (9′) и условия сохранения массы (2).

П.4. Уравнение (9) показывает, что изменение удельной внутренней энергии ячеек происходит адиабатически. Это значит, что при переходе от дифференциальных уравнений (I),(2),(3) предыдущего параграфа, к системе дифференциально-разностных уравнений (2),(5′),(9) никакой аппроксимационной вязкости не появляется. Отсюда следует принципиальная невозможность приближенного описания системой (2),(5′),(9) течений с ударными волнами, поскольку движение ударной волны должно сопровождаться изменением энтропии. Однако, если в (5′) и (9) ввести искусотвенную вязкость, то описание течений с ударными волнами становится возможным.

П.5. Перейдем теперь от дифференциально-разностных уравнений к разностной схеме. Для этого разобьем отрезок времени $[T_1, T_2]$, на котором ищется решение задачи, на k частей точками t_n

$$T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_k = T_2$$

и проведем в уравнениях (2),(5'),(9) дискретизацию по времени.

В результате получим следующее 3-х параметрическое семейство разностных схем

$$(I)\begin{cases} \rho_i^n (x_{i+1}^n - x_i^n) = m_i & (10) \\ M_i \dfrac{v_i^{n+1} - v^n}{\tau_n} + P_i^{(\sigma_1)} - P_{i-1}^{(\sigma_1)} = 0 & (11) \\ m_i \dfrac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau_n} = - P_i^{(\sigma_1)} \left\{ v_{i+1}^{(\sigma_2)} - v_i^{(\sigma_2)} \right\} & (12) \\ \dfrac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau_n} = v_i^{(\sigma_3)} & (13) \end{cases}$$

где $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ – шаг по времени; $\rho_i^n = \rho(\alpha_i ; t_n)$

$P_i^n = P(\rho_i^n ; \varepsilon_i^n)$ и т.д. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in [0,1]$

Здесь и в дальнейшем все величины типа $f^{(\sigma)}$ обозначают среднее (с весом σ) значений f^{n+1} и f^n

$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{n+1} + (1-\sigma) f^n$$

Отметим, что уравнение баланоа внутренней энергии (12) при $\sigma_2 = \sigma_3$ может быть записано в следующих, алгебраически эквивалентных (12) видах:

$$m_i \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau_n} = - P_i^{(\sigma_1)} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau_n} \qquad (12')$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau_n} = P_i^{(\sigma_1)} \frac{1}{\rho_i^{n+1} \rho_i^n} \left(\frac{\rho_i^{n+1} - \rho^n}{\tau_n} \right) \qquad (12'')$$

Система разностных уравнений (I) при $\sigma_2=0.5$; $\sigma_3=0.5$ (σ_1 – произвольно) обладает свойством полной консервативнооти, т.е.

$$\frac{1}{\tau_n}\left\{\sum_{i=i1}^{i2} M_i\left[\frac{(v_i^{n+1})^2-(v_i^n)^2}{2}\right]-\sum_{i=i1}^{i2-1}\left[m_i\varepsilon_i^{n+1}-m_i\varepsilon_i^n\right]\right\}=$$

$$=P_{i1-1}^{(\sigma_1)}\left(\frac{v_{i1}^n+v_{i1}^{n+1}}{2}\right)-P_{i2}^{(\sigma_1)}\left(\frac{v_{i2}^n+v_{i2}^{n+1}}{2}\right); \qquad (7'')$$

$$(0<i1\leqslant i\leqslant i2<N)$$

Действительно, если (II) умножить на $\frac{v_i^{n+1}+v_i^n}{2}$ и сложить с (I2), то после несложных преобразований получим соотношение ($7''$).

Очевидно, что разностное уравнение (II) консервативно.

П.7. При переходе к цилиндрической координате R, вид Лагранжиана $\{(8),\S\ 2\}$ и ограничения $\{(4),\S\ 2\}$ не изменится. Воспользуемся этим обстоятельством для вывода соответствующего разностного уравнения. Для этого, как и в п.I проведем разбиение области изменения Лагранжевой координаты α, и аппроксимируем функционал действия дискретным по пространству выражением:

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L_h\,dt$$

$$L_h=\sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\frac{(R_{i+1}^2-R_i^2)}{(\alpha_{i+1}^2-\alpha_i^2)}\left[\frac{1}{4}(v_{i+1}^2+v_i^2)-\varepsilon\right]\frac{(\alpha_{i+1}^2-\alpha_i^2)}{2} \qquad (I4)$$

Вместо (2) получим:

$$\rho_i(t)\left\{\frac{R_{i+1}^2-R_i^2}{2}\right\}=m_i=const. \qquad (I5)$$

Как и в п.2 вариационный принцип приводит к системе уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L_h}{\partial \dot{R}_i}\right) - \dfrac{\partial L_h}{\partial R_i} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases} \qquad (16)$$

Входящие неявным образом в (16) производные $\frac{\partial \rho_i}{\partial R_{i+1}}$; $\frac{\partial \rho_i}{\partial R_i}$ определяются из (15). Подставляя в (16) L_h из (14), находим:

$$\begin{cases} M_i \dfrac{dV_i}{dt} + R_i (P_i - P_{i-1}) = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, N-1 \end{cases} \qquad (16')$$

Суммируя (16') по i от $i1$ до $i2$ получаем:

$$\sum_{i=i1}^{i2} M_i \frac{dV_i}{dt} - \sum_{i=i1}^{i2-1} P_i (R_{i+1} - R_1) = P_{i1-1} R_{i1} - P_{i2} R_{i2} \qquad (17)$$

<u>Пусть задан Лагранжиан L_h в виде(14), V_i – есть решение системы уравнений(15), (16'). Тогда справедлив закон сохранения полной энергии в виде:</u>

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=i1}^{i2} M_i \frac{V_i^2}{2} + \sum_{i=i1}^{i2-1} m_i \varepsilon_i\right\} = P_{i1-1} R_{i1} V_{i1} - P_{i2} R_{i2} V_{i2} \qquad (18)$$

$$(0 < i1 < i2 < N)$$

Доказательство аналогично приведенному в п.2. Найдем уравнение баланса внутренней энергии: раскрывая фигурные скобки в (18) и выражая $M_i \frac{dV_i}{dt}$ из (16'), после несложных преобразований, находим

$$m_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -P_i (R_{i+1} V_{i+1} - R_i V_i) = -P_i \frac{dV_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt} \qquad (19)$$

где $$V_i = \frac{R_{i+1}^2 - R_i^2}{2}$$

Заменим область изменения переменной t дискретным набором точек $\{t_n\}$ $(n=0,1,\dots,k)$. Обозначим $R^n, v^n, \rho^n, \varepsilon^n, p^n$ – значения этих величин при $t=t_n$. Заменяя уравнения (I5), (I6),(I9) разностными, получаем:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \rho_i^n\left[(R_{i+1}^n)^2-(R_i^n)^2\right]=2m_i & (20)\\ M_i\,\dfrac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\tau_n}+R_i^{(\sigma_1)}\left(p_i^{(\sigma_2)}-p_{i-1}^{(\sigma_2)}\right)=0 & (21)\\ m_i\,\dfrac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\tau_n}=-p_i^{(\sigma_2)}\left\{R_{i+1}^{(\sigma_3)}v_{i+1}^{(\sigma_4)}-R_i^{(\sigma_3)}v_i^{(\sigma_4)}\right\} & (22)\\ \dfrac{R_i^{n+1}-R_i^n}{\tau_n}=v_i^{(\sigma_5)} & (23)\end{cases}$$

где
$$p_i^n=p(\rho_i^n;\varepsilon_i^n);\qquad \sigma_k\in[0,1];\qquad k=1,2,3,4,5$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том,что уравнение баланса удельной внутренней энергии (22), при $\sigma_1=\sigma_3=\sigma_5=0.5$ имеет следующие алгебраически эквивалентные (22) формы

$$m\,\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\tau_n}=-p_i^{(\sigma_2)}\,\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\tau_n} \qquad (22')$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\tau_n}=p_i^{(\sigma_2)}\,\frac{1}{\rho_i^n\rho_i^{n+1}}\,\frac{(\rho_i^{n+1}-\rho_i^n)}{\tau_n} \qquad (22'')$$

<u>Система разностных уравнений (II) при $\sigma_4=0.5$, $\sigma_1=\sigma_3=$</u>

$= \sigma_5 = 0.5$ (σ_2 – произвольно) обладает свойством полной консервативности, т.е.

$$\frac{1}{\tau_n}\left\{\sum_{i=i1}^{i2} M_i\left[\frac{(v_i^{n+1})^2-(v_i^n)^2}{2}\right]+\sum_{i=i1}^{i2-1} m_i(\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n)\right\}=$$

$$=P_{i1-1}^{(\sigma_2)}\left(\frac{v_{i1}^n+v_{i1}^{n+1}}{2}\right)R_{i1}^{(\sigma_1)}-P_{i2}^{(\sigma_2)}\left(\frac{v_{i2}^n+v_{i2}^{n+1}}{2}\right)R_{i2}^{(\sigma_1)} \qquad (24)$$

Действительно, если (21) умножить на $\frac{v_i^{n+1}+v_i^n}{2}$ и сложить с (22), то получим (24).

П.8. Уравнения движения дискретной физической среды, определяемой видом разностного Лагранжиана L_h, могут быть записаны в Гамильтоновой форме.

Действительно, вводя в рассмотрение обобщенные координаты "узлов" g_i и их обобщенные импульсы $\bar{P}_i=\frac{\partial L_h}{\partial \dot{g}_i}$, запишем Гамильтониан H_h в виде

$$H_h=\sum_{i=0}^{N}\bar{P}_i\dot{g}_i-L_h \qquad (25)$$

Тогда [8]

$$\dot{\bar{P}}_i=-\frac{\partial H_h}{\partial g_i} \qquad (26)$$

$$g_i=\frac{\partial H_h}{\partial \bar{P}_i} \qquad (27)$$

В тех случаях, когда кинетическая энергия дискретной среды является квадратичной функцией от обобщенных координат, уравнение (27) обращается в тождество, а (26) приводит к точно таким же дифференциально-разностным уравнениям, как и (5),(16).

§ 4. Вариационная формулировка двухмерных разностных уравнений адиабатической гидродинамики

В этом параграфе, на основании вариационного принципа выводится система дифференциально-разностных уравнений, аппроксимирующая двухмерные уравнения газодинамики в декартовых и цилиндрических координатах.

Посредством замены производных по времени конечными разностями, осуществляется переход от дифференциально-разностных уравнений к 5-и параметрическому семейству разностных схем. Находятся условия консервативности и полной консервативности разностных уравнений. В заключение вводится в рассмотрение искусственная вязкость.

Отметим, что способ изложения материала в этом параграфе аналогичен принятому в § 3, и существенно на него опирается.

П.I. Покроем двухмерную область $G(\alpha,\beta)$, занятую жидкостью (см. п.3, § 2), какой-либо косоугольной сеткой, ячейками котрой являются четырехугольники с непересекающимися сторонами и отличной от нуля площадью. Каждому узлу такой сетки поставим в соответствие пару натуральных чисел (i,j) $\{i=0,1,..N;\ j=0,1,...M\}$ Обозначим через $\xi_{i,j}$; $\mu_{i,j}$ координаты (i,j)-го узла, а через $U_{i,j}$; $V_{i,j}$ – его скорости $\left(\frac{d\xi_{i,j}}{dt}=U_{i,j};\ \frac{d\mu_{i,j}}{dt}=V_{i,j}\right)$ Будем подразумевать, что $\xi_{i,j}$; $\mu_{i,j}$ соответствуют $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$ в случае декартовых координат, и $R_{i,j}$ и $Z_{i,j}$ – в случае цилиндрических координат.

Лагранжиан сплошной среды декартовых и цилиндрических координатах имеет вид: (см.(8),§ 2)

$$\mathcal{L}=\iint\limits_{G(\alpha,\beta)}\rho\,\frac{D(\xi,\mu)}{\partial(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{2}(U^2+V^2)-\varepsilon\right]d\alpha\,d\beta \qquad (I)$$

а уравнение неразрывности принимает следующую форму:

$$\rho \frac{D(\xi,\mu)}{D(\alpha,\beta)} = \rho_0 (\alpha,\beta) \tag{2}$$

Полагая, что величины $\rho_{i,j}$, $\varepsilon_{i,j}$ имеют постоянное значение внутри каждой ячейки с номером (i,j), $\{(i,j)$ – левый нижний угол ячейки в пространстве индексов, см. рис.I$\}$, аппроксимируем Лагранжиан (I) и уравнения неразрывности (2), дискретными по пространству выражениями

$$L_h = \sum_{\substack{i=0\\ j=0}}^{N-1,\,M-1} \Big\{ \rho_{i,j} V_{i,j} \frac{1}{8} \big[u^2_{i,j} + u^2_{i+1,j} + u^2_{i+1,j+1} + u^2_{i,j+1} + v^2_{i,j} + v^2_{i+1,j} + v^2_{i+1,j+1} + v^2_{i,j+1} \big] - \rho_{i,j} V_{i,j} \varepsilon_{i,j} \Big\} \tag{I'}$$

$$\rho_{i,j} V_{i,j} = m_{i,j} = const \tag{2'}$$

где $V_{i,j}$ – объем (площадь) ячейки

$m_{i,j}$ – масса ячейки (i,j)

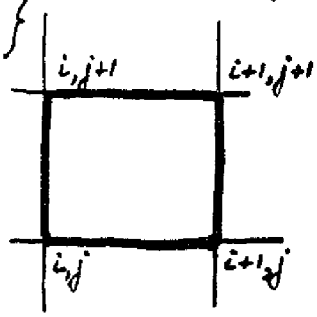

Рис.I.

Отметим, что разностный Лагранжиан (I$'$) аппроксимирует исходное выражение (I) с первым порядком точности по шагу пространственной сетки.

Требование равенства нулю первой вариации функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L_h \, dt \tag{3}$$

приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_{i,j}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \xi_{i,j}} = 0 & (4) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\mu}_{i,j}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \mu_{i,j}} = 0 & (5) \end{cases}$$

Входящие неявным образом в (4),(5) производные вида $\frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}}$; $\frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial \mu_{i,j}}$ определяются из (2′).

Подставляя в (4),(5) конкретное выражение L_h из (I′), получаем:

$$M_{i,j}\frac{dU_{i,j}}{dt}-\rho_{i,j}\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}}-\rho_{i-1,j}\frac{\partial V_{i-1,j}}{\partial \xi_{i,j}}-\rho_{i-1,j-1}\frac{\partial V_{i-1,j-1}}{\partial \xi_{i,j}}-\rho_{i,j-1}\frac{\partial V_{i,j-1}}{\partial \xi_{i,j}}=0 \qquad (4')$$

$$M_{i,j}\frac{dV_{i,j}}{dt}-\rho_{i,j}\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i,j}}-\rho_{i-1,j}\frac{\partial V_{i-1,j}}{\partial \mu_{i,j}}-\rho_{i-1,j-1}\frac{\partial V_{i-1,j-1}}{\partial \mu_{i,j}}-\rho_{i,j-1}\frac{\partial V_{i,j-1}}{\partial \mu_{i,j}} \qquad (5')$$

$$i=1,2,\ldots,N-1 \qquad j=1,2,\ldots,M-1$$

где

$$M_{i,j}=\frac{1}{4}\left(m_{i,j}+m_{i+1,j}+m_{i+1,j+1}+m_{i,j+1}\right)$$

$\rho_{i,j}$ – давление внутри ячейки

Уравнения (4),(5),(4′),(5′) справедливы только для внутренних точек области. Уравнения для граничных точек определяются в § 5.

П.2. Просуммируем (4) по множеству узлов $\omega:\{0<i1\leq i\leq i2\leq N;\ 0<j1\leq j\leq j2<M\}$. Получим

$$\sum_{i=i1,j=j1}^{i2,j2} M_{i,j}\frac{dU_{i,j}}{dt}-\sum_{i=i1}^{i2-1,j2-1}\rho_{i,j}\left\{\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}}+\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+1,j}}+\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+1,j+1}}+\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i,j+1}}\right\}=$$

$$=\sum_{j=j1}^{j2-1}\left\{\rho_{i1-1,j}\left[\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial \xi_{i1,j}}+\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial \xi_{i1,j+1}}\right]+\rho_{i2,j}\left[\frac{\partial V_{i2,j}}{\partial \xi_{i2,j}}+\frac{\partial V_{i2,j}}{\partial \xi_{i2,j+1}}\right]\right.+$$

$$+\sum_{i=i1}^{i2-1}\left\{\rho_{i,j1-1}\left[\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial \xi_{i,j}}+\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial \xi_{i+1,j1}}\right]+\rho_{i,j2}\left[\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial \xi_{i,j2}}+\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial \xi_{i+1,j2}}\right]\right\}+ \qquad (6)$$

$$+\rho_{i1-1,j1-1}\frac{\partial V_{i1-1,j1-1}}{\partial \xi_{i1,j1}}+\rho_{i1-1,j2}\frac{\partial V_{i1-1,j2}}{\partial \xi_{i1,j2}}+\rho_{i2,j2}\frac{\partial V_{i2,j2}}{\partial \xi_{i2,j2}}+\rho_{i2,j+1}\frac{\partial V_{i2,j1-1}}{\partial \xi_{i2,j1}}$$

Аналогичный результат получается и при суммировании (5).

Если выражение, отоящее в фигурных скобках в (6) равно нулю, то левая часть равенства (6) будет представлять ообой приращение количества движения для узлов, принадлежащих к множеству ω, в направлении ξ.

Правая часть (6) выражает суммарный импульс внешних сил давлени:, действующих на границу области ω.

Из последних замечаний следует:

Для того, чтобы уравнение (4) было консервативно [2], (т.е. чтобы изменение количества движения любого множества узлов ω в направлении ξ равнялось импульсу внешних сил) необходимо и достаточно, чтоб выполнялись равенства:

$$\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+1,j}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i+1,j+1}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \xi_{i,j+1}} = 0 \qquad (7)$$

Для консервативности уравнения (5'), соответственно, необходимо и достаточно выполнения системы равенств:

$$\frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i,j}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+1,j}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i+1,j+1}} + \frac{\partial V_{i,j}}{\partial \mu_{i,j+1}} = 0 \qquad (8)$$

Таким образом, вопрос о консервативности динамических уравнений в разных системах координат свелся к вопросу о свойствах объема ячеек в этих координатах, т.е. к чисто геометрическому вопросу.

П.3. Пусть задан Лагранжиан L_h в форме (I'), и U_{ij} U_{ij} – есть решения системы уравнений (2'),(4'),(5'). Тогда справедлив закон сохранения полной энергии в виде:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\substack{i=i1,\\ j=j1}}^{i2,j2}\frac{1}{2}M_{i,j}\left(v_{i,j}^2+u_{i,j}^2\right)+\sum_{i=i1,j=j1}^{i2-1,j2-1}m_{ij}\varepsilon_{i,j}\right\}=\sum_{j=j1}^{j2-1}\left\{P_{i1-1,j}\left(\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial\xi_{i1,j}}u_{i1,j}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial\mu_{i1,j}}v_{i1,j}+\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial\xi_{i1,j+1}}u_{i1,j+1}+\frac{\partial V_{i1-1,j}}{\partial\mu_{i1,j+1}}v_{i1,j+1}\right)+P_{i2,j}\left(\frac{\partial V_{i2,j}}{\partial\xi_{i2,j}}u_{i2,j}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V_{i2,j}}{\partial\xi_{i2,j+1}}u_{i2,j+1}+\frac{\partial V_{i2,j}}{\partial\mu_{i2,j+1}}v_{i2,j+1}\right)\right\}+\sum_{i=i1}^{i2-1}\left\{P_{i,j1-1}\left(\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial\xi_{i,j1}}u_{i,j1}+\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial\mu_{i,j1}}v_{i,j2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial\xi_{i+1,j1}}u_{i+1,j1}+\frac{\partial V_{i,j1-1}}{\partial\mu_{i+1,j1}}v_{i+1,j1}\right)+P_{i,j2}\left(\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial\xi_{i,j2}}u_{i,j2}+\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial\mu_{i,j2}}v_{i,j2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial\xi_{i+1,j2}}u_{i+1,j2}+\frac{\partial V_{i,j2}}{\partial\mu_{i+1,j2}}v_{i+1,j2}\right)\right\}+P_{i1-1,j1-1}\left(\frac{\partial V_{i1-1,j1-1}}{\partial\xi_{i1,j1}}u_{i1,j1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i1-1,j1-1}}{\partial\mu_{i1,j1}}v_{i1,j1}\right)+P_{i1-1,j2}\left(\frac{\partial V_{i1-1,j2}}{\partial\xi_{i1,j2}}u_{i1,j2}+\frac{\partial V_{i1-1,j2}}{\partial\mu_{i1,j2}}v_{i1,j2}\right)+$$

$$+P_{i2,j2}\left(\frac{\partial V_{i2,j2}}{\partial\xi_{i2,j2}}u_{i2,j2}+\frac{\partial V_{i2,j2}}{\partial\mu_{i2,j2}}v_{i2,j2}\right)+P_{i2,j1-1}\left(\frac{\partial V_{i2,j1-1}}{\partial\xi_{i2,j1}}u_{i2,j1}+\frac{\partial V_{i2,j1-1}}{\partial\mu_{i2,j1}}v_{i2,j1}\right) \tag{9}$$

$$(0<i\le i\le i2<N;\qquad 0<j1\le j\le j2<M)$$

По аналогии с одномерным случаем рассмотрим выражение

$$\tilde{L}=\sum_{i=i1,j=j1}^{i2-1,j2-1}\left\{\frac{m_{ij}}{8}\left[\dot{\xi}_{i,j}^2+\dot{\xi}_{i+1,j}^2+\dot{\xi}_{i+1,j+1}^2+\dot{\xi}_{i,j+1}^2+\dot{\mu}_{i,j}^2+\dot{\mu}_{i+1,j}^2+\dot{\mu}_{i+1,j+1}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\dot{\mu}_{i,j+1}^2\right]-m_{i,j}\varepsilon_{i,j}\right\} \tag{10}$$

Поскольку $\tilde{L}$ не зависит явно от времени, имеем:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt}=\sum_{i=i1,j=j1}^{i2,j2}\left\{\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\xi_{i,j}}\dot{\xi}_{i,j}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\xi}_{i,j}}\ddot{\xi}_{i,j}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mu}_{i,j}}\ddot{\mu}_{i,j}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mu_{i,j}}\dot{\mu}_{i,j}\right\} \tag{11}$$

Выражая для внутренних точек области ω производные $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\xi_{i,j}}$; $\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mu_{i,j}}$ из (4),(5), получим

$$\frac{d\tilde{L}}{dt}=\sum_{j+1,i+1}^{i2-1,j2-1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\xi}_{ij}}\dot{\xi}_{ij}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mu}_{ij}}\dot{\mu}_{ij}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i,j\in\Gamma_{p\omega}}\left\{\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\xi}_{ij}}\ddot{\xi}_{ij}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\xi_{ij}}\dot{\xi}_{ij}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mu}_{ij}}\ddot{\mu}_{ij}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mu_{ij}}\dot{\mu}_{ij}\right\} \qquad (12)$$

Здесь вторая сумма берется по граничным точкам области
Умножим уравнение (4') на $\dot{\xi}_{ij}$, а (5') – на $\dot{\mu}_{ij}$, просуммируем полученные выражения по всем граничным точкам и прибавим к правой части (12).

Раскрывая затем производные $\frac{\partial L}{\partial\xi_{ij}}$; $\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_{ij}}$; $\frac{\partial L}{\partial\mu_{ij}}$; $\frac{\partial L}{\partial\dot{\mu}_{ij}}$, подобно тому, как это делалось в П.1, после соответствующих алгебраических преобразований, приходим к формуле (9).

П.4. Найдем уравнение, описывающее изменение удельной внутренней энергии ε_{ij}.

Раскроем фигурные скобки в левой части формулы (9), и подставим вместо $M_{ij}\ddot{\xi}_{ij}$ и $M_{ij}\ddot{\mu}_{ij}$ их выражения из (4') и (5'). После громоздких, но несложных алгебраических преобразований, получаем:

$$m_{ij}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=-P_{ij}\left\{\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{ij}}u_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{i+1,j}}u_{i+1,j}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{i+1,j+1}}u_{i+1,j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\xi_{i,j+1}}u_{i,j+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{ij}}v_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{i+1,j}}v_{i+1,j}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{i+1,j+1}}v_{i+1,j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_{i,j+1}}v_{i,j+1}\right\}=-P_{ij}\frac{dV_{ij}}{dt} \qquad (13)$$

или, что то же самое

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=P_{ij}\cdot\frac{1}{\rho_{ij}^{2}}\frac{d\rho_{ij}}{dt} \qquad (13')$$

Уравнение (13) показывает, что изменение удельной внутренней энергии ячеек происходит адиабатически, откуда следует принципиальная невозможность (без введения искусственной вязкости) приближенного

описания системой (2),(5^{i}),($4^{'}$),(I3) течений с ударными волнами, поскольку движение ударной волны должно сопровождаться изменением энтропии.

П.5. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника на плоскости (X,У) может быть представлена в виде суммы площадей какой-либо пары треугольников, на которые четырехугольник может быть разбит. Находя площади треугольников по известным формулам аналитической геометрии, получаем:

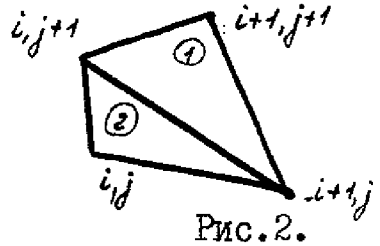

Рис.2.

А – представление (рис.2)

$$ {}_{A}V_{i,j} = S^{TP}_{①} + S^{TP}_{②} = \frac{1}{2}\left[x_{i+1,j}\left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}\right) + x_{i+1,j+1}\left(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}\right) + x_{i,j+1}\left(y_{i+1,j} - y_{i+1,j+1}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[x_{i+1,j}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right) + x_{i,j+1}\left(y_{i,j} - y_{i+1,j}\right) + x_{i,j}\left(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}\right)\right] \qquad (I4) $$

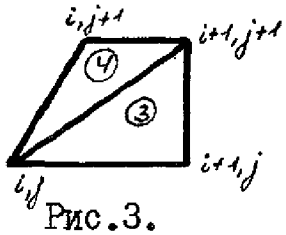

Рис.3.

Б – представление (рис.3)

$$ {}_{Б}V_{i,j} = S^{TP}_{③} + S^{TP}_{④} = \frac{1}{2}\left[x_{i+1,j}\left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j}\right) + x_{i+1,j+1}\left(y_{i,j} - y_{i+1,j}\right) + x_{i,j}\left(y_{i+1,j} - y_{i+1,j+1}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[x_{i+1,j+1}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right) + x_{i,j+1}\left(y_{i,j} - y_{i+1,j+1}\right) + x_{i,j}\left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}\right)\right] \qquad (I4^{'}) $$

где $S^{TP}_{①}$, $S^{TP}_{②}$, $S^{TP}_{③}$, $S^{TP}_{④}$ – площади соответствующих треугольников.

При переходе к координатам (R, z) четырехугольники превращаются в торы с четырехугольным сечением. Согласно известной теореме интегрального исчисления (теореме Гюльдена) объем тела, описываемого плоской фигурой при ее вращении около оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади

фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести этой площади.

При нормировке на один радиан, вместо длины окружности следует брать радиус. С учетом последнего замечания, получаем

А – представление (рис.2)

$$
{}_A V_{i,j} = \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i+1,j+1} + R_{i,j+1}\right) S^{TP}_{①} + \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i,j+1} + R_{i,j}\right) S^{TP}_{②} =
$$

$$
= \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i+1,j+1} + R_{i,j+1}\right) \frac{1}{2}\left[R_{i+1,j}\left(z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1}\right) + R_{i+1,j+1}\left(z_{i,j+1} - z_{i+1,j}\right) + R_{i,j+1} * \right.
$$

$$
\left. \times \left(z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}\right)\right] + \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i,j+1} + R_{i,j}\right) \frac{1}{2}\left[R_{i+1,j}\left(z_{i,j+1} - z_{i,j}\right) + R_{i,j+1} \times \right. \quad (15)
$$

$$
\left. \times \left(z_{i,j} - z_{i+1,j}\right) + R_{i,j}\left(z_{i+1,j} - z_{i,j+1}\right)\right]
$$

Б–предотавление (рис.3)

$$
{}_Б V = \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i+1,j+1} + R_{i,j}\right) S_{③} + \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j+1} + R_{i,j+1} + R_{i,j}\right) S_{④} =
$$

$$
= \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j} + R_{i+1,j+1} + R_{i,j}\right) \frac{1}{2}\left[R_{i+1,j}\left(z_{i+1,j+1} - z_{i,j}\right) + R_{i+1,j+1}\left(z_{i,j} - z_{i+1,j}\right) + \right.
$$

$$
\left. + R_{i,j}\left(z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}\right)\right] + \frac{1}{3}\left(R_{i+1,j+1} + R_{i,j+1} + R_{i,j}\right) \frac{1}{2}\left[R_{i+1,j+1} * \right.
$$

$$
\left. \times \left(z_{i,j+1} - z_{i,j}\right) + R_{i,j+1}\left(z_{i,j} - z_{i+1,j+1}\right) + R_{i,j}\left(z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1}\right)\right] \quad (15')
$$

Очевидно, что ${}_A V_{i,j} = {}_Б V_{i,j} = V_{i,j}$, и что производные от представлений А и Б по координатам узлов равны между собой. В дальнейшем, при расписывании производных в уравнениях (4′),(5′) будем выбирать то представление, которое дает менее громоздкие формулы.

П.6. Исследуем свойства системы уравнений (4′),(5′) в декартовых координатах. Подставляя вместо $V_{i,j}$ одно из представлений

(I4),(I4'), получим

$$2M_{i,j}\frac{dU_{i,j}}{dt}+P_{i,j}(y_{i,j+1}-y_{i+1,j})+P_{i-1,j}(y_{i-1,j}-y_{i,j+1})+$$
$$+P_{i-1,j-1}(y_{i,j-1}-y_{i-1,j})+P_{i,j-1}(y_{i+1,j}-y_{i,j-1})=0. \qquad (I8)$$

$$2M_{i,j}\frac{dV_{i,j}}{dt}-P_{i,j}(x_{i,j+1}-x_{i+1,j})-P_{i-1,j}(x_{i-1,j}-x_{i,j+1})-$$
$$-P_{i-1,j-1}(x_{i,j-1}-x_{i-1,j})-P_{i,j-1}(x_{i+1,j}-x_{i,j-1})=0 \qquad (I9)$$

Уравнения (I8),(I9) консервативны. Действительно, непосредственным вычислением можно убедиться в том, что

$$\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial x_{i,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial x_{i+1,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial x_{i+1,j+1}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial x_{i,j+1}}=0$$

$$\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial y_{i,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial y_{i+1,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial y_{i+1,j+1}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial y_{i,j+1}}=0$$

что согласно (7),(8) и означает консервативность.

Подставляя в (4'),(5') вместо $V_{i,j}$ какую-либо из формул (I5),(I5), получаем динамические уравнения в цилиндрической системе координат (R,Z):

$$M_{i,j}\frac{d^2R}{dt^2}+P_{i,j}\left[\frac{1}{6}(R_{i+1,j}+R_{i,j+1}+R_{i,j})(Z_{i,j+1}-Z_{i+1,j})-\frac{1}{3}S^{TP}_{①}\right]+$$
$$+P_{i-1,j}\left[\frac{1}{6}(R_{i,j+1}+R_{i-1,j}+R_{i,j})(Z_{i-1,j}-Z_{i,j+1})-\frac{1}{3}S^{TP}_{②}\right]+$$
$$+P_{i-1,j-1}\left[\frac{1}{6}(R_{i-1,j}+R_{i,j-1}+R_{i,j})(Z_{i,j-1}-Z_{i-1,j})-\frac{1}{3}S^{TP}_{③}\right]+ \qquad (20)$$
$$+P_{i,j-1}\left[\frac{1}{6}(R_{i+1,j}+R_{i,j}+R_{i,j-1})(Z_{i+1,j}-Z_{i,j-1})-\frac{1}{3}S^{TP}_{④}\right]=0$$

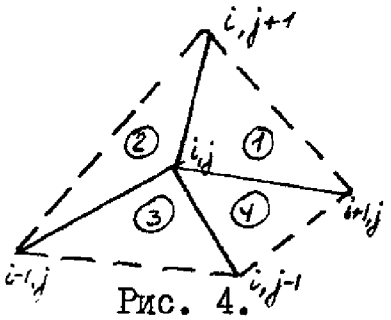

Рис. 4.

$$M_{i,j}\frac{d^2z}{dt^2}-P_{i,j}\frac{1}{6}(R_{i+1,j}+R_{i,j+1}+R_{i,j})(R_{i,j+1}-R_{i+1,j})-$$

$$-P_{i-1,j}\frac{1}{6}(R_{i,j+1}+R_{i-1,j}+R_{i,j})(R_{i-1,j}-R_{i,j-1})-$$

$$-P_{i-1,j-1}\frac{1}{6}(R_{i,j-1}+R_{i-1,j}+R_{i,j})(R_{i,j-1}-R_{i-1,j})-$$

$$-P_{i,j-1}\frac{1}{6}(R_{i,j-1}+R_{i+1,j}+R_{i,j})(R_{i+1,j}-R_{i,j-1})=0$$

Здесь $S^{TP}_{①}$; $S^{TP}_{②}$; $S^{TP}_{③}$; $S^{TP}_{④}$ – площади соответствующих рис. 4 треугольников.

<u>Уравнение (21) консервативно.</u>

Действительно, можно проверить, что:

$$\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial z_{i,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial z_{i+1,j}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial z_{i+1,j+1}}+\frac{\partial_A V_{i,j}}{\partial z_{i,j+1}}=0$$

откуда в силу (7),(8), и следует консервативность.

Подставляя в уравнение (6) $R_{i,j}$ вместо $\xi_{i,j}$, и заменяя V_{ij} каким-либо из выражений (15),(15'), получаем:

$$\sum_{\substack{i=i_1\\ j=j_1}}^{i_2,j_2} M_{i,j}\frac{d^2R_{ij}}{dt^2}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=i_1\\ j=j_1}}^{i_2-1,j_2-1} P_{i,j}\left[(R_{i+1,j}-R_{i,j+1})(z_{i+1,j}-z_{i,j})+\right. \tag{22}$$

$$\left.+(R_{i+1,j+1}-R_{i,j})(z_{i,j+1}-z_{i+1,j})\right]=\text{Импульс внешних сил}$$

Отметим, что $\frac{1}{2}\left[(R_{i+1,j}-R_{i,j+1})(z_{i+1,j+1}-z_{i,j})+(R_{i+1,j+1}-R_{i,j})(z_{i,j+1}-z_{i+1,j})\right]$ – площадь четырехугольника с вершинами $(i+1,j),(i+1,j+1)(i,j+1)(i,j)$

П.7. Заменим область изменения переменной t дискретным набором точек t_n $(n=0,1,\dots k)$. Величины $U^n_{i,j}$; $V^n_{i,j}$; $\rho^n_{i,j}$; $\varepsilon^n_{i,j}$; $P^n_{i,j}$

будем относить к моменту времени t_n. Заменяя в уравнениях (4′), (5′) производные по t разностями, и учитывая уравнения неразрывности (2′) и уравнения состояния, получаем замкнутую 5-и параметрическую систему разностных уравнений:

$$M_{ij}\frac{U_{ij}^{n+1}-U_{ij}^{n}}{\tau_n}-P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-P_{i-1j}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}-P_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}=0 \quad (23)$$

$$M_{ij}\frac{V_{ij}^{n+1}-V_{ij}^{n}}{\tau_n}-P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-P_{i-1j}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-P_{i-1j-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{i-1j-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{ij}}-P_{ij-1}^{(\sigma_1)}\frac{\partial V_{ij-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{ij}}=0 \quad (24)$$

$$m_{ij}\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n}=-P_{ij}^{(\sigma_1)}\Big\{\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{ij}}U_{ij}^{(\sigma_4)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{ij}}V_{ij}^{(\sigma_4)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{i+1j}}U_{i+1j}^{(\sigma_4)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{i+1j}}V_{i+1j}^{(\sigma_4)}+$$

$$+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \xi_{i+1j+1}}U_{i+1j+1}^{(\sigma_4)}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{i+1j+1}}V_{i+1j+1}^{(\sigma_4)}+\frac{\partial V^{(\sigma_3)(\sigma_4)}}{\partial \xi_{ij+1}}U_{ij+1}+\frac{\partial V_{ij}^{(\sigma_3)}}{\partial \mu_{ij+1}}V_{ij+1}^{(\sigma_4)}\Big\} \quad (25)$$

$$\rho_{ij}^{n}V_{ij}^{n}=m_{ij} \quad (26)$$

$$\frac{\xi_{ij}^{n+1}-\xi_{ij}^{n}}{\tau_n}=U_{ij}^{(\sigma_5)} \quad (27)$$

$$\frac{\mu_{ij}^{n+1}-\mu_{ij}^{n}}{\tau_n}=V_{ij}^{(\sigma_5)} \quad (28)$$

Здесь $\tau_n=t_{n+1}-t_n$; $P_{ij}^{n}=P(\rho_{ij}^{n},\varepsilon_{ij}^{n})$; $\sigma_k\in[0,1]$; $k=1,\dots,5$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что уравнение баланса удельной внутренней энергии (25), при $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_5=0.5$ имеет следующие алгебраически эквивалентные (25) формы:

$$m_{ij}=\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n}=-P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{V_{ij}^{n+1}-V_{ij}^{n}}{\tau_n} \quad (25')$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{n+1}-\varepsilon_{ij}^{n}}{\tau_n}=P_{ij}^{(\sigma_1)}\frac{1}{\rho_{ij}^{n+1}\rho_{ij}^{n}}\left(\frac{\rho_{ij}^{n+1}-\rho_{ij}^{n}}{\tau_n}\right) \quad (25'')$$

В декартовых координатах уравнения (23),(24) консервативны. В цилиндрических координатах консервативно только-только уравнение (24).

Система разностных уравнений (23)–(28) при $\sigma_4=0.5$; $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_5=0.5$ (σ_1 – произвольны) обладает свойством полной консервативности, т.е.

$$\frac{1}{\tau_n}\left\{\sum_{\substack{i=i1\\ j=j1}}^{i2\,j2} M_{i,j}\left[\frac{(U_{i,j}^{n+1})^2-(U_{i,j}^{n})^2-(V_{i,j}^{n+1})^2-(V_{i,j}^{n})^2}{2}\right]+\sum_{\substack{i=i1\\ j=j1}}^{i2-1,j2-1} m_{i,j}\left(\varepsilon_{i,j}^{n+1}-\varepsilon_{i,j}^{n}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{j=j1}^{j2-1}\left\{P_{i1-1,j}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i1-1,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i1,j}} U_{i1,j}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i1-1,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i1,j}} V_{i1,j}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i1,j+1}} U_{i1,j+1}^{(0.5)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i1,j+1}} V_{i1,j+1}^{(0.5)}\right]+P_{i2,j}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i2,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i2,j}} U_{i2,j}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i2,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i2,j}} V_{i2,j}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i2,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i2,j+1}} U_{i2,j+1}^{(0.5)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V_{i2,j}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i2,j+1}} V_{i2,j+1}^{(0.5)}\right]\right\}+\sum_{i=i1}^{i2-1}\left\{P_{i,j1-1}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i,j1}} U_{i,j1}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i,j1}} V_{i,j1}^{(0.5)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i1,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i+1,j2}} U_{i+1,j1}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i+1,j1}} V_{i1,j1}^{(0.5)}\right]+P_{i,j2}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i,j2}} U_{i,j2}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i,j2}} V_{i,j2}^{(0.5)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V_{i,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i+1,j2}} U_{i+1,j2}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i+1,j2}} V_{i+1,j2}^{(0.5)}\right]\right\}+P_{i1-1,j1-1}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i1-1,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i1,j1}} U_{i1,j1}^{(0.5)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{i1-1,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i1,j1}} V_{i1,j1}^{(0.5)}\right]+P_{i2,j1-1}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i2,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i2,j1}} U_{i2,j1}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i2,j1-1}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i2,j1}} V_{i2,j1}^{(0.5)}\right]+$$

$$+P_{i1-1,j2}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i1-1,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i1,j2}} U_{i1,j2}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i1-1,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i1,j2}} V_{i1,j2}^{(0.5)}\right]+$$

$$+P_{i2,j2}^{(\sigma_1)}\left[\frac{\partial V_{i2,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \xi_{i2,j2}} U_{i2,j2}^{(0.5)}+\frac{\partial V_{i2,j2}^{(\sigma_2)}}{\partial \mu_{i2,j2}} V_{i2,j2}^{(0.5)}\right] \qquad (29)$$

Действительно, умножим уравнение (23) на $\frac{U_{ij}^{n+1}+U_{ij}^{n}}{2}$, а уравнение (24) – на $\frac{V_{ij}^{n+1}-V_{ij}^{n}}{2}$. Сложив полученные выражения с (25), после несложных алгебраических преобразований, получаем (29).

II.10. В п.4 было отмечено, что система дифференциально-разностных уравнений (4′),(5′),(13) непригодна для приближенного описания течений с ударными волнами (УВ). Это сильное ограничение на класс моделируемых задач может быть снято введением в (4′),(5′), (13) эффективного диссипативного процесса, который бы приводил к увеличению энтропии за фронтом УВ. Наиболее часто используемым для этих целей диссипативным механизмом является псевдовязкость [3]. От последней естественно требовать, чтобы она не нарушала консервативности уравнений (4′),(5′),(13), т.е. чтобы ее можно было записать как некую добавку $g_{i,j}$ к давлению $P_{i,j}$ в ячейке (i,j):

Возьмем эту добавку в виде:

$$g_{i,j}=\varkappa C_{ij}^{2}\frac{\rho_{ij}}{V_{ij}}\Big\{\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{ij}}U_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{ij}}V_{ij}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1,j}}U_{i+1,j}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1,j}}V_{i+1,j}+$$
$$+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i+1,j+1}}U_{i+1,j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i+1,j+1}}V_{i+1,j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \xi_{i,j+1}}U_{i,j+1}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mu_{i,j+1}}V_{i,j+1}\Big\}=\varkappa C_{ij}^{2}\frac{\rho_{ij}}{V_{ij}}\frac{dV_{ij}}{dt} \qquad (30)$$

При переходе от (4′),(5′),(13) к системе разностных уравнений (23)–(28), искусственную вязкость возьмем в виде:

$$g_{ij}^{n}=\varkappa^{4}(C_{ij}^{n})^{2}\frac{\rho_{ij}^{n}}{V_{ij}^{n}}\Big\{\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \xi_{ij}}U_{ij}^{n}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \xi_{i+1,j}}U_{i+1,j}^{n}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \xi_{i+1,j+1}}U_{i+1,j+1}^{n}+$$
$$+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \xi_{i,j+1}}U_{i,j+1}^{n}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \mu_{ij}}V_{ij}^{n}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \mu_{i+1,j}}V_{i+1,j}^{n}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \mu_{i+1,j+1}}V_{i+1,j+1}+\frac{\partial V_{ij}^{n}}{\partial \mu_{i,j+1}}V_{i,j+1} \qquad (30')$$

Не имея возможности (вследствие ограниченности объема) в рамках данной работы подробно остановиться на свойствах искусственной вязкости в форме (30′), и связанных с ней вопросах устойчивости

разностных схем (23)-(28). Отметим, что такая вязкость не приводит к искажению формы нормальных колебаний линеаризованной системы (4'),(5'),(13).

В численных расчетах величина $\varkappa$ определялась из условия наибыстрейшего затухания самого высокочастотного нормального колебания.

§ 5. Граничные условия

Ниже, в качестве примера, будут рассмотрены два часто встречающихся типа граничных условий:

а) Условие на свободной границе с внешним противодавлением $p^{вн}$.

б) Условие на прямолинейной неподвижной границе "жидкость-твердое тело" (условие непротекания) при отсутствии трения.

П.I. Если величину M_{ij} в уравнениях (4'),(5') предыдущего параграфа интерпретировать как массу (i,j) -го узла, то эти уравнения для внутренних точек области могут быть истолкованы следующим образом: изменение составляющей количества движения узла равняется соответствующей составляющей импульса сил давления со стороны прилегающих к этому узлу ячеек. Эти же уравнения, записанные для граничных точек, будут давать закон изменения импульса граничных узлов вследствие импульса сил давления только со стороны жидкости. Чтобы получить полные уравнения движения граничных точек, следует так же учесть и импульс сил внешнего давления.

Предположим, что сила внешнего давления постоянна на каждом отрезке границы от одного узла до другого, и рассмотрим, для определенности границу, состоящую из узлов $(0,j):\{j=1,2,\ldots,M-1\}$

Динамические уравнения для точек этой границы с учетом импульса внешних сил, запишутся в виде:

Декартовы координаты

$$2M_{0,j}\frac{dU_{0,j}}{dt}+P_{0,j}(y_{0,j+1}-y_{1,j})+P^{вн}_{0,j}(y_{0,j}-y_{0,j+1})+ \\ +P^{вн}_{0,j-1}(y_{0,j-1}-y_{0,j})+P_{0,j-1}(y_{1,j}-y_{0,j-1})=0 \qquad (1)$$

$$2M_{0,j}\frac{dV_{0,j}}{dt}-P_{0,j}(x_{0,j+1}-x_{1,j})-P^{вн}_{0,j}(x_{0,j}-x_{0,j+1})+ \\ +P^{вн}_{0,j-1}(x_{0,j-1}-x_{0,j})+P_{0,j-1}(x_{1,j}-x_{0,j-1})=0 \qquad (2)$$

Цилиндрические координаты

$$M_{0,j}\frac{dU_{0,j}}{dt}+P_{0,j}\left[\frac{1}{6}(R_{1,j}+R_{0,j+1}+R_{0,j})(Z_{0,j+1}-Z_{1,j})-\frac{1}{3}S^{тр}_{①}\right]+ \\ +P^{вн}_{0,j}\left[\frac{1}{6}(R_{0,j+1}+R_{0,j}+R_{0,j})(Z_{0,j}-Z_{0,j+1})\right]+P^{вн}_{0,j-1}\left[\frac{1}{6}(R_{0,j-1}+R_{0,j}+R_{0,j}) \\ (Z_{0,j-1}-Z_{0,j})\right]+P_{0,j-1}\left[\frac{1}{6}(R_{0,j-1}+R_{1,j}+R_{0,j})(Z_{1,j}-Z_{0,j-1})- \\ -\frac{1}{3}S^{тр}_{②}\right]=0 \qquad (3)$$

$$M_{0,j}\frac{dU_{0,j}}{dt}-P_{0,j}\frac{1}{6}(R_{1,j}+R_{0,j+1}+R_{0,j})(R_{0,j+1}-R_{1,j})-P^{вн}_{0,j}\times \\ \times\frac{1}{6}(R_{0,j+1}+2R_{0,j})(R_{0,j}-R_{0,j+1})-P^{вн}_{0,j-1}\frac{1}{6}(R_{0,j-1}+2R_{0,j})\times \\ \times(R_{0,j-1}-R_{0,j})-P_{0,j-1}\frac{1}{6}(R_{0,j-1}+R_{1,j}+R_{0,j})\times \qquad (4) \\ \times(R_{1,j}-R_{0,j-1})=0$$

Здесь, как и в уравнении ((20),§ 4). $S^{тр}_{①}$ и $S^{тр}_{④}$ – площади соответствующих рис. 4 треугольников.

Не составляет труда получить уравнения для граничных точек и на других участках границы, а также в угловых точках.

Если все границы среды являются свободными, то суммирование уравнения движения ((I8),§ 4) по всем внутренним точкам и граничных условий по всем границам, приведет к закону сохранения импульса: изменение количества движения ореды равно X-овой составляющей импульса внешних сил. Аналогичным образом можно убедиться в консервативности уравнений ((I9),(2I),§ 4) с учетом ссответствующих граничных условий.

При переходе к разностной системе уравнений ((23)-(28),§ 4), способ составления уравнений для граничных точек не претерпевает никаких изменений.

П.2. Условие непротекания жидкости сквозь неподвижную, прямолинейную границу, эквивалентно требованию равенства нулю нормальной составляющей скорости во все моменты времени, т.е. эквивалентно введению в систему ((4),(5),§ 4) неголомных связей.

При переходе от системы ((4),(5),§ 4) к оистеме разностных уравнений ((23)-(28),§ 4) добиться соблюдения разностного аналога таких связей можно следующим образом:

Делается шаг по времени в предположении, что граница является свободной (величина противодавления не имеет значения, в расчетах она бралась равной нулю). Получающиеся скорооти граничных узлов раскладываются на тенгенциальную и нормальную сопоставляющие, последняя из которых зануляется. Находя разложение оставшейся тангенциальной составляющей по осям координат, получаем начальные условия по скорости для следующего шага по времени и т.д.

§ 6. Алгоритмы решения разностных уравнений

В этом параграфе описываются алгоритмы решения системы разностных уравнений ((23)-(28, § 4) , как явных, так и неявных по давлению. В последнем случае решения приходится искать итерациями. Показывается возможность применения схем, неявных по давлению, для моделирования течений несжимаемой жидкости.

П.I. Система разностных уравнений ((23)-(28), § 4) с учетом искусственной вязкости в виде ((30'), § 4) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ($\sigma_4; \sigma_5 \in [0,1]$) может быть решена явным спооообом.

Действительно, пусть на временном слое t_n известны величины $\xi^n_{i,j}; \mu^n_{i,j}; u^n_{i,j}; v^n_{i,j}; \rho^n_{i,j}; \varepsilon^n_{i,j}$. Вычисляя $P^n_{i,j} = P(\rho^n_{i,j}; \varepsilon^n_{i,j}) + q^n_{i,j}$, из ((23), (24), § 4) находим $u^n_{i,j}$ и $v^n_{i,j}$. Уравнение ((25), § 4) по уже известным величинам в правой части, позволяет определить $\varepsilon^n_{i,j}$. Находя по формулам ((27), (28), § 4) новые координаты $\xi^n_{i,j}; \mu^{n+1}_{i,j}$ завершаем цикл вычислений нахождением из ((26), § 4) величин $\rho^{n+1}_{i,j}$. Таким образом, переход с временного слоя t_n на слой t_{n+1} завершен. Повторяя вышеизложенную процедуру необходимое число раз, определяем значения величин $\xi_{i,j}; \mu_{i,j}; u_{i,j}; \rho_{i,j}; \varepsilon_{i,j}$ во все интересующие нас моменты времени t_n .

П.2. В том случае, когда $\sigma_1 \neq 0$ (или $\sigma_2 \neq 0$); систему уравнений ((23)-(28), § 4) приходится решать итерациями. Описание итерационного процесса в общем случае: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\varkappa \neq 0$ весьма громоздко, поэтому в рамках данной работы мы разберем только частный случай, когда $\sigma_1 = 1$; $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \varkappa = 0$ Этот случай интересен тем, что из линейного анализа устойчивости следует, что разностная схема ((23)-(28), § 4) при вышеприведенных значениях параметров безусловно устойчива.

Пусть в момент t_n заданы величины $\xi^n_{i,j}$; $\mu^n_{i,j}$; $u^n_{i,j}$; $v^n_{i,j}$; $\rho^n_{i,j}$; $\varepsilon^n_{i,j}$. Решить нелинейную систему ((23)-(28), § 4) на n-ом шаге по времени - это значит подобрать такие значения давлений $\hat{P}_{i,j}$, чтобы они, будучи подставленн в уравнения ((23)-(25), § 4) привели бы к таким значениям величин $\rho^{n+1}_{i,j}$; $\varepsilon^{n+1}_{i,j}$, что $\hat{P}_{i,j} = P(\rho^{n+1}_{i,j}; \varepsilon^{n+1}_{i,j})$. Величины $\hat{P}_{i,j}$ будем определять итерациями. Обозначим через ${}^{(k)}\hat{P}_{i,j}$ к-тое приближение к $\hat{P}_{i,j}$. В качестве начального приближения возьмем ${}^{(0)}\hat{P}_{i,j} = P^n_{i,j}$. Подставляя ${}^{(0)}\hat{P}_{i,j}$ в уравнения ((23)-(28), § 4) вместо P^{n+1}_i, определим соответствующие им значения величин ${}^{(0)}\tilde{\rho}^{n+1}_{i,j}$; ${}^{(0)}\tilde{\varepsilon}^{n+1}_{i,j}$ и ${}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j} = P({}^{(0)}\tilde{\rho}^{n+1}_{i,j}; {}^{(0)}\tilde{\varepsilon}^{n+1}_{i,j})$ Вообще говоря, окажется, что $\hat{P}_{i,j} \neq {}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$. Пусть $\| {}^{(0)}\hat{P}_{i,j} - {}^{(0)}\tilde{P}^{n+2}_{i,j} \| = \varepsilon_0$. Далее, по величинам ${}^{(0)}\hat{P}_{i,j}$ и ${}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$ мы должны некоторым образом получить следующее приближение ${}^{(1)}\hat{P}_{i,j} = f^1_{i,j}({}^{(0)}\hat{P}_{i,j}; {}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j})$, такое чтобы $\| {}^{(1)}\hat{P}_{i,j} - {}^{(1)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j} \| = \varepsilon_1 < \varepsilon_0$.

Таким образом, если у нас есть К-ое приближение ${}^{(k)}\hat{P}_{i,j}$, то нам нужно определить из ((23-(28), § 4) ${}^{(k)}\tilde{P}^{n+1} = P({}^{(k)}\tilde{\rho}^{n+1}_{i,j}; {}^{(k)}\tilde{\varepsilon}^{n+1}_{i,j})$ и по значениям уже известных величин ${}^{(k)}\hat{P}_{i,j}$; ${}^{(k-1)}\hat{P}_{i,j}$; ${}^{(0)}\hat{P}_{i,j}$; ${}^{(k)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$; ${}^{(k-1)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$; ... ${}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$ "сконструировать" новое приближение ${}^{(k+1)}\hat{P}_{i,j} = f^{(k)}_{i,j}({}^{(k)}\hat{P}_{i,j}; {}^{(k-1)}\hat{P}_{i,j}; \ldots; {}^{(0)}\hat{P}_{i,j}; {}^{(k)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}; \ldots; {}^{(0)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j})$, такое чтобы $\| {}^{(k+1)}\hat{P} - {}^{(k+1)}\tilde{P}^{n+1} \| < \| {}^{(k)}\hat{P}^{n} - {}^{(k)}\tilde{P}^{n} \|$. Наиболее существенным моментом в вышеописанном алгоритме является выбор функций $f^k_{i,j}$.

Мы остановились на простейшем варианте алгоритма, в котором в качестве $f^k_{i,j}$ брались линейные функции, зависящие только от ${}^{(k)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j}$ и ${}^{(k)}\hat{P}_{i,j}$, т.е.

$$ {}^{(k+1)}\hat{P}_{i,j} = {}^{(k)}\hat{P}_{i,j} + \omega_{i,j}\left({}^{(k)}\tilde{P}^{n+1}_{i,j} - {}^{(k)}\hat{P}_{i,j}\right) \qquad \text{(I)} $$

Численные значения $\omega_{i,j}$ находятся из условия устойчивости ите-

рационного процесса на предполагаемом решении.

Найдем эти условия.

Предположим, что решение системы уравнений ((23)-(28), § 4) существует. Если взять в качестве ${}^{(0)}\hat{P}_{ij}$ точное решение P_{ij}^{n+1}, и возмутить его в ячейке с номером (i_1, j_1) на малую величину $\delta\hat{P}_{i_1j_1}$, то ${}^{(0)}\hat{P}_{i_1,j_1}^{n+1}$ будет отличаться от P_{i_1,j_1}^{n+1} на какую-то другую величину $\delta P_{i_1,j_1}$.

Вычисляя следующее приближение по формуле (I) получаем:

$$ {}^{(1)}\hat{P}_{i_1,j_1} = P_{i_1,j_1}^{n+1} + \omega_{ij}\left(P_{i_1,j_1}^{n+1} + \delta\hat{P}_{i_1,j_1} - P_{i_1,j_1}^{n+1} - \delta P_{i_1,j_1}\right) $$

или

$$ {}^{(0)}\hat{P}_{i_1,j_1} - P_{i_1,j_1}^{n+1} = \omega_{i_1,j_1}\left(\delta\hat{P}_{i_1,j_1} - \delta P_{i_1,j_1}\right) $$

Очевидно, что для устойчивости алгоритма необходимо, чтобы

$$ \left| {}^{(0)}\hat{P}_{i_1,j_1} - P_{i_1,j_1}^{n+1} \right| \le \left| \delta\hat{P}_{i_1,j_1} \right| \qquad (2) $$

Выражая $\delta P_{i_1,j_1}$ через $\delta\hat{P}_{ij}$ из уравнений ((23)-(28), § 4) с то точностью до величин второго порядка малости по $\delta\hat{P}_{i_1,j_1}$, из условия (2) находим ограничения на величины ω_{ij}, которые и представляют собой необходимые условия сходимости итерационного процесса. Один из возможных конкретных видов формулы (I) приводится, например, в [7].

П.3. Система разностных уравнений ((23)-(28), § 4) может быть использована для описания течений несжимаемой, невязкой жидкости, если в качестве уравнения состояния принять

$P_{ij}^{n} = A(\rho_{ij}^{n} - \rho_0)$, где A -достаточно большая величина, а ρ_0 - плотность жидкости.

Действительно, несжимаемая среда характеризуется бесконечно

большой скоростью распространения звуковых сигналов. Если же брать скорость звука не бесконечной, но достаточно большой величиной ($A = C_T^2$ – квадрат изотермической скорости звука), то такое приближение будет описывать несжимаемую среду с хорошей точностью

При расчете по явным схемам, большая скорость звука и условие устойчивости, налагают сильное ограничение на величину шага по времени τ_n :($\tau_n \sim 1/C_T$), что приводит к тому, что просчет поведения жидкости на достаточно больших временных интервалах становится очень трудоемким.

Безусловная устойчивость уравнений ((23)-(28), § 4) при $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \varkappa_{i,j} \equiv 0$, позволяет снять ограничения на величину · , что делает возможным решение физически интересных задач за приемлимое время.

§ 7. Примеры численных расчетов

В данном параграфе приводятся модельные расчеты, иллюстрирующие возможности разностной методики, предотавляемой уравнениями ((23)-(28), § 4) . При описании этих расчетов в численные значения всех величин приводятся в безразмерных единицах.

На примерах одномерных течений с ударными волнами демонотрируются свойства искусственной вязкости в форме ((30'), § 4).

П.I. Рассмотрим распределение одномерных ударных волн (УВ). На рис. 5,6,7 приведены распределения величин P-давления, ρ – плотности, ε – удельной внутренней энергии, u – скорости, в различные моменты времени, полученные при расчетах плоской УВ (декартовы координаты) по разностной схеме ((23)-(28), § 5) с использованием искусственной вязкости в форме ((30), § 4) . Все три случая отличаются друг от друга только величиной коэффициента $\varkappa$ при искусственной вязкости.

Профили УВ, изображенные на рис. 5, получены при коэффициенте $\varkappa$, найденном из условия наибыстрейшего затухания самого высокочастотного собственного колебания линеаризованной системы уравнений ((23)-(28,§ 4) (см. § 4,п.10).

Если принять величину этого коэффициента за единицу, то профили УВ, представленные на рис. 6,7 соответствуют величинам $\varkappa$, равным 0.3 и 1.2.

Сравнение профилей УВ в этих трех случаях показывает, что наиболее "хороший" фронт наблюдается при "единичном" коэффициенте вязкости. Ширина размазывания фронта в этом случае не превышает трех ячеек. На рис. 8 представлены графики одномерной УВ, сходящейся к центру в цилиндрической системе координат. Здесь, как и в предыдущих расчетах, $\gamma = 2$. Видно, что по мере приближения фронта УВ к центру, плотность за фронтом стремится к $(\gamma+1)/(\gamma-1)=3$.

П.2. В качестве расчета двумерных гидродинамических задач в декартовых координатах,приведем расчет обжатия магнитного поля тяжелым жидкометаллическим лайнером.

Не останавливаясь на физической постановке этой задачи, приведем сразу ее математическую модель.

В начальный момент времени t_0 , несжимаемый, бесконечнопроводящий, жидкометаллический лайнер представляет собой цилиндрическую трубу, со слегка искаженной формой внутренней границы. Внешний радиус R = 4, средняя величина внутреннего радиуса r равна 3. Плотность лайнера ρ_0=8.

В момент t_0 задано также поле скоростей лайнера, такое, что скорости всех точек внешней границы направлены к центру и равны по величине 2 (вследствие несжимаемости лайнера такое поле скоростей единственно). Внутри лайнера заключен магнитный поток Φ= 224 (вследствие бесконечной проводимости лайнера он будет оставаться постоянным во все моменты времени). Будем предполагать

трение отсутствующим.

Представляет интерес исследование развития начального возмущения внутренней границы лайнера в процессе торможения лайнера магнитным полем (на внутреннюю границу лайнера действует сила магнитного давления $P_H = H^2/8\pi$ – где H – напряженность магнитного поля).

Для того, чтобы решить эту задачу численно, покроем область, занимаемую лайнером разноотной сеткой, и зададим начальные данны $U_{i,j}$; $V_{i,j}$; $\rho_{i,j}$. Уравнение состояния возьмем в форме $P_{i,j} = A(\rho_{i,j} - \rho_0)$, где A положим равным 10^5, а начальное возмущение внутренней границы выберем в виде:

$$r(\varphi) = r_0 + A\cos(k\varphi)$$

В описываемом расчете полагалось:

A = 0,03; K = 10

Отметим, что $\max|r(\varphi) - r| = 0.03$ составляет 3% от толщины лайнера.

Вследствие симметрии определенной таким образом разностной задачи относительно осей X и У, можно исследовать поведение лайнера только в первом квадранте.

На рис. 9 представлены конфигурация лайнера и расчетной сетки в момент t_0.

На рис. 10, 11 и 12 представлены конфигурации лайнера соответственно в моменты времени $t_1 = 0.44$; $t_2 = 0.83$; $t_3 = 0.99$. На последних двух рисунках отчетливо виден процесс образования кумулятивных струй.

Расчет проводился в Лагранжевых переменных. Для увеличения точности расчетов, по мере приближения лайнера к центру, вводился механизм дробления ячеек, непосредственно прилегающих к внутренней границе, дополнительными азимутальными Лагранжевыми линиями.

П.3. Рассмотрим задачу об осесимметричном схлопывании жидкометаллического лайнера переменного сечения под действием ускоряющего магнитного давления, допускающую двухмерную постановку в цилиндрических координатах.

Как и в п.2, перейдем сразу к математической модели:

Несжимаемый, бесконечнопроводящий осесимметричный лайнер с плотностью $\rho = 1$, имеющий форму, изображенную на рис. 12а (параметры: $R_0 = 1{,}4$; $z_0 = 1$; $\ell = 1{,}5$; $\delta = 0.03$; внешняя граница имеет форму параболы) и в начальный момент t_0 покоящийся, приводится в движение магнитным полем ($P_H = H^2/8\pi$), возникающим в зазоре между внешней границей лайнера и токопроводящей катушкой. Полный магнитный поток, заключенный в этом зазоре, зависит от времени:

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{-t}$$

где $\Phi_0 = 1{,}6$; и однороден по любому сечению зазора плоскостями $z = const$. Вследствие симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$, будем рассматривать поведение половинки лайнера, находящейся в верхнем полупространстве.

На рис. 12а показаны конфигурация лайнера и расчетной сетки в начальный момент времени t_0 в плоскости (R, z).

На рис. 13 приведено положение лайнера в момент $t = 4.41$ "Утолщение" лайнера объясняется тем, что его объем остается постоянным, в то время как расстояние до оси z уменьшается.

На рис. 14 представлена конфигурация лайнера при $t = 4.92$. Видно, что тонкие концы лайнера сомкнулись, образуя таким образом "под лайнером" замкнутый объем. Хорошо заметно образование кумулятивной струи, двигающейся вниз по оси z от места смыкания концов.

Для моделирования несжимаемости, уравнение состояния бралось таким же, как и в расчете, описанном в п.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.
2. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Полностью консервативные разностные схемы. ЖВМ и МФ 9, № 4, (1969), 953-958.
3. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные схемы газовой динамики. Наука, 1975.
4. А.Г. Куликовский и Г.А. Любимов. Магнитная гидродинамика. Москва, 1962.
5. Л.Н. Седов. Вариационные принципы в механике сплошных сред. УМН, 1965.
6. SELEGER R.L. WHITHAM G.B. Variational principles in continuum mechanics Proc. Roy. Soc. A 305, 1-25 (1968)
7. HARLOW F.H and AMSDEN A.A. Multifluid flow Calculations at all Mach Numbers. Jor. of Comp. Physics, Vol 18, N1, 1974
8. Ф.Р. Гантмахер. Аналитическая механика. Москва, 1963.

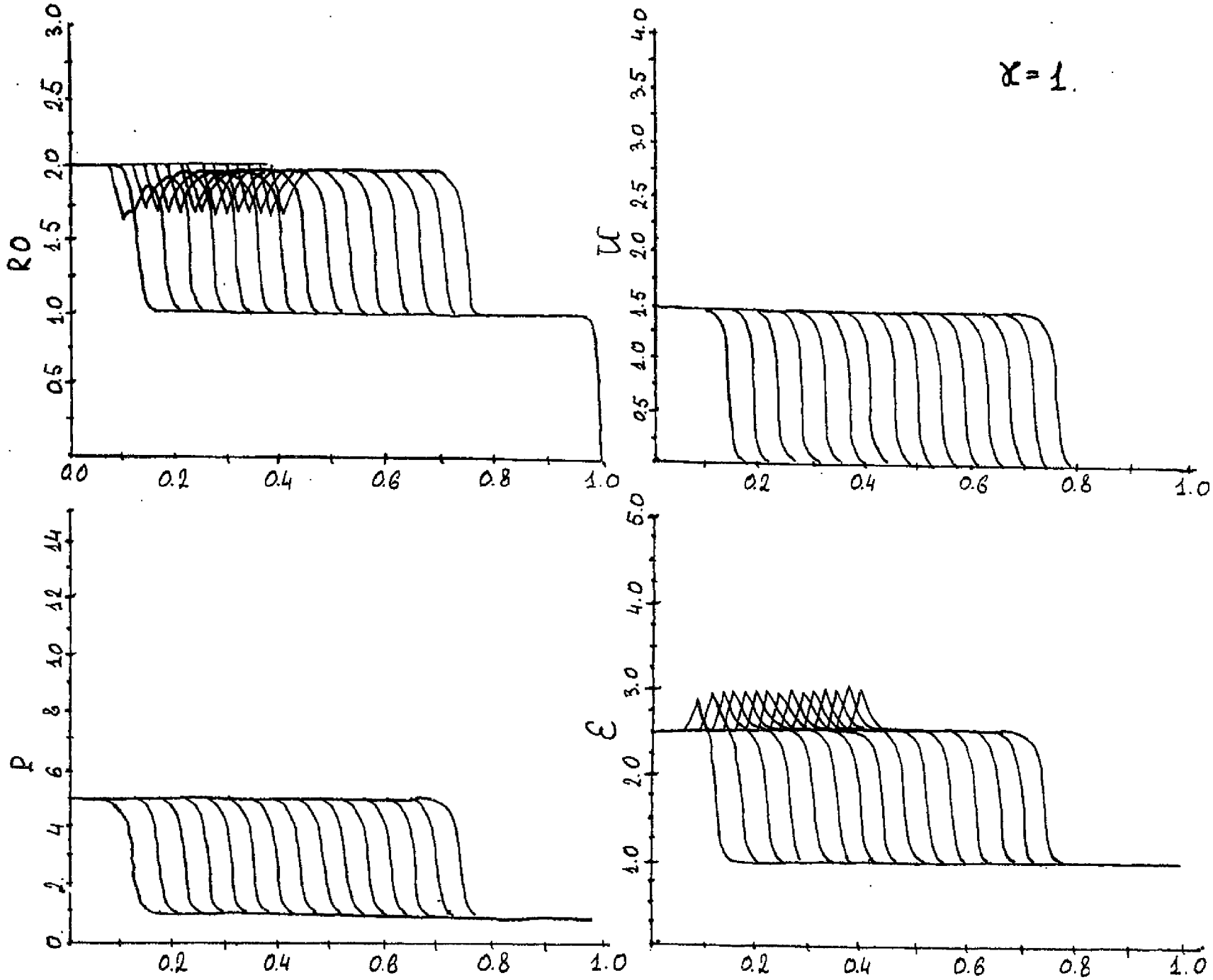

Рис. 5.

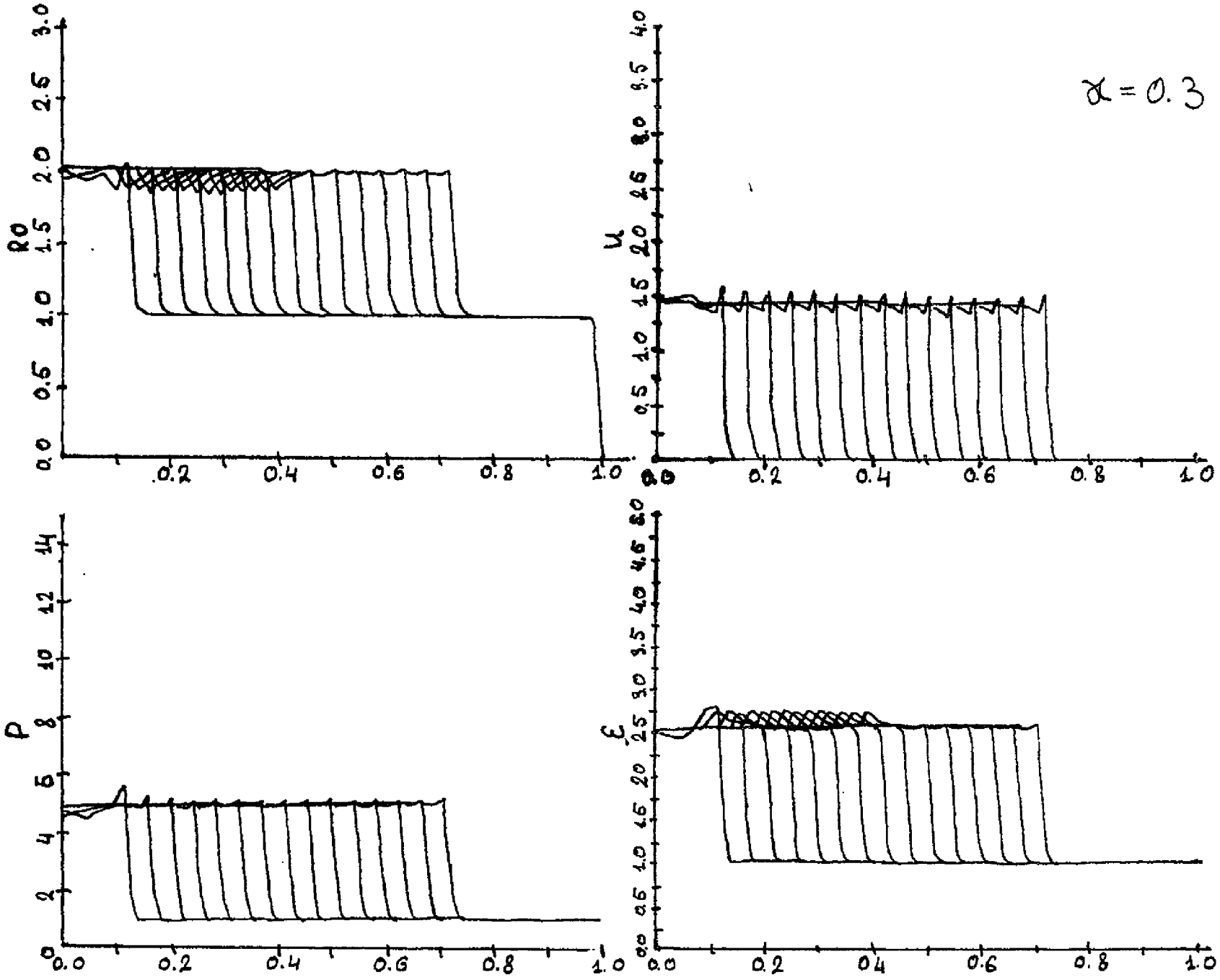

Рис 6.

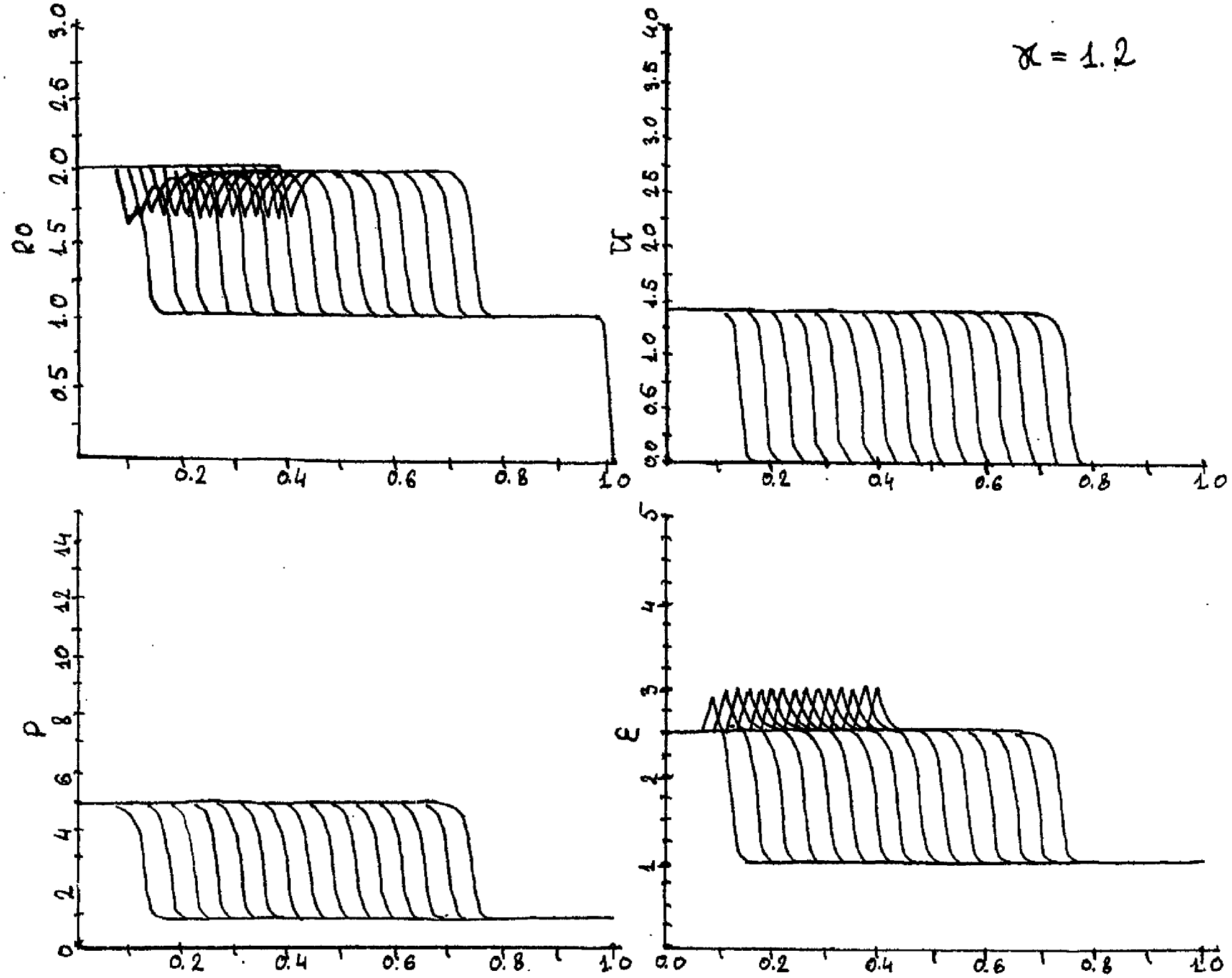

Рис 7.

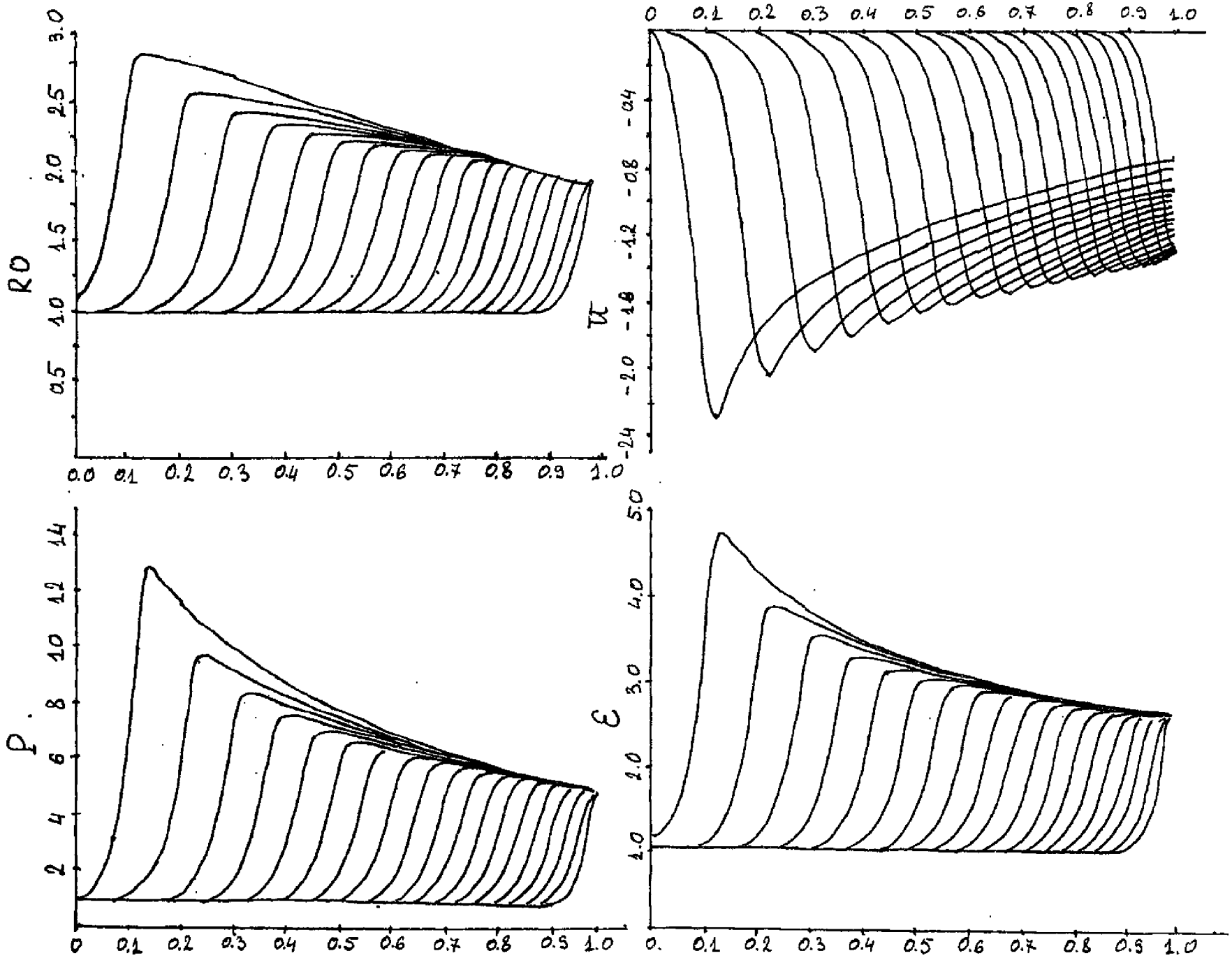
RD
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
π
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
-0.4
-0.8
-1.2
-1.6
-2.0
-2.4
P
14
12
10
8
6
4
2
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
ε
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

Рис. 8

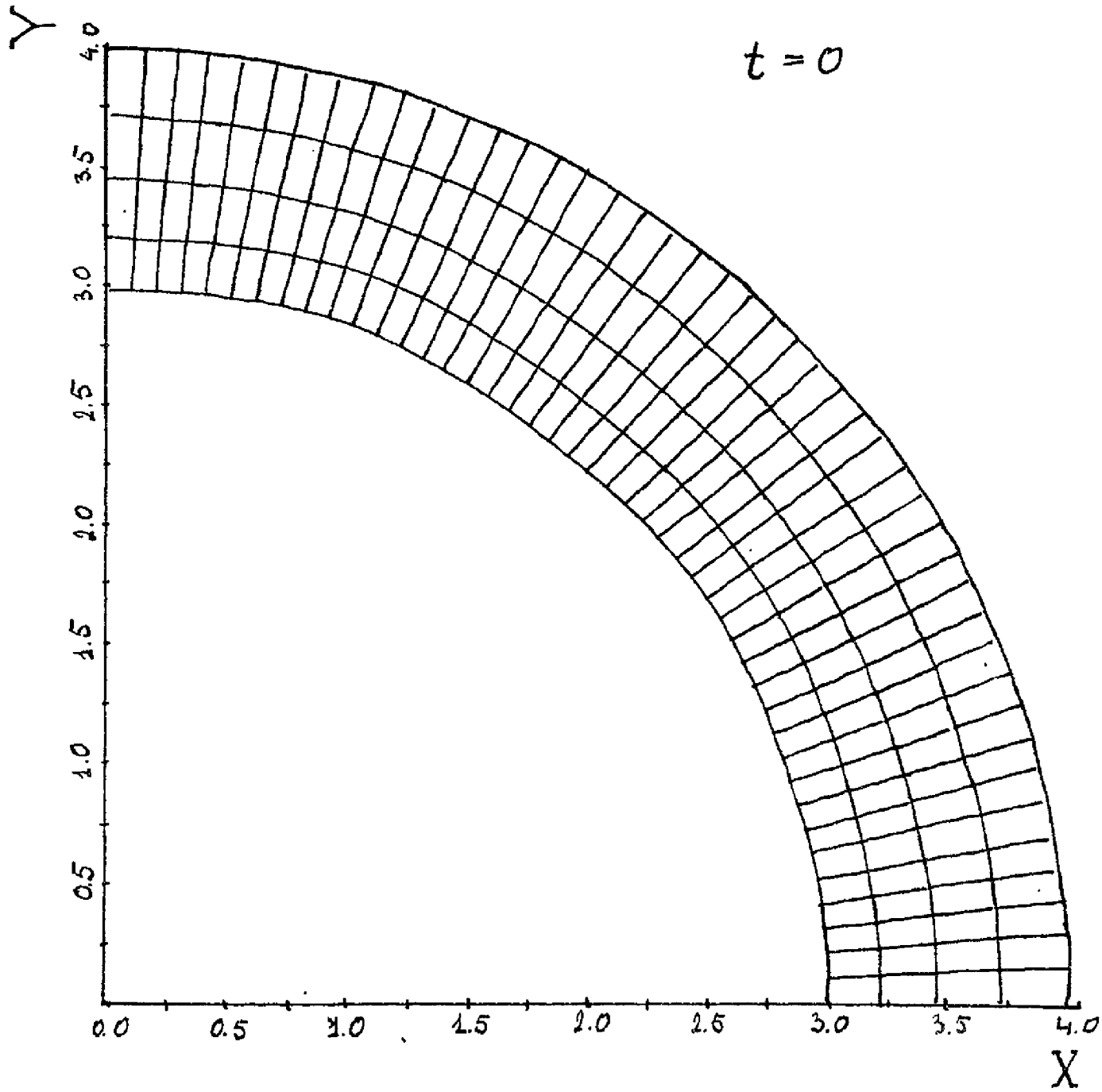

Рис. 9.

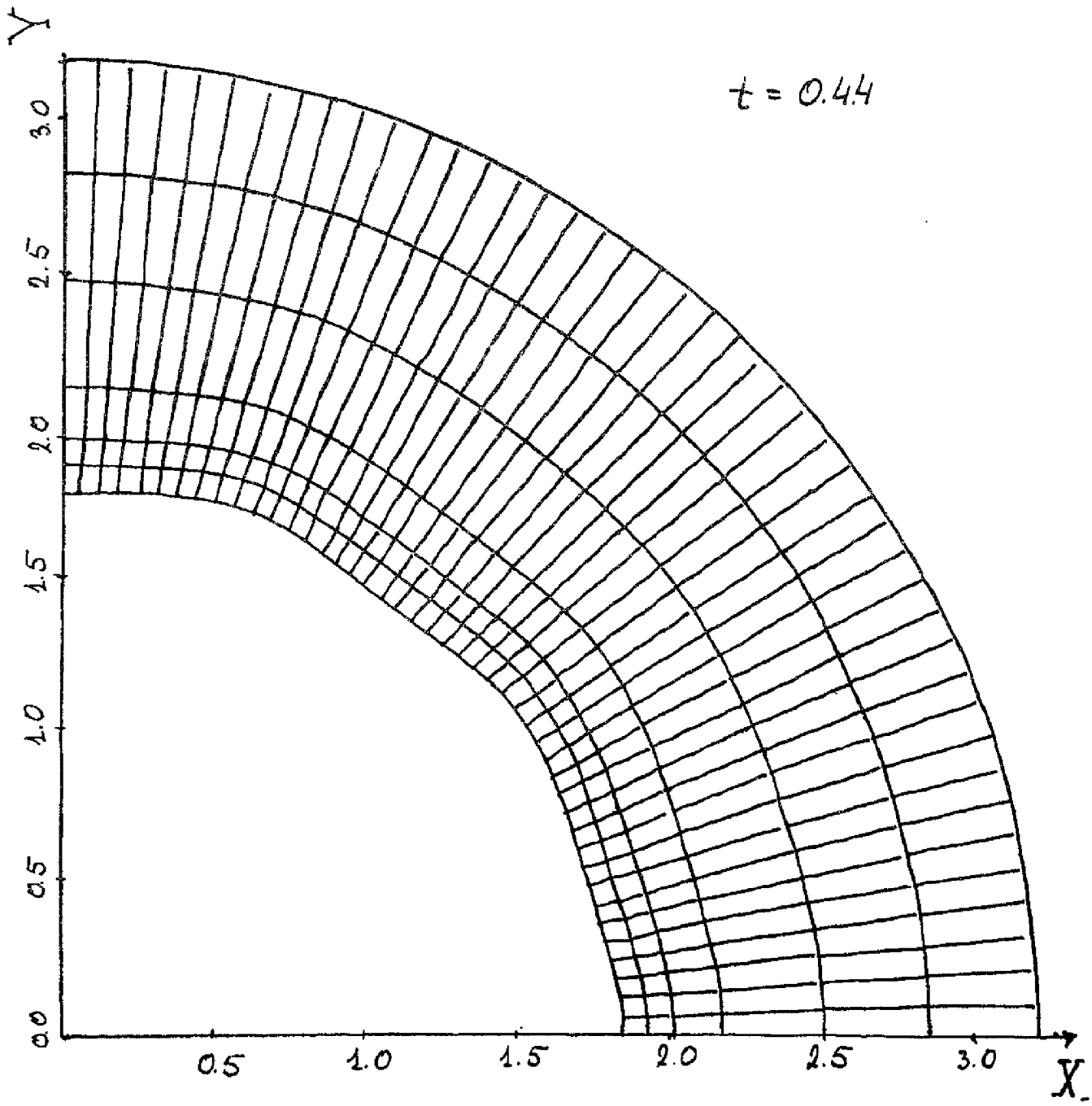

Рис 10.

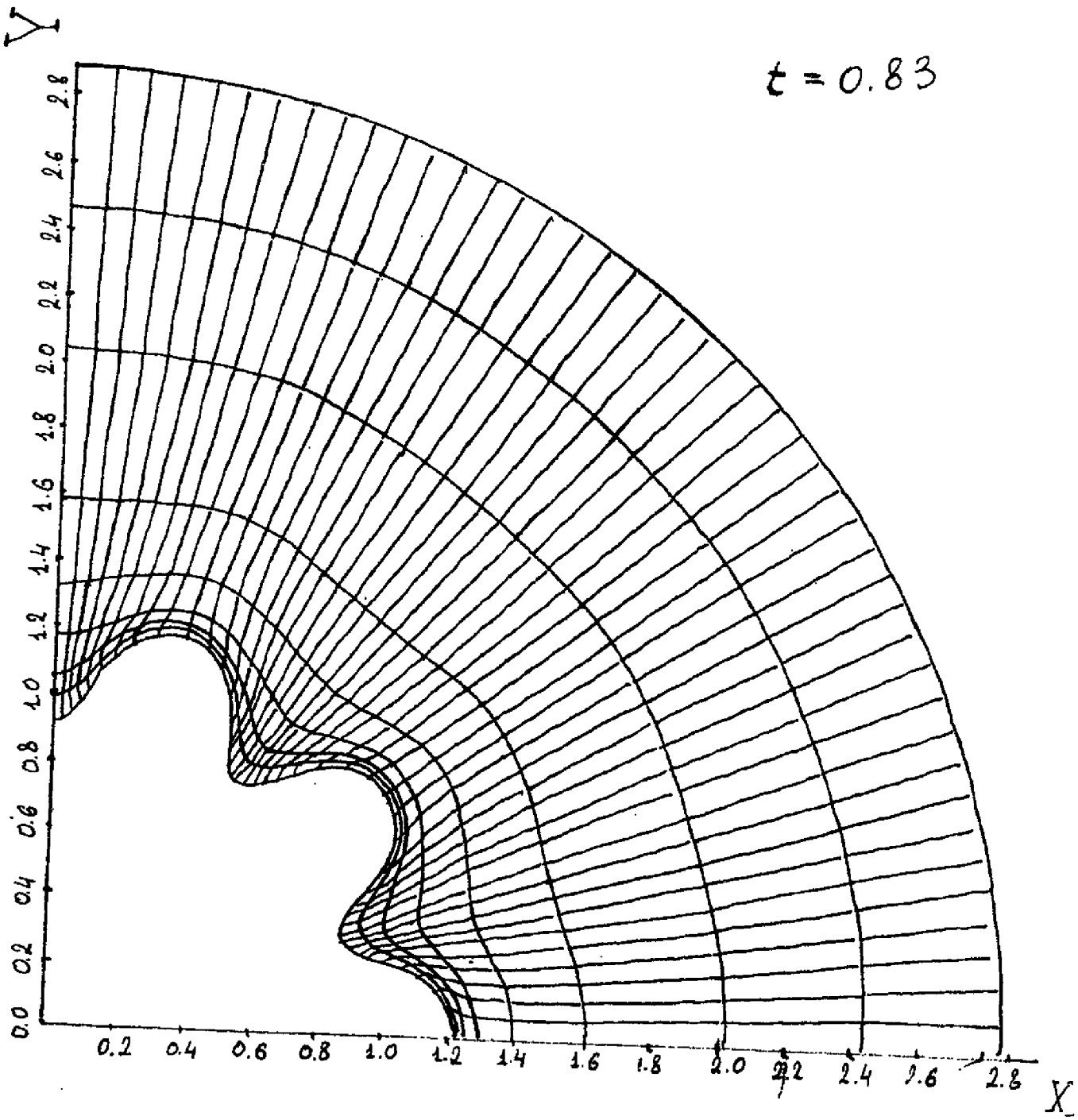

Рис. 11.

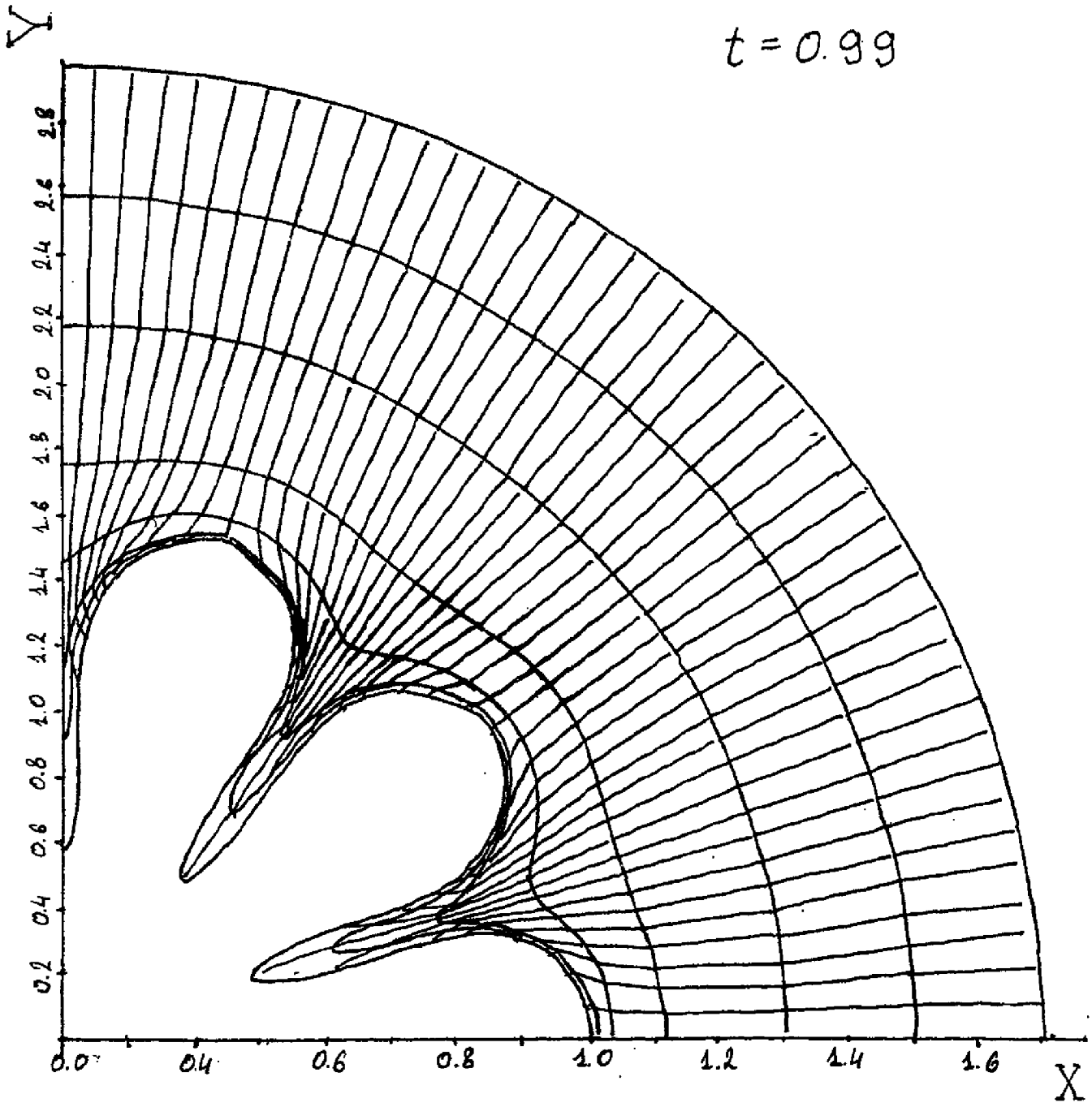
Y
t = 0.99
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
0.0
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
X

Рис. 10

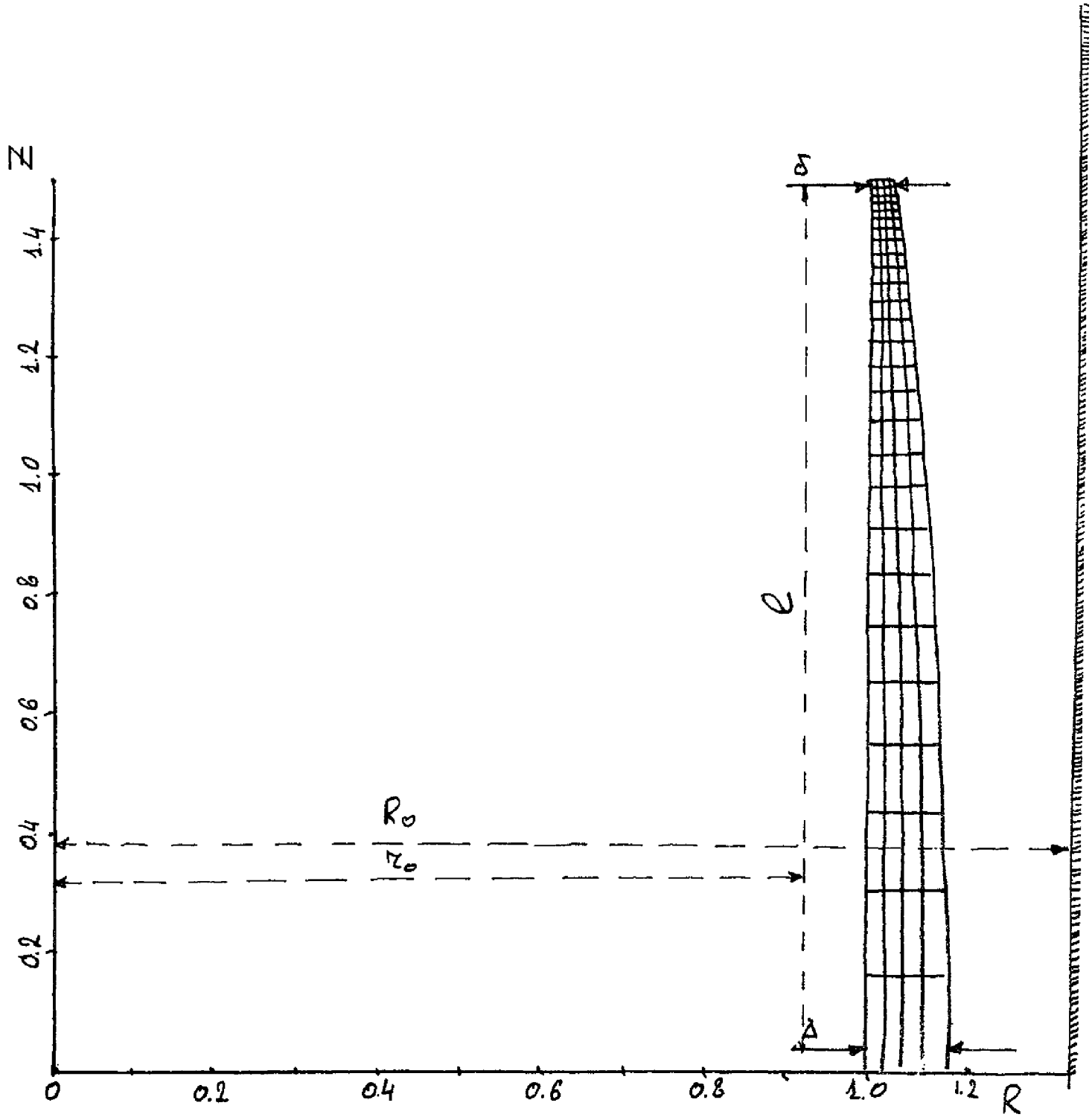

Рис. 12. а

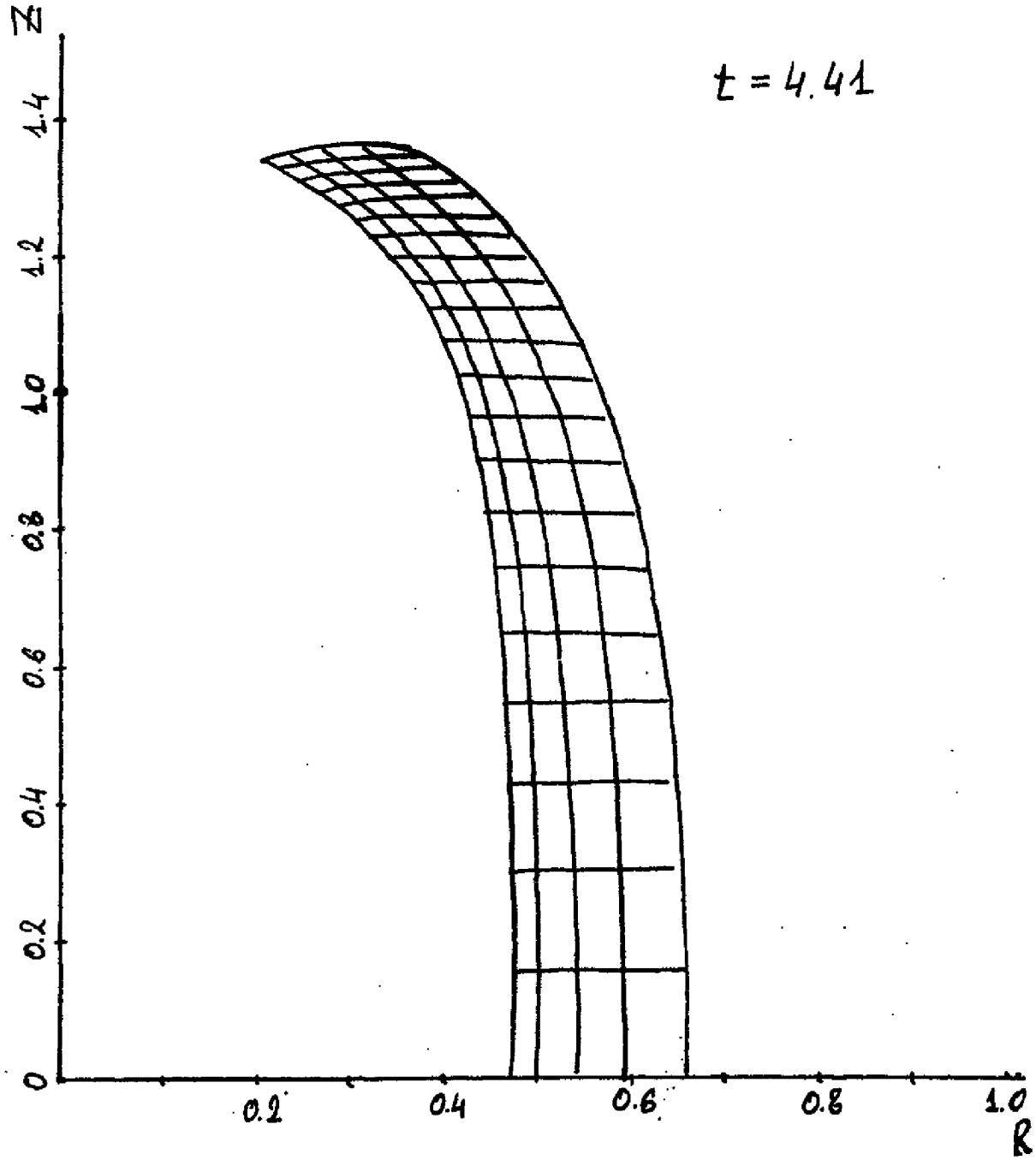

Рис. 13

$t = 4.92$

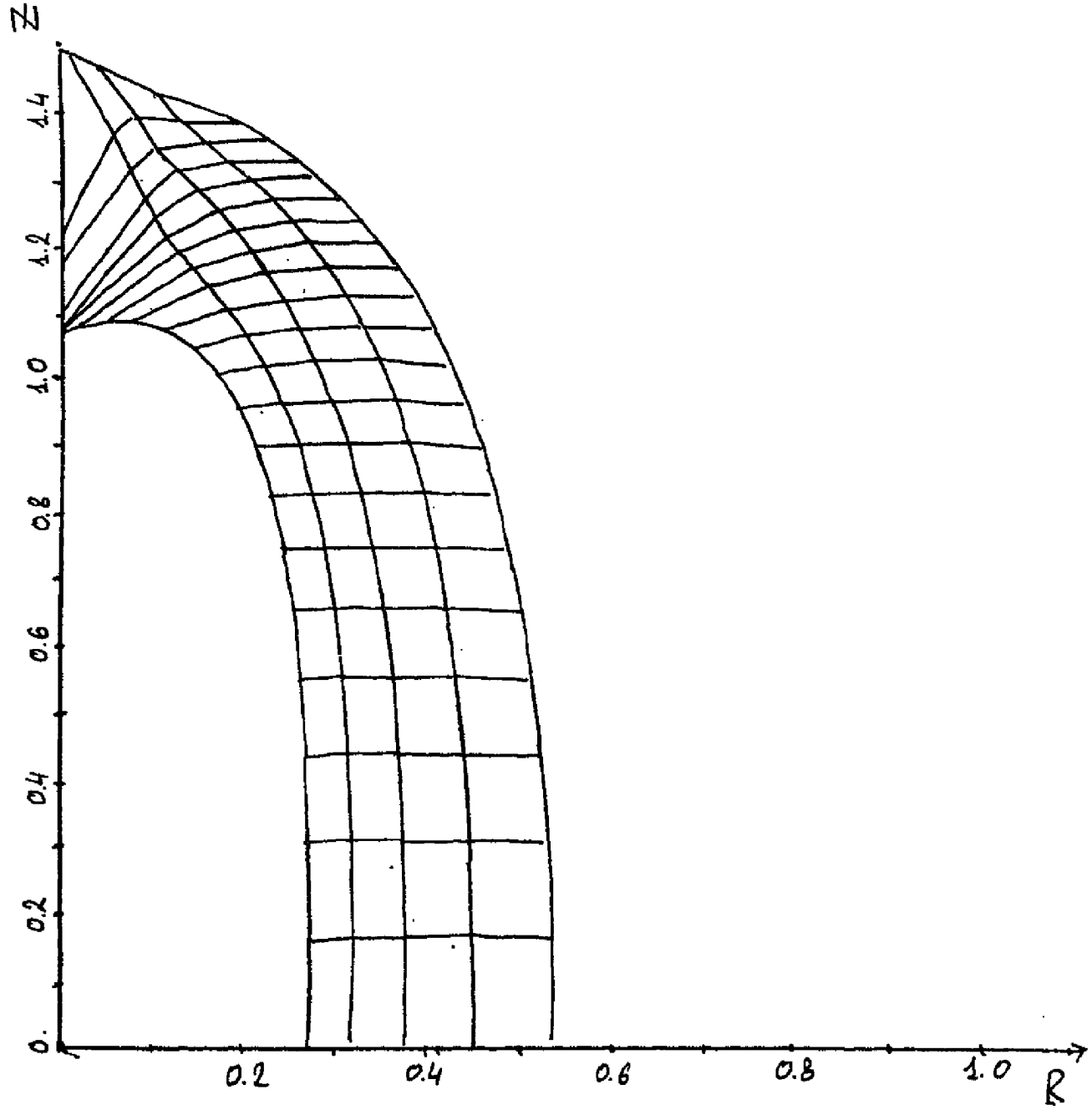

Рис. 14.