

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ,
И. В. ЗМИТРЕНКО, С. П. КУРДЮМОВ, А. П. МИХАЙЛОВ

**ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА
В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ
И ОБЪЕМНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

В работе изучаются условия возникновения и характер развития тепловых неоднородностей (структур) в неподвижной среде с коэффициентом теплопроводности и объемными источниками тепла, зависящими степенным образом от температуры. Установлено, что в такой среде существует пространственный масштаб (фундаментальная длина), определяющий размер области, в которой имеет место метастабильная локализация тепла и на асимптотической стадии процесса происходит образование тепловых структур. Ряд особенностей нелинейной теплопроводности и тепловых структур исследовались в (1-15).

1. Рассматривается одномерная нестационарная задача об иницировании процесса горения возмущением температуры, внесенным в конечный участок длины Δr_0 первоначально холодной среды (задача (а)), а также задача о неустойчивости гомотермического горения среды, равномерно нагретой в начальный момент (задача (б)). Исследование проводится при помощи анализа автомодельных и аналитических решений, а также при помощи прямого численного решения соответствующих уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу Коши в области $-\infty < r < \infty$ для уравнения с источниками (задачу о горении)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 T^\beta, \quad t > t_0, \quad T(t_0, r) = T_0(r), \quad (1)$$

где $k_0 > 0$, $q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 0$.

Это уравнение имеет автомодельное решение (а.р.)

(2)

$$T(h, t) = (q_1 t)^n f(\xi), \quad \xi = -ir q_1^{-m_1} t^{-m} k_0^{-1/2} = ir (q_1 t)^{-m_1} (k_0 t)^{-1/2}, \quad i^2 = -1,$$

где $n = (1 - \beta)^{-1}$, $m_1 = n\sigma/2$, $m = m_1 + 1/2$, $q_1 = -q_0 < 0$, а $f(\xi)$ — решение уравнения

$$-nf + m\xi f' = (f^\sigma f)' + f^\beta, \quad f' = df/d\xi. \quad (3)$$

Ограничимся здесь случаем $\beta > 1$, для которого ξ — вещественная переменная при $t < 0$; так как $n < 0$, то из (2) следует, что $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -0$.

Формула (2) дает решение задачи Коши (1) при $t_0 \leq t < 0$ и специальном задании $T_0(r) = (q_1 t_0)^n f(\xi_0)$, где $\xi_0 = \xi(r, t_0)$. При $t \rightarrow -\infty$ эта функция стремится к нулю и поэтому (2) можно трактовать как решение задачи (а) с бесконечно малыми начальными данными при $t = -\infty$.

2. В случае задачи (а) будем искать решение, отличное от нуля в конечной (или бесконечной) области $-\xi_\Phi \leq \xi \leq \xi_\Phi$ и удовлетворяющее условиям холодного фона $f=0$, $f^\sigma f=0$ при $\xi = \pm \xi_\Phi$, а также условию симметрии $f'|_{\xi=0} = 0$.

Из формулы (2) видно, что возможны три различных режима горения:

1) NS-режим (при $1 < \beta < \sigma + 1$), когда полуширина области горения

$\Delta r_* = r(\xi_*, t) - r(-\xi_*, t)$ ($f(\xi_*)/f_0 = 1/2$) возрастает с ростом t (при $t \rightarrow -0$); 2) S-режим (при $\beta = \sigma + 1$), когда Δr_* неизменно во времени; 3) LS-режим (при $\beta > \sigma + 1$), когда полуширина области горения сокращается (ср. (4)).

3. Указанные режимы являются асимптотическими при задании произвольного возмущения $T(r, t_0) = T_0(r)$ в конечный момент времени $t = t_0$; они могут установиться на стадии, когда выделяется тепла гораздо больше, чем имелось при начальном подогреве в момент $t = t_0$. Из-за неавтомоделности начальных данных решение задачи (а) обращается в бесконечность не в момент $t = 0$, а в некоторый момент $t = t_f$ (такие решения называют обычно режимами с «обострением», см. (3, 4, 14)). Очевидно, что $t_f = t_1 + t_2$, где t_1 — время установления профиля, близкого к автомоделному, а t_2 — время, оставшееся до момента фокусировки. В случае S-режима находим (см. п. 4) $t_2 = 2(\sigma + 1) [\sigma(\sigma + 2) T^\sigma(0, t_1) q_0]^{-1}$.

Для исследования удобно формально перейти от переменной $t \in (-\infty, 0)$ к переменной $-(t_f - t)$, где $0 < t < t_f$; при этом $\xi = k_0^{-1/2} q_0^{-m_1} r(t_f - t)^{-m}$, а $q_1 t$ заменяется на $q_0(t_f - t) > 0$.

На рис. 1 приведены профили температуры $T(r)$ для различных моментов времени в случае S-, HS- и LS-режима. Для S-режима они получены (рис. 1а) численным решением задачи (1) при $k_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\sigma = 2$. Для S- ($\beta = 3$) и HS-режима ($\beta = 5/3$) решения выходят на а.р. в соответствии с (2) (рис. 1б). Аналогичные расчеты для LS-режима при $\beta > \sigma + 1$ (рис. 1в) показали, что в случае конечных начальных возмущений выхода на автомоделный режим нет, однако профиль $T(r, t)$ внутри области горения близок к а.р. и сильно искажается на границе области.

4. В случае S-режима существует аналитическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $f^\sigma f' = 0$ при $f = 0$:

$$T(r, t) = (\bar{q}_0(t_f - t))^{-1/\sigma} (\sin^2 \alpha(c_1 - r))^{1/\sigma}, \quad (4)$$

где c_1 — произвольная постоянная, $\bar{q}_0 = q_0 \sigma(\sigma + 2) / 2(\sigma + 1)$, $\alpha = [\sigma^2 q_0 / 4k_0(\sigma + 1)]^{1/2}$.

Решение (5) является периодической функцией r с периодом

$$L_T = \pi / \alpha = 2\pi [(\sigma + 1) k_0 / \sigma^2 q_0]^{1/2}. \quad (5)$$

Эту величину мы называем фундаментальной длиной (ф.д.). Из (4) видно, что в точках $r_* = c_1 + \kappa L_T$, $\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots$, потоки равны нулю. Имеет место самоподдерживающаяся в течение конечного времени, зависящего от начального возмущения, тепловая изоляция соседних слоев ($r_{* - 1}, r_*$) и ($r_*, r_{* + 1}$) длины L_T .

В случае задачи (а) при $\sigma = \beta - 1$, независимо от условий $\Delta r_0 < L_T$ или $\Delta r_0 > L_T$, решение уравнений (1) асимптотически выходит на один период решения (4), иными словами горение происходит «на ф.д.» в окрестности (имеющей диаметр L_T) точки с максимальной температурой $T_0(r)$. При специальном выборе начальных данных можно получить одновременное горение нескольких структур (4), каждая из которых имеет длину L_T .

5. Рассмотрим теперь задачу (б) о гомотермическом горении с $T_0(r) = T(0) = \text{const}$; ее решение имеет вид

$$T(r, t) = T(t) = ((\beta - 1) q_0 (t_f - t))^{1/(1 - \beta)}, \quad 0 < t < t_f = (q_0 (\beta - 1) T^{\beta - 1}(0))^{-1}. \quad (6)$$

Проведено исследование устойчивости решения (6) относительно малых возмущений $\delta T = A(t) \exp i(\omega t - kr)$ и показано, что в HS-режиме (при $\beta < \sigma + 1$) решение (6) устойчиво для возмущений всех длин волн, а в LS-режиме (при $\beta > \sigma + 1$) неустойчиво для возмущений любых длин волн; при этом возмущения растут по закону $(t_f - t)^{n_i}$. Гомотермическое горение в S-режиме (при $\beta = \sigma + 1$) неустойчиво для возмущений с длиной волны больше критической $\lambda > \lambda_c = 2\pi [k_0 / q_0 (\sigma + 1)]^{1/2}$; при этом возмущения растут по закону $(t_f - t)^{n_i}$, $n_i = \beta(1 - (\lambda_c / \lambda)^2) / (1 - \beta)$, при $\sigma > 0$ и по экспоненте с инкрементом $(1 - (\lambda_c / \lambda)^2) q_0$ при $\sigma = 0$.

Численные расчеты показывают, что в случае $\Delta r_0 < L_T$ область горения растет, пока ее диаметр не достигает ф.д. L_T , после чего скорость горения возрастает на несколько порядков (явление вспышки «на ф.д.»). Вспышка аналогична цепной реакции в размогающей среде с линейной диффузией

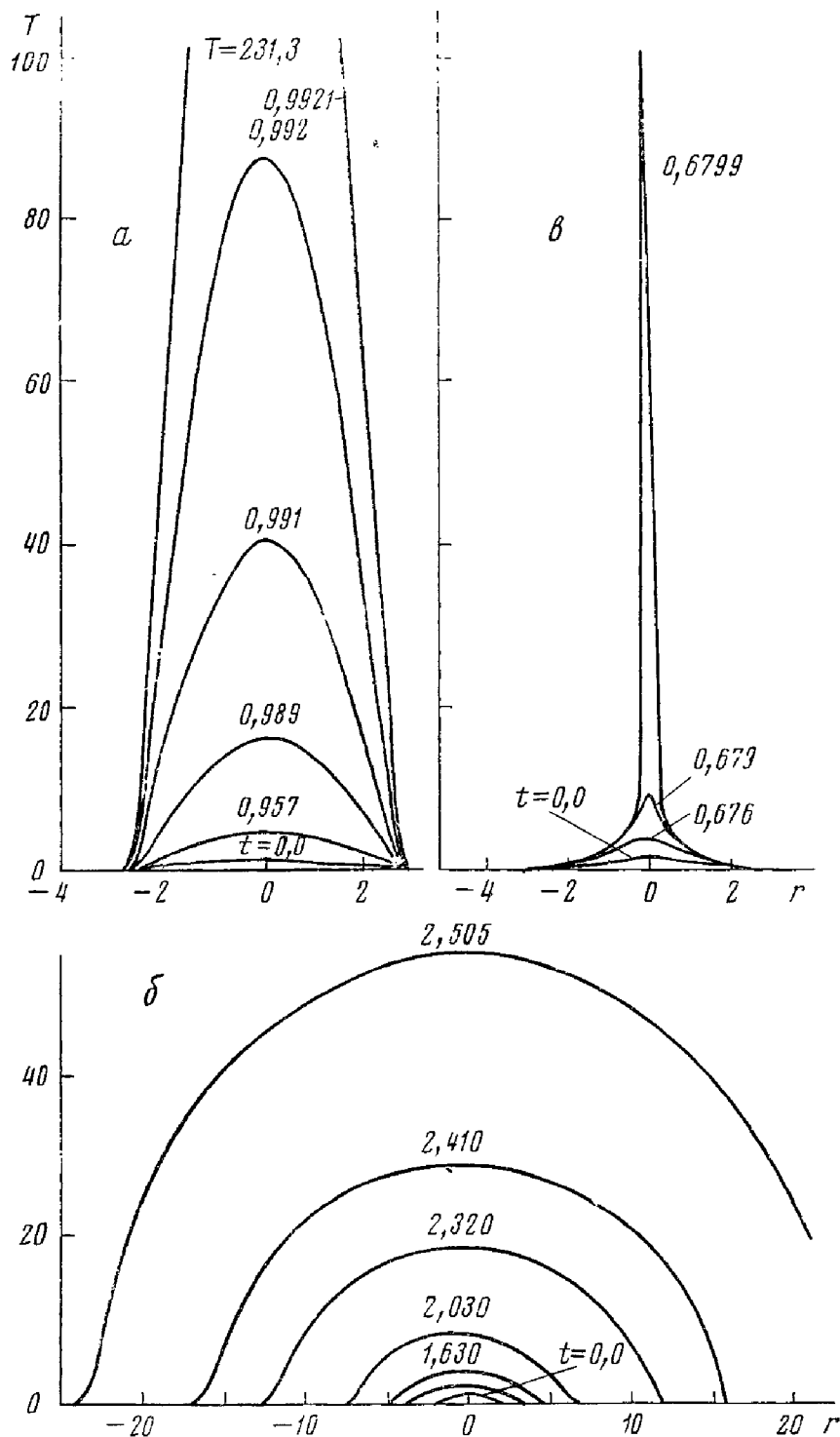


Рис. 1. Профили температуры T для различных моментов времени (числа у кривых) в случае S-режима (а), HS-режима (б), LS-режима (в)

(если $\sigma=0$ ($\beta=1$), то λ_c совпадает с критическим размером, а $L_T=\infty$; если $\sigma \gg 1$, то $\lambda_c/L_T = \sigma/(\sigma+1) \approx 1$).

6. В случае $\beta = \sigma + 1$, вводя $x = f^{\sigma+1}$, запишем (3) в виде уравнения движения консервативной системы

$$x'' = ((\sigma+1)/\sigma)x^{1/(\sigma+1)} - (\sigma+1)x, \quad x' = dx/d\tau, \quad \tau = \xi. \quad (7)$$

Потенциал поля сил $V(x)$ имеет минимум $V_0 = -(\sigma+1)/2(\sigma+2)\sigma^{1+1/\sigma}$ в точке $x = x_0 = \sigma^{-1-1/\sigma}$ (гомотермическое решение) и обращается в нуль при $x = x_1 = 0$ и $x = x_2 = (2(\sigma+1)/\sigma(\sigma+2))^{1+1/\sigma}$. Уравнение (7) имеет интеграл

энергии $1/2(x')^2 + V(x) = E_0$. Периодическое решение (7) для $x > 0$ ($f > 0$) имеет место при $E_0 \leq 0$. При $E_0 = 0$ имеет место периодическое решение (4) с предельно большим периодом колебаний $\Delta\tau = 2\pi\sqrt{\sigma+1}/\sigma$. При $V_0 < E_0 < 0$ существуют периодические решения с $x > 0$ (колебания около гомотермического фона $x = x_0$). По мере стремления E_0 к V_0 их период уменьшается, а амплитуда стремится к нулю. При $E_0 = V_0$ имеет место гармоническое периодическое движение с периодом $\Delta\tau = 2\pi/\sqrt{\sigma}$.

Таким образом, неустойчивость гомотермического горения на развитой стадии S-режима обуславливает непрерывный спектр длин структур в диапазоне $L_T = 2\pi[(\sigma+1)k_0/\sigma^2q_0]^{1/2} \geq \Delta r \geq 2\pi(k_0/\sigma q_0)^{1/2}$. Однако из-за горения в режиме обострения выделение тепла в структуре происходит так быстро, что при $t \rightarrow t_f$ любой температурный фон (даже гомотермический, но с большим i_f) оказывается бесконечно малым по сравнению с температурой в структуре и задача (б) сводится к задаче (а), а спектр длин структур, как подтверждают численные расчеты, вырождается в L_T .

7. При горении в LS-режиме (задача (а)) тепло метастабильно локализуется в области длины $\sim L_T^{(LS)}$. Ф. д. $L_T^{(LS)}$ оценивается через L_T мажорирующего S-режима по формуле

$$L_T^{(LS)} = (2\pi\sqrt{\sigma+1}/\sigma)\sqrt{k_0/q_0^*} = \pi\sqrt{2k_0(\beta+\sigma+1)/q_0\sigma(\beta-1)} T_{om}^{(\sigma+1-\beta)/2}. \quad (8)$$

Эквивалентная q_0^* мажорирующего S-режима определяется из условия равенства температур и t_f S и исследуемого LS-режима в начальный момент времени. Таким образом, ф.д. в LS-режиме зависит не только от свойств среды (σ, β, k_0, q_0), но и от величины максимальной температуры $T_{om} = \max_r T_0(r)$. Если $T_{om} \rightarrow 0$, то $L_T^{(LS)} \rightarrow \infty$ и реализуется а.р. (2). При $T_{om} \neq 0$ а.р. всегда искажено, осуществляется лишь часть решения внутри ф.д. (8). Оценка (8) для ф.д. $L_T^{(LS)}$ подтверждается в результате численного решения задачи (1). Она справедлива для Δr_0 , ненамного отличающейся от $L_T^{(LS)}$ (например, в два раза), так как вывод (8) не учитывал разницы между t_2 и t_f .

Задача (б) в LS-режиме на асимптотической стадии сводится к задаче (а), как и в случае S-режима (см. п. 6).

Учет ряда физических факторов (выгорания среды, изменения закона скорости горения с ростом температуры и др.) приводит к переходу LS- и S-режимов в HS-режимы при конечных температурах, уменьшая время локализации тепла. При $\beta \leq 1$ горение осуществляется всегда в HS-режиме. В сжимаемой движущейся среде аналогом ф.д. является фундаментальная масса (^{3, 14}).

Авторы благодарят Г. Г. Елепина за обсуждение работы.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 12, № 4, 1048 (1972). ² А. С. Калашников, там же, т. 14, № 4, 891 (1974). ³ С. П. Курдюмов, Препринт ИПМ АН СССР, № 18, 1975. ⁴ А. А. Самарский, Н. В. Змитренко, и др., ДАН, т. 223, № 6, 1344 (1975). ⁵ Я. В. Зельдович, А. С. Компанеев, Сб., посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, АН СССР, 1950, стр. 61. ⁶ Г. И. Баренблатт, ПММ, т. 16, № 1, 67 (1952). ⁷ Г. И. Баренблатт, И. М. Вишик, ПММ, т. 20, № 3, 411 (1956). ⁸ А. А. Самарский, И. М. Соболев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 702 (1963). ⁹ А. А. Самарский, С. П. Курдюмов, П. П. Волосевич, там же, т. 5, № 2, 199 (1965). ¹⁰ С. П. Курдюмов, Препринты ИПМ АН СССР, № 45, 1971, Деп. № 337-74; № 55, 1971, Деп. № 339-74; № 56, 1971, Деп. № 338-74. ¹¹ Б. Б. Кадоццев, Сб. Вопросы теории плазмы, в. 2, Госатомиздат, 1963. ¹² Ю. В. Сапожкин, Магн. гидродинамика, № 3, 61 (1965). ¹³ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский и др., ДАН, т. 173, № 4 (1967). ¹⁴ Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, Препринты ИПМ АН СССР, № 16, 1973; № 19, 1974; ДАН, т. 218, № 6, 1306 (1974); ДАН, т. 219, № 3, 578 (1974). ¹⁵ А. А. Самарский, В. А. Дорошцын и др., ДАН, т. 216, № 6, 1254 (1974).