ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 16 Ноябрь 1976 Декабрь № 6

УДК 518:517.9:533.7

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Описаны разностные схемы для системы одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, построенные на основе принципов консервативности, полной консервативности, однородности и допускающие использование грубых сеток. Проведен сравнительный анализ различных методов решения разностных схем, представляющих собой системы алгебраических нелинейных уравнений. Показано, что итерационный метод Ньютона допускает применение сеток с наибольшими шагами по временной переменной.

§ 1. Введение

Многие задачи современной науки и техники включают в качестве основного элемента уравнения газовой динамики. Эти уравнения нелинейны, поэтому единственным эффективным и универсальным способом их решения в настоящее время являются численные методы, ориентированные на использование быстродействующих ЭВМ.

В реальных задачах, представляющих практический интерес, уравнения газовой динамики, как правило, осложнены учетом дополнительных факторов, таких, как, например, электромагнитные поля, процессы тепло- и электропроводности, химические реакции, излучение и т. д. Разработка алгоритмов решения столь сложных систем уравнений представляет значительные трудности, а их реализация требует больших затрат машинного времени. Поэтому важное значение имеет прежде всего разработка эффективных методов численного решения уравнений газодинамики, допускающих использование «грубых» разностных сеток.

Изложим существующие здесь проблемы и возможные способы их решения на примере системы одномерных нестационарных уравнений газовой динамики в лагранжевых массовых переменных. Такая система уравнений для случая плоской симметрии имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial s}(pv), \tag{1.4}$$

$$p=\mathscr{P}(\rho, T), \qquad \varepsilon=\mathscr{E}(\rho, T). \tag{1.5}$$

Здесь t — время, x — переменная Эйлера, ρ — плотность среды, $s\,(ds=\rho dx)$ — лагранжева массовая координата, v — скорость, p — давление, ε — внутренняя энергия, T — температура газа; производная по времени лагранжева.

Соотношения (1.5), замыкающие систему уравнений, представляют собой уравнения состояния; их вид определяется свойствами среды, рассматриваемой в конкретной задаче.

§ 2. Однородные полностью консервативные разностные схемы

При решении задач газодинамики методом конечных разностей непрерывная среда заменяется некоторой дискретной моделью и, соответственно, система дифференциальных уравнений — некоторой разностной схемой. Разностная схема, аппроксимирующая исходную систему дифференциальных уравнений, может быть построена неединственным образом. Поэтому необходимы некоторые критерии предпочтения, которые позволяли бы из семейства допустимых схем выбрать схемы, обладающие наилучшими характеристиками.

В настоящее время существует ряд общих принципов (консервативность, полная консервативность, однородность и т. д. [2]), которые дают возможность для уравнений (1.1)—(1.5) строить схемы, правильно передающие решения даже на грубых сетках, когда фактически теряется аппроксимация. Принципы эти носят (в основном) качественный характер, они имеют теоретическое обоснование для линейного случая и подтверждены практическими расчетами для нелинейных задач.

Применение указанных принципов позволяет построить для системы уравнений (1.1)—(1.5) следующее однопараметрическое семейство разностных схем:

$$v_t=-\bar{p}_{\bar{s}}^{(\sigma)}, \tag{2.1}$$

$$x_t=v^{(0.5)}, \tag{2.2}$$

$$(1/\bar{\rho})_t=v_s^{(0.5)}, \tag{2.3}$$

$$\left(\bar{\varepsilon}+\frac{v^2+v^2(+1)}{4}\right)_t=-(\bar{p}_{\cdot}^{(\sigma)}v^{(0.5)})_s, \tag{2.4}$$

$$\bar{p}=\mathscr{P}(\bar{\rho}, \bar{T}), \qquad \bar{\varepsilon}=\mathscr{E}(\bar{\rho}, \bar{T}). \tag{2.5}$$

Для простоты схема записана на равномерной сетке $\Omega=\{(s_i, t_j),\ i=0, 1, \ldots, N;\ j=0, 1, \ldots,\ s_{i+1}=s_i+h,\ t_{j+1}=t_j+\tau\}$, h, $\tau=\mathrm{const}$ — шаги сетки. Сеточные функции $x=x_i^j$, $v=v_i^j$ относятся к узлам сетки (s_i, t_j); функции $\bar{p}=p_{i+1/2}^j$, $\bar{\rho}=\rho_{i+1/2}^j$, $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_{i+1/2}^j$, $\bar{T}=T_{i+1/2}^j$ — к «полуцелым» точкам $(s_{i+1/2}, t_j)$, причем $s_{i+1/2}=s_i+h/2$. Параметр $0\leqslant\sigma\leqslant1$ произволен. При записи схемы

(2.1)—(2.5) использованы безындексные обозначения [2, 3]:

$$y=y_i^j, \quad \bar{y}=y_{i+1/2}^j, \quad \hat{y}=y_i^{j+1}, \quad y(\pm 1)=y_{i\pm 1}^j;$$

$$(2.6) \qquad y_s=\frac{y(+1)-y}{h}, \quad y_{\bar{s}}=\frac{y-y(-1)}{h}, \quad y_t=\frac{\hat{y}-y}{\tau},$$

$$y_*=0.5(y+y(-1)), \quad y^{(\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-\sigma)y.$$

В схеме (2.1)—(2.5) выполнены законы сохранения импульса и энергии. Это следует из дивергентности записи разностных уравнений (2.1) и (2.4), которые фактически выражают указанные законы для одного массового интервала сетки h за один шаг по времени τ. Соответствующие интегральные законы сохранения получаются суммированными по сетке уравнений (2.1) и (2.4) для $0\leqslant i\leqslant N$, $j_1\leqslant j\leqslant j_2$.

Закон сохранения массы выполнен в схеме автоматически в силу использования лагранжевых массовых переменных.

В схеме (2.1)—(2.5) выполнен также баланс внутренней энергии. Действительно, из уравнения энергии (2.4) с учетом (2.1)—(2.3) могут быть получены соотношения

$$(2.7) \qquad \bar{\varepsilon}_t=-\bar{p}^{(\sigma)}v_{\bar{s}}^{(0.5)}, \quad \bar{\varepsilon}_t=-\bar{p}^{(\sigma)}(1/\bar{\rho})_t,$$

которые выражают этот баланс для одной ячейки сетки. Разностные уравнения (2.7) аппроксимируют дифференциальные уравнения

$$(2.7') \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

которые являются следствиями уравнений (1.1)—(1.4) и отражают тот факт, что внутренняя энергия газа изменяется за счет работы сил давления.

Из уравнений схемы (2.2), (2.3) вытекает естественное равенство

$$(2.8) \qquad 1/\bar{\rho}=x_{\bar{s}},$$

или, после суммирования по сетке,

$$(2.9) \qquad \sum_{i=0}^{N-1}\frac{h}{\rho_{i+1/2}^j}=x_N^j-x_0^j.$$

Соотношения (2.8), (2.9) аппроксимируют равенства

$$(2.10) \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \int_0^M\frac{ds}{\rho}=x(M,t)-x(0,t),$$

которые следуют из (1.2), (1.3) и выражают так называемый закон сохранения объема (M — масса рассматриваемого в задаче газа, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения) [1, 2].

Таким образом, схема (2.1)—(2.5) обладает свойством полной консервативности [2, 4]. В ней выполнены не только разностные аналоги основных законов сохранения (массы, импульса, энергии), но и дополнительные

соотношения (2.7), (2.8), необходимость соблюдения которых диктуется физическими соображениями.

Заметим, что схема (2.1) — (2.5) моделирует соотношения (2.7′), (2.10) при любых значениях шагов сетки h и τ. Схемы, не являющиеся полностью консервативными, обладают подобным свойством лишь в асимптотическом смысле при $\tau \to 0$. Нарушение свойства полной консервативности приводит к появлению в схеме различных источников энергии разностного происхождения, мощность которых пропорциональна шагу сетки τ. На грубых сетках при больших значениях τ эти источники оказываются значительными и могут существенно исказить решение [2].

На практике в схеме (2.1)—(2.5) вместо дивергентного разностного уравнения энергии (2.4) часто используется одно из равносильных ему уравнений (2.7), а вместо уравнения неразрывности (2.3) — более компактная форма (2.8).

Погрешность аппроксимации схемы (2.1)—(2.5) есть $O(\tau+h^2)$ и $O(\tau^2+h^2)$ при частном значении параметра $\sigma=0.5$.

Для обеспечения однородности схемы, т. е. возможности сквозного расчета ударных волн без явного выделения на сетке фронта волны, в схему в виде добавки к давлению $\bar{p}$ вводится псевдовязкость $\bar{\omega}$ [2, 5]. Наличие псевдовязкости в схеме не нарушает ее полной консервативности. Соответствующая разностная схема совпадает с (2.1)—(2.5), если вместо давления $\bar{p}$ в уравнения (2.1) и (2.4) подставить полное давление $\bar{g}=\bar{p}+\bar{\omega}$.

При решении конкретных задач к разностным уравнениям (2.1)—(2.5) добавляется разностная аппроксимация граничных и начальных условий.

§ 3. Явная полностью консервативная схема

Разностная схема (2.1)—(2.5) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно значений сеточных функций. Количество уравнений в системе определяется числом узлов сетки по пространственной переменной и может быть значительным (30÷200). Поэтому в общем случае решение такой системы представляет собой самостоятельную проблему.

Чтобы проанализировать принципиальную сторону вопроса, ограничимся рассмотрением изотермического приближения. В этом случае уравнение энергии заменяется соотношением

$$T=T_0=\text{const},$$

что заметно упрощает задачу. Заметим, кроме того, что при использовании метода последовательных прогонок [2, 6] полная система уравнений (2.1)—(2.5) расщепляется на части, решаемые отдельно; при этом в динамической части фактически возникают уравнения для изотермического случая.

Разностная схема (2.1)—(2.5) в изотермическом приближении приводится, с учетом (2.8), к виду

$$v_t=-p_{\bar{s}}^{(\sigma)}, \tag{3.1}$$

(3.2) $x_t = v^{(0.5)}$,

(3.3) $(1/\rho)_t = v_s^{(0.5)}$,

(3.4) $p = \mathscr{P}(\rho)$.

Здесь и в дальнейшем черта над функциями p, ρ, означающая, что они относятся к полуцелым точкам сетки, опущена.

В качестве уравнения состояния (3.4) будем рассматривать уравнение состояния идеального газа

(3.4′) $p = c^2\rho$,

где c — изотермическая скорость звука.

При частном значении параметра $\sigma=0$ в (3.1) получаем так называемую явную полностью консервативную схему [2]. Уравнение (3.2) этой схемы является неявным, его правая часть содержит значения сеточной функции скорости с верхнего временнóго слоя v_i^{j+1}. Однако указанная схема без труда разрешается явным образом. Для этого следует рассматривать уравнения (3.1) — (3.4) в той последовательности, в которой они записаны. Тогда из уравнения (3.1) по известным значениям сеточной функции давления p_i^j определяется скорость на $(j+1)$-м слое v_i^{j+1}; далее из (3.2) определяется x_i^{j+1}, из (3.3) — функция ρ_i^{j+1}, а из (3.4) — давление p_i^{j+1}.

Описанная схема, привлекательная с алгоритмической точки зрения, устойчива в акустическом приближении лишь при выполнении условия [2]

(3.5) $\tau \leqslant Kh^2$,

где K — некоторая постоянная. При этом вычислительные погрешности могут нарастать со временем, однако не быстрее чем $e^{Kt/3}$.

Условие устойчивости (3.5) накладывает жесткое и неестественное для гиперболических уравнений ограничение на шаг сетки τ. Оно не позволяет использовать для расчетов сетки с крупным шагом по времени и, таким образом, не дает возможности реализовать преимущества, которыми обладают полностью консервативные схемы по сравнению с прочими схемами, ибо эти преимущества проявляются на грубых сетках.

§ 4. Простейший итерационный процесс

При значениях параметра $\sigma \geqslant 0.5$ схема (3.1) — (3.4) является безусловно устойчивой [2, 7]. Однако в этом случае разрешить получающуюся систему разностных уравнений явным образом уже не удается. Эта система алгебраических уравнений нелинейна, поэтому для ее решения приходится применять различные итерационные методы.

При этом значение любой сеточной функции y на верхнем слое определяется следующим образом:

(4.1) $y_i^{j+1} = \lim\limits_{k\to\infty} y_i^{[k]}$,

где k — номер итерации. Естественно, что в реальных вычислениях ограничиваются конечным числом итераций k_0, используя в качестве практического критерия сходимости итераций некоторое условие вида

$$(4.2)\qquad |y_i^{[k+1]}-y_i^{[k]}|\leqslant\varepsilon_1|y_i^{[k]}|+\varepsilon_2,\qquad i=0,1,\ldots,N.$$

Здесь ε_1 — относительная точность, ε_2 — некоторое малое число, которое обеспечивает правильное «срабатывание» критерия (4.2) в частном случае $y_i^{[k]}=0$.

Естественно, что итерационный процесс сходится не всегда. Условия его сходимости порождают определенные ограничения на шаг сетки по времени. Рассмотрим характер этих ограничений.

Обратимся к простейшему итерационному процессу для схемы (3.1) — (3.5) («явная итерация»), положив для определенности $\sigma=1$. Значения сеточных функций на двух соседних итерациях k-й и $(k+1)$-й здесь связаны следующим образом:

$$(4.3)\qquad \frac{v_i^{[k+1]}-v_i^j}{\tau}=-\frac{p_i^{[k]}-p_{i-1}^{[k]}}{h},$$

$$(4.4)\qquad \frac{x_i^{[k+1]}-x_i^j}{\tau}=0.5(v_i^{[k+1]}+v_i^j),$$

$$(4.5)\qquad \frac{1}{\rho_i^{[k+1]}}=\frac{x_{i+1}^{[k+1]}-x_i^{[k+1]}}{h},$$

$$(4.6)\qquad p_i^{[k+1]}=c^2\rho_i^{[k+1]}.$$

Точно так же, как и в случае рассмотренной в § 3 явной полностью консервативной схемы, система уравнений (4.3) — (4.6) на каждой итерации разрешается явным образом: из (4.3) определяется $v_i^{[k+1]}$, из (4.4) определяется $x_i^{[k+1]}$ и т. д.

В качестве «нулевой» итерации $y_i^{[0]}$ обычно берут значения с предыдущего временнóго слоя y_i^j.

Анализ показывает [2], что в линейном приближении сходимость описанного итерационного процесса имеет место лишь при выполнении неравенства

$$(4.7)\qquad \tau\leqslant\tau_K/2^{1/2},$$

где $\tau_K=h/c\rho$ — величина, фигурирующая в известном условии устойчивости Куранта $\tau\leqslant\tau_K$, построенном для схемы «крест» [8].

Таким образом, при использовании простейшего итерационного процесса условие сходимости итераций порождает достаточно сильное ограничение на шаг сетки τ, хотя сама исходная схема абсолютно устойчива.

§ 5. Итерационный метод Ньютона

Для решения разностных уравнений газодинамической схемы (3.1) — (3.4) можно использовать итерационный метод Ньютона, обладающий высокой скоростью сходимости. Применяя обычную процедуру к системе нелинейных алгебраических уравнений (3.1) — (3.4) [2, 9], приходим на каждой итерации $k=1, 2, \ldots$ к системе линейных уравнений

$$\begin{gathered}\delta v+\sigma\tau\delta p_{\bar{s}}=-f_1, \qquad \delta x-0.5\tau\delta v=-f_2,\\ \delta x_s-\frac{1}{\rho^2}\delta\rho=-f_3, \qquad \delta p-c^2\delta\rho=0.\end{gathered} \tag{5.1}$$

В (5.1) величина δy — разность значений сеточной функции y на соседних итерациях $(k+1)$-й и k-й:

$$\delta y=\delta y^{[k+1]}=y^{[k+1]}-y^{[k]}. \tag{5.2}$$

Остальные сеточные функции в (5.1), а именно ρ, f_1, f_2, f_3, вычисляются на k-й итерации:

$$\begin{gathered}f_{1i}^{[k]}=v_i^{[k]}-v_j^i+\sigma\frac{\tau}{h}(p_i^{[k]}-p_{i-1}^{[k]})+(1-\sigma)\frac{\tau}{h}(p_i^j-p_{i-1}^j),\\ f_{2i}^{[k]}=x_i^{[k]}-x_i^j-0.5\tau(v_i^{[k]}+v_i^j), \qquad f_{3i}^{[k]}=\frac{x_{i+1}^{[k]}-x_i^{[k]}}{h}-\frac{1}{\rho^{[k]}}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Заметим, что в силу линейности уравнений (3.1), (3.2) имеет место $f_{1i}^{[k]}=f_{2i}^{[k]}=0$ при $k\geqslant 1$. Система (5.1) линейна относительно неизвестных приращений δy. Исключая из (5.1) функции δp, $\delta\rho$ и δx, можно свести эту систему в каждом узле сетки к линейному разностному уравнению второго порядка относительно δv:

$$\delta v-0.5\sigma\tau^2(c^2\rho^2\delta v_s)_{\bar{s}}=-f_1+\sigma\tau[c^2\rho^2(f_3-(f_2)_s)]_{\bar{s}},$$

или, в индексной форме,

$$A_i\delta v_{i-1}-C_i\delta v_i+B_i\delta v_{i+1}=-F_i, \qquad i=1, 2, \ldots, N-1. \tag{5.4}$$

Коэффициенты уравнения (5.4) зависят от номера итерации и вычисляются по формулам

$$A_i=A_i^{[k]}=\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2(\rho_{i-1}^{[k]})^2, \qquad B_i=B_i^{[k]}=A_{i+1}^{[k]},$$

$$C_i=C_i^{[k]}=1+A_i^{[k]}+B_i^{[k]},$$

$$F_i=F_i^{[k]}=-f_{1i}^{[k]}+\sigma\tau c^2\{(\rho_i^{[k]})^2[f_{3i}^{[k]}-(f_{2i}^{[k]})_s]\}_{\bar{s}}.$$

Система трехточечных уравнений (5.4) на каждой итерации может быть решена методом прогонки [3].

Условия устойчивости прогонки $A_i>0$, $B_i>0$, $C_i>A_i+B_i$ здесь выполнены. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено некоторое условие сходимости, например вида (4.2).

§ 6. Условия сходимости итерационного метода Ньютона

Подставим в систему линеаризованных уравнений (5.1) вместо правых частей f_p, $p=1, 2, 3$, их выражения (5.3) и затем вычтем из каждого уравнения соответствующее уравнение исходной системы (3.1) — (3.4). Получим

$$\Delta v+\sigma\tau\Delta p_{\bar{s}}=0, \qquad \Delta x-0.5\tau\Delta v=0,$$

$$\Delta x_s+\frac{\rho^{[k+1]}-\rho^{[k]}}{(\rho^{[k]})^2}-\frac{1}{\rho^{[k]}}+\frac{1}{\hat{\rho}}=0, \qquad \Delta p-c^2\Delta\rho=0. \tag{6.1}$$

Здесь $\Delta y=\Delta y^{[k+1]}=y^{[k+1]}-\hat{y}$ — разность между значением сеточной функции y на $(k+1)$-й итерации и решением $\hat{y}=y^{j+1}$. Заметим, что это обозначение отличается от встречавшегося выше обозначения δy (см. (5.2)).

Система (6.1), в отличие от (5.1), не годится для практических расчетов, однако удобна для теоретических рассмотрений. После исключения из (6.1) приращений всех функций, кроме $\Delta\rho$, можно преобразовать эту систему к уравнению второго порядка:

$$(1+2(a_i^{[k]})^2)z_i^{[k+1]}-(a_i^{[k]})^2(z_{i+1}^{[k+1]}+z_{i-1}^{[k+1]})=-\frac{(z_i^{[k]})^2}{\rho_i^{j+1}}, \tag{6.2}$$

$$i=1, 2, \ldots, N-1,$$

где

$$z_i^{[k+1]}=\Delta\rho_i^{[k+1]}, \qquad (a_i^{[k]})^2=0.5\sigma\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2(\rho_i^{[k]})^2.$$

Если для определенности ограничиться задачами, где на границах заданы режимы изменения давления со временем, то в качестве граничных условий к уравнению (6.2) следует добавить соотношения

$$z_0^{[k+1]}=0, \qquad z_N^{[k+1]}=0, \qquad k=0, 1, \ldots. \tag{6.3}$$

Для неоднородного уравнения (6.2) с однородными краевыми условиями (6.3) справедлив принцип максимума [2, 3], из которого вытекают следствия

$$z_i^{[k+1]}=\rho_i^{[k+1]}-\rho_i^{j+1}\leqslant 0, \tag{6.4}$$

$$\|z_i^{[k+1]}\|_c\leqslant\left\|\frac{(z_i^{[k]})^2}{\rho^{j+1}}\right\|_c\leqslant\left\|\frac{1}{\rho^{j+1}}\right\|_c\|z^{[k]}\|_c^2. \tag{6.5}$$

Здесь

$$\|z^{[k]}\|_c=\max_i|z_i^{[k]}|.$$

Неравенство (6.4) означает, что в процессе итераций приближение к решению ρ_i^{j+1} происходит снизу. Условие (6.5) после многократного при-

менения приводится к виду [2]

(6.6) $$\|z^{[k+1]}\|_c \leqslant q^{2^{k+1}-1}\|z^{[0]}\|_c,$$

где

$$q=\|1/\rho^{j+1}\|_c\|z^{[0]}\|_c=\|1/\rho^{j+1}\|_c\|\rho^{j+1}-\rho^{[0]}\|_c>0.$$

Очевидно, сходимость итерационного процесса имеет место при $q<1$.

Если в качестве нулевой итерации взять значения сеточных функций с предыдущего j-го слоя по времени, как это обычно делается на практике, то условие сходимости итераций можно записать следующим образом:

(6.7) $$q=\tau\|\eta^{j+1}\|_c\|\rho_t\|_c<1,$$

$\eta=1/\rho$ — удельный объем.

Условие (6.7), являющееся достаточным, получено для нелинейного случая (в линейном приближении процесс Ньютона сходится за одну итерацию) и имеет весьма общую форму, зависящую от характера решения. Однако ясно, что для любого решения можно добиться выполнения условия (6.7) за счет уменьшения шага сетки τ.

При этом для сильно изменяющихся во времени решений ограничения на τ будут жестче.

§ 7. Оценка скорости сходимости итераций для задачи об ударной волне

Выясним, к каким ограничениям приводит общее условие сходимости итераций (6.7) в задаче об ударной волне, «размазанной» вязкостью. Этот пример важен для приложений, так как в реальных расчетах для обеспечения возможности сквозного расчета ударных волн без явного выделения их фронта на сетке в схему вводится искусственная вязкость. Эта вязкость ω входит как добавок к газокинетическому давлению p. Линейная вязкость имеет вид

(7.1) $$\omega=-\nu\rho\partial v/\partial s,$$

ν — коэффициент вязкости.

Решение задачи о структуре фронта изотермической ударной волны в вязкой среде известно (см., например, [1, 2]). Оно описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

(7.2) $$\frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{D}{\nu}(\eta_0-\eta)(\eta-\eta_1).$$

Его решение

$$\eta(\zeta)=\left\{\eta_1+K\eta_0\exp\left[\frac{D(\eta_0-\eta_1)}{\nu}\right]\zeta\right\}\left\{1+K\exp\left[\frac{D(\eta_0-\eta_1)}{\nu}\right]\zeta\right\}^{-1}$$

где $\zeta=s-Dt$ — автомодельная переменная, D — массовая скорость фронта ударной волны, η — удельный объем, η_0, η_1 — значения удельного объема, соответственно, перед волной и за ней, K — произвольная постоянная. Величина η_0 задается, значение η_1 определяется в изотермическом случае по формуле $\eta_1=c^2\rho_0/D^2=\alpha^2\eta_0$, где $\alpha=m/D<1$ — отношение массовой скорости звука $m=c\rho_0$ к массовой скорости фронта ударной волны.

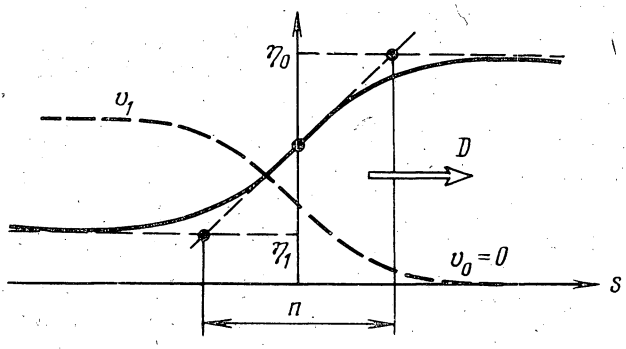
На фиг. 1 представлено решение задачи о структуре ударной волны в лагранжевых массовых координатах на фиксированный момент времени. Указанное решение позволяет оценить значения норм функций, входящих в условие сходимости (6.7):

$$\|\eta^{j+1}\|_c = \eta_0; \qquad \|\rho_t\| = \frac{D^2}{4\nu}\frac{(\eta_0-\eta_1)^2}{\eta_0\eta_1}. \tag{7.3}$$

После подстановки соотношений (7.3) в условие сходимости итераций (6.7) последнее приводится к виду

$$\xi = \frac{\tau}{\tau_{K1}} < n\Phi(\alpha) = n\frac{\alpha}{1-\alpha^2}, \tag{7.4}$$

где $\tau_{K1}=h/(c\rho_1)$ — величина, вычисленная по условию устойчивости Куранта для параметров за фронтом ударной волны, $\alpha=m/D$, $0<\alpha\leqslant 1$,—



Фиг. 1

характеристика интенсивности ударной волны, n — число массовых интервалов сетки, на которое размазан фронт ударной волны.

Таким образом, величина максимального шага τ зависит от силы волны (от значения параметра α). Сильные ударные волны с $\alpha\to 0$ требуют малого шага; при расчете слабых волн, близких к акустическим ($\alpha\to 1$), ограничения практически отсутствуют.

Видно, что условия сходимости метода Ньютона являются заметно менее жесткими, чем в методе простой итерации, рассмотренной в § 4.

§ 8. Результаты численных расчетов

Полученные выше оценки допустимого для сходимости итераций шага τ подтверждаются численными расчетами. В качестве тестовой задачи рассматривалась классическая задача о поршне, вдвигаемом в газ с постоянной скоростью, в результате чего возникает ударная волна.

В расчетах рассматривалась конечная масса газа $0\leqslant s\leqslant M$, ограниченная слева при $s=0$ поршнем, скорость которого задана:

$$v(0,t)=U, \tag{8.1}$$

а справа ($s=M$) — неподвижной стенкой:

$$v(M,t)=0. \tag{8.2}$$

Величина M выбиралась достаточно большой, чтобы режим ударной волны успевал сформироваться. Расчет продолжался до тех пор, пока фронт ударной волны не достигал правой границы. Исходное состояние газа имело вид

$$\rho(s,0)=\rho_0=1,\quad p(s,0)=p_0=0.25,\quad v(s,0)=v_0=0,\quad 0<s<M. \tag{8.3}$$

Все рассмотрения проводились для изотермического случая, скорость звука (см. 3.4′)) $c=0.5$.

Сравнительный анализ различных схем проводился на примере варианта задачи, где скорость поршня (8.1) была равна $U=0.75$. При этом, как следует из соотношений Гюгонио, скорость фронта ударной волны $D=1$, а параметры газа за фронтом имеют следующие значения:

$$\rho_1=4,\quad \eta_1=0.25,\quad p_1=1,\quad v_1=0.75.$$

В расчетах в области $0\leqslant s\leqslant M$, $M=3\div7$, вводилась равномерная сетка с шагом $h=0.1$. Шаг сетки по времени τ варьировался.

Для обеспечения возможности сквозного расчета ударной волны в схему вводилась линейная вязкость (7.1) с коэффициентом ν, так что фронт волны размазывался на n интервалов сетки:

$$n=\frac{4\nu}{Dh(\eta_0-\eta_1)}. \tag{8.4}$$

При $\nu=0.05$ (именно это значение коэффициента вязкости использовалось в расчетах) и $D=1$ имеем $n=2.6$.

На фиг. 2 представлены результаты расчета (профили скорости на два последовательных момента времени) задачи о поршне, полученные по явной схеме (3.1) — (3.4), $\sigma=0$, для различных значений шага τ. При $\tau=0.03$, $\xi=\tau/\tau_{K1}=0.6$ решение передается хорошо (фиг. 2, *а*), при $\tau=0.04$, $\xi=0.8$ профиль v за фронтом волны становится «пилообразным» (фиг. 2, *б*). При бо́льших значениях $\tau\sim\tau_{K1}=0.05$, $\xi\sim1$ развивающаяся «болтанка» полностью искажает решение (фиг. 2, *в*). Итак, применение в рассматриваемой задаче явной разностной схемы эффективно лишь при величине шага сетки $\tau\lesssim\tau_{K1}$, $\xi\lesssim1$.

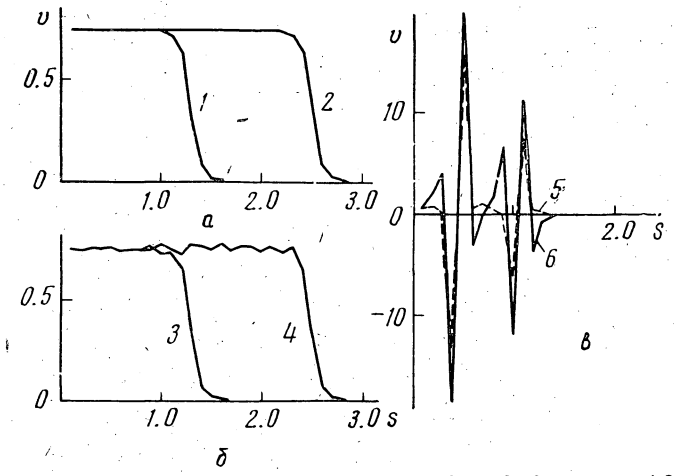
На фиг. 3 даны результаты расчета той же задачи по чисто неявной схеме (3.1) — (3.4), $\sigma=1$, с использованием явного итерационного процесса (см. § 4). При $\tau=0.015$, $\xi=0.3$ (см. фиг. 3, *а*) решение передается удовлетворительно, при $\tau=0.0175$, $\xi=0.35$ (см. фиг. 3, *б*) профиль скорости приобретает ярко выраженный «пилообразный» характер. Заметим, что уже при этих значениях τ итерации сходятся плохо. В расчетах число итераций на шаге было ограничено величиной $k_0=30$ при $\tau=0.015$ и $k_0=100$ при $\tau=0.0175$. Тем не менее этого количества итераций оказалось недостаточно для того, чтобы удовлетворить условию сходимости (4.2) с относительной точностью $\varepsilon_1=10^{-4}$.

При дальнейшем увеличении шага τ, например при $\tau=0.02$, $\xi=0.4$ (см. фиг. 3, *в*), с помощью указанного алгоритма воспроизвести решение не удается.

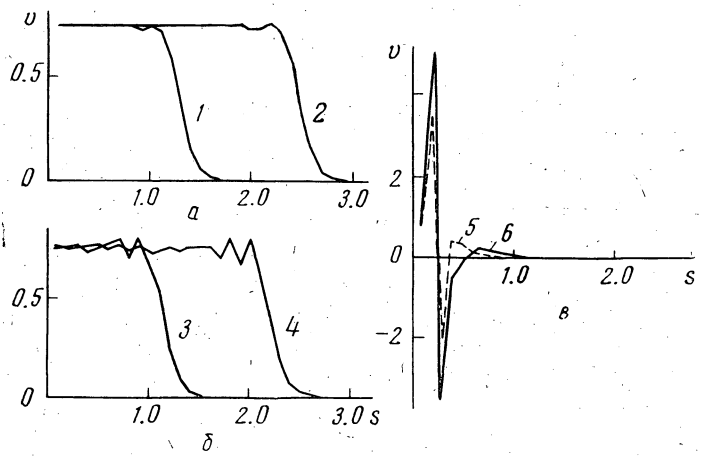
Таким образом, экспериментально получено ограничение на шаг сетки

$$\tau \leqslant 0.3\tau_{K1}, \quad \xi \leqslant 0.3,$$

при выполнении которого алгоритм удовлетворительно передает решение



Фиг. 2. *1* – для $t=1.2$, $j=40$; *2* – для $t=2.4$, $j=8$; *3* – для $t=1.2$, $j=30$; *4* – для $t=2.4$, $j=60$; *5* – для $t=0,5$, $j=10$; *6* – для $t=1$, $j=20$



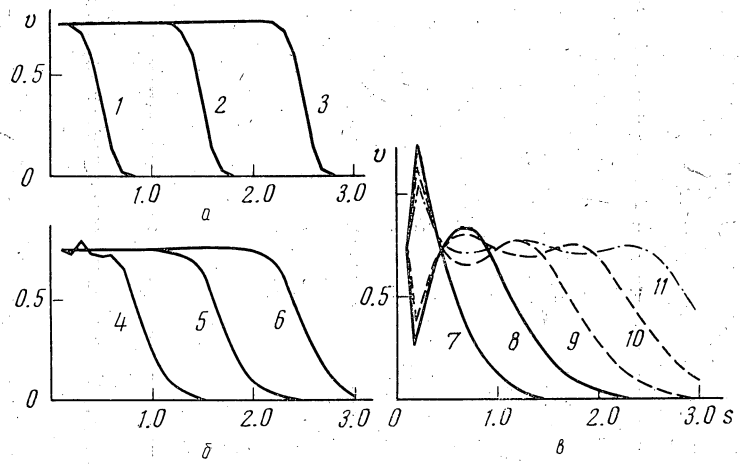
Фиг. 3. *1* – для $t=1.2$, $j=80$; *2* – для $t=2,4$, $j=160$; *3* – для $t=0.5$, $j=60$; *4* – для $t=2.1$, $j=120$; *5* – для $t=0.4$, $j=20$; *6* – для $t=0.8$, $j=40$

задачи о поршне. Напомним, что условие сходимости итераций, полученное выше теоретически для случая акустики, имеет вид

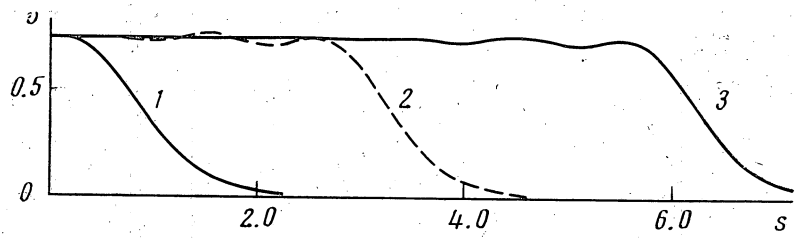
$$\tau \leqslant \tau_{K1}/2^{1/2}, \quad \xi \leqslant 0.7.$$

На фиг. 4 приведены результаты расчетов, выполненных по чисто неявной схеме (3.1) — (3.4), $\sigma=1$, с использованием итерационного метода Ньютона для следующих значений шага τ: $\tau=0.01$, $\xi=0.12$ (см. фиг. 4, *а*); $\tau=0.2$, $\xi=4$ (см. фиг. 4, *б*); $\tau=0.6$, $\xi=12$ (см. фиг. 4, *в*).

Заметим, что шаг $\tau=0.6$ является крупным, в этом расчете фронт волны проходит за один шаг по времени шесть массовых интервалов сетки. Тем не менее решение воспроизводится удовлетворительно и количество



Фиг. 4. *1* – для $t=0.4$, $j=40$; *2* – для $t=1.4$, $j=140$; *3* – для $t=2.4$, $j=240$; *4* – для $t=0.8$, $j=4$; *5* – для $t=1.6$, $j=8$; *6* – для $t=2.4$, $j=12$; *7* – для $t=0.6$, $j=1$; *8* – для $t=1.2$, $j=2$; *9* – для $t=1.8$, $j=3$; *10* – для $t=2.4$, $j=4$; *11* – для $t=3$, $j=5$



Фиг. 5. *1* – для $t=0$, $j=0$; *2* – для $t=2.4$, $j=4$; *3* – для $t=5.4$, $j=9$

итераций на шаге невелико ($k=2$ при $\tau=0.01$, $k=3$ при $\tau=0.2$, $k=4$ при $\tau=0.6$).

В качестве недостатка последней серии расчетов следует указать колебания, которые претерпевают функции в окрестности поршня. Колебания наблюдаются лишь при достаточно большой величине шага сетки по времени при $\tau\geqslant0.3$, $\xi>6$ (см. фиг. 4, *в*). Они происходят во времени от шага к шагу с убывающей амплитудой. Указанные колебания есть следствие «первого удара», который производит поршень в начальный момент, перемещаясь при столь больших τ за один шаг на значительное расстояние. Убедиться в этом позволяют результаты расчета, представленные на фиг. 5. Значения всех параметров здесь те же, что и для расчета на фиг. 4, *в*, за исключением начальных данных: для фиг. 4, *в* они задаются равенствами (8.3), для фиг. 5 — это гладкие распределения, соответствующие «размазанной» ударной волне, продвинувшейся к $t=0$ от поршня на 10 массовых интервалов. Как видно из фиг. 5, дальнейшее

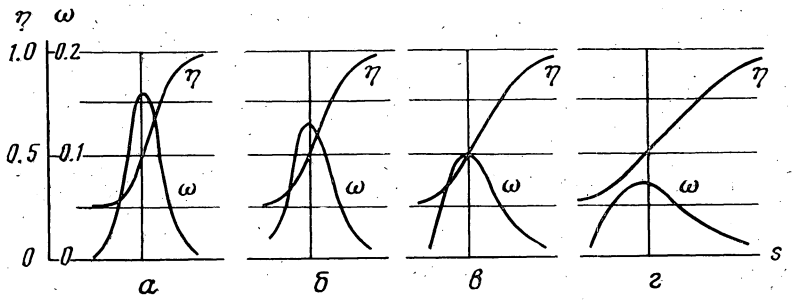
движение ударной волны при $t>0$ не сопровождается колебаниями функций у поршня. Очевидно, что тот же результат мы получили бы, если бы поршень набирал скорость U постепенно, а не приобретал ее мгновенно при $t=0$, как это имеет место в приведенных расчетах.

Другой тип колебаний, которые наблюдаются в расчетах с крупными τ,— это волнообразное распределение параметров за ударным фронтом (см. фиг. 4, 5). Амплитуда этой волны увеличивается с ростом τ, в то же время волна затухает по мере удаления от фронта к поршню. Расстояние между максимумом и минимумом в профиле, формирующемся за ударным фронтом (половина длины волны), равно числу массовых интервалов сетки, которое проходит фронт за один шаг по времени (для фиг. 4, *в* и 5 это число равно шести интервалам).

Причина возникновения этих колебаний заключается в дискретном характере среды (разностной сетки), по которой движется ударная волна.

§ 9. Аппроксимационная вязкость

Характерная деталь серии расчетов, представленной на фиг. 4, состоит в особенностях размазывания фронта ударной волны. При малых τ эффективная ширина фронта волны в расчетах совпадает со значением (3.4), полученным для точного решения. Однако по мере увеличения τ эта ширина растет, хотя значение коэффициента вязкости ν в (7.1) остается неизменным (см. фиг. 6, где представлены профили удельного объема и вязкости в установившейся ударной волне, полученные в расчетах для различных τ).



Фиг. 6. *а* – для $\tau=0.1$, *б* – для $\tau=0.2$, *в* – для $\tau=0{,}35$, *г* – для $\tau=0.7$

С целью выяснить причину указанного явления представим разностное уравнение движения схемы

$$v_t = -g_{\bar{s}}^{(\sigma)}, \qquad g = p + \omega \tag{9.1}$$

в виде

$$v_t = -(g^{(0.5)} + (\sigma - 0.5)\tau g_t)_{\bar{s}}. \tag{9.2}$$

Здесь мы воспользовались разностной формулой [2]

$$y^{(\alpha)} = y^{(\beta)} + (\alpha - \beta)\tau y_t.$$

Как видно, при любом значении σ схема (9.2) имеет второй порядок аппроксимации $O(\tau^2+h^2)$ относительно точки $(s_{i+1/2}, t_{j+1/2})$.

Формально можно считать, что разностное уравнение (9.2) аппроксимирует со вторым порядком дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(g + (\sigma - 0.5)\tau\frac{\partial g}{\partial t}\right).$$

Такое уравнение соответствует континуальной среде, где, помимо обычной вязкости ω, действует также некоторая дополнительная вязкость

$$\bar{\omega} = (\sigma - 0.5)\tau\partial g/\partial t.$$

Коэффициент этой вязкости зависит от параметров дискретной среды σ и τ, причем при $\tau \to 0$ дополнительная вязкость $\bar{\omega}$ становится исчезающе малой.

Величину $\bar{\omega}$ можно также рассматривать как слагаемое порядка $O(\tau)$ погрешности аппроксимации $\psi = O(\tau + h^2)$ обычного дифференциального уравнения движения

$$\partial v/\partial t = -\partial g/\partial s$$

разностным уравнением (9.1).

Таким образом, $\bar{\omega}$, обусловливающая дополнительные диссипативным свойства среды, является частью так называемой аппроксимационной вязкости [10], т. е. собственной вязкости схемы.

Для схемы с $\sigma = 1$, которая и рассматривается ниже, имеем $\bar{\omega} = -0.5\tau\ \partial g/\partial t$.

В задаче о структуре фронта изотермической ударной волны, где вязкость $\bar{\omega}$ порождает дополнительное размазывание волны, вязкие члены ω и $\bar{\omega}$ можно представить с помощью точного решения (7.2) в виде

$$\omega = \frac{\nu}{\eta} D \frac{d\eta}{d\zeta},$$

$$\bar{\omega} = \frac{\tau}{2} D^3 \frac{d\eta}{d\zeta}.$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи функцию $\Omega = \omega + \bar{\omega}$ можно рассматривать как некоторую суммарную вязкость

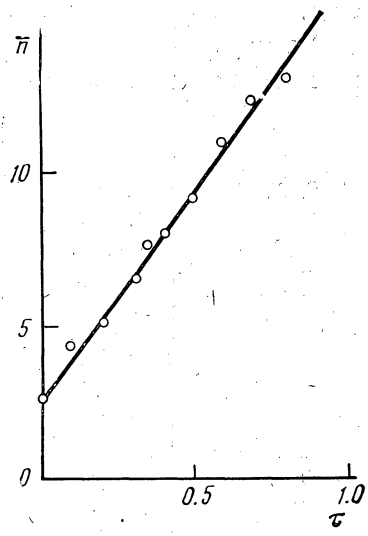
$$\Omega = \frac{\nu + 0.5\tau D^2\eta}{\eta} D \frac{d\eta}{d\zeta},$$

являющуюся линейной и обладающую эффективным коэффициентом

$$\bar{\nu} = \nu + 0.5\,\tau D^2\eta.$$

Этот коэффициент зависит от η, однако для оценок можно пользоваться и некоторой средней величиной

$$\bar{\nu}_{эф} = \nu + 0.5\,\tau D^2\bar{\eta},$$



Фиг. 7

где $\bar{\eta}$ — некоторое эффективное значение удельного объема $\eta_1 \leqslant \bar{\eta} \leqslant \eta_0$. Ширина размазывания фронта волны суммарной вязкостью Ω, как это следует из (8.4), будет определяться формулой

$$\bar{n}(\tau) = \frac{4\bar{\nu}_{эф}}{Dh(\eta_0 - \eta_1)} = \frac{4(\nu + 0.5\tau D^2\bar{\eta})}{Dh(\eta_0 - \eta_1)}. \tag{9.3}$$

Как видно из (9.3), при $\tau \to 0$ величина $\bar{n}$ совпадает с классическим значением (8.4), которое следует из точного решения дифференциальной задачи о структуре фронта ударной волны. С ростом τ ширина размазывания увеличивается по линейному закону.

Расчеты подтверждают этот вывод. На фиг. 7 представлена зависимость $\bar{n}(\tau)$, полученная экспериментально в результате обработки серии расчетов, часть которых представлена кружочками. Значения параметров здесь таковы:

$$D=1, \qquad \nu=0.05, \qquad h=0.1, \qquad \eta_0=1, \qquad \eta_1=0.25.$$

Экспериментальные точки на фиг. 7 хорошо ложатся на прямую (4.3) с $\bar{\eta}\approx 0.5$. Это естественно, ибо расчеты показывают, что действие вязкости максимально в районе с $\eta\approx 0.5$ (фиг. 6).

Таким образом, из-за наличия аппроксимационной вязкости в полученном выше достаточном условии сходимости итераций (7.4) вместо фиксированной ширины размазывания фронта ударной волны должна стоять величина $\bar{n}(\tau)$, увеличивающаяся с ростом τ.

Это обстоятельство, а также тот факт, что условие сходимости итераций (7.4) имеет достаточный характер, позволяет на практике пользоваться сетками с шагами τ, заметно превышающими максимальное значение, которое предписывается неравенством (7.4).

Следует отметить, что все рассуждения, проведенные в § 9, носят оценочный характер, ибо опираются на формулу (7.4), полученную для схемы без учета вязкости, в то время как в расчетах вязкость присутствует.

В заключение авторы выражают благодарность Н. Н. Тюриной за проведение численных расчетов.

Поступила в редакцию 24.03.1976

Цитированная литература

1. *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
2. *А. А. Самарский, Ю. П. Попов.* Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
3. *А. А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
4. *Ю. П. Попов, А. А. Самарский.* Полностью консервативные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 4, 953–958.
5. *Р. Д. Рихтмайер.* Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.
6. *А. А. Самарский, П. П. Волосевич, М. И. Волчинская, С. П. Курдюмов.* Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 5, 1025–1038.
7. *А. А. Самарский, А. В. Гулин.* Устойчивость разностных схем. М., «Наука», 1973.
8. *Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви.* О разностных уравнениях математической физики. Успехи матем. наук, 1940, 8, 125–160.
9. *И. С. Березин, Н. П. Жидков.* Методы вычислений. Т. II. М., Физматгиз, 1962.
10. *Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин.* Об аппроксимационной вязкости разностных схем. Докл. АН СССР, 1968, 182, № 4, 776–778.