УДК 517.949.2

О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости разностных схем

А. В. Гулин, А. А. Самарский (Москва)

Работа посвящена построению теории устойчивости разностных схем в гильбертовых пространствах. Изложены основные результаты авторов в этом направлении (см. [1]—[5]) и сформулированы некоторые нерешенные задачи, представляющие интерес либо с точки зрения полноты теории, либо с точки зрения приложений к конкретным разностным схемам. В отличие от монографии [1], где главное внимание уделялось приложениям, в настоящей работе выделены основные идейные моменты теории устойчивости. Прежде всего нам хотелось бы показать единство теории и простоту используемого математического аппарата. В сущности, всю линейную теорию устойчивости можно рассматривать как следствие одной — двух теорем, доказанных элементарными математическими средствами.

Первые два параграфа посвящены необходимым и достаточным условиям устойчивости. В частности, в § 2 доказывается теорема, которую мы считаем основной в теории устойчивости разностных схем. В § 3 на основе спектрального подхода доказаны некоторые теоремы о неустойчивости разностных схем. В § 4 вводится понятие ρ-устойчивости, находящее применение при исследовании сходимости итерационных процессов и при исследовании асимптотической устойчивости разностных схем. В этом параграфе получены также новые результаты по асимптотической устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем.

Другие подходы к построению теории устойчивости читатель может найти в работах [6] — [12].

§ 1. Определения устойчивости разностных схем и общие теоремы об устойчивости

1. Понятие разностной схемы. Канонический вид. Под разностной схемой понимается обычно система разностных уравнений, аппроксимирующая ту или иную задачу математической физики (т. е. уравнение в частных производных вместе с дополнительными условиями). Пусть рассматривается некоторая линейная нестационарная задача математической физики. Ее можно трактовать как абстрактную задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(0) = u_0$$

с оператором $A(t)$, определенным на всюду плотном множестве $\mathscr{D}(A)$ банахова пространства $\mathscr{B}$.

При аппроксимации исходной задачи конечноразностной схемой пространство $\mathscr{B}$ заменяется семейством *конечномерных* пространств $\{\mathscr{B}_h\}$. Обычно в приложениях индекс h (шаг сетки) указывает плотность пространственной сетки, так что если $h_1<h_2$, то $\mathscr{B}_{h_1}\supset\mathscr{B}_{h_2}$ и $\mathscr{B}_h\to\mathscr{B}$ при $h\to 0$. Отрезок $[0, T]$ заменяется сеткой

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau;\ n = 0, 1, \ldots, K;\ K\tau = T\},$$

оператор $A(t)$ — разностным оператором $A_{h,\tau}(t_n)$, действующим в пространстве $\mathscr{B}_h$, а производная $u'(t)$ — разностным отношением $(u(t_{n+1})-u(t_n))/\tau \overset{\text{def}}{=} u_t$.

В результате получаем операторно-разностное уравнение

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y_0 \text{ задано}, \tag{1}$$

которое и является предметом исследований настоящей работы. Здесь через

$$y = y_{h,\tau}(t_n) = y_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

обозначено решение разностной задачи в момент $t_n=n\tau$; $\varphi=\varphi_{h,\tau}(t_n)$ — заданная функция t_n со значениями в $\mathscr{B}_h$; A и B — линейные операторы, зависящие от h, τ, t_n и имеющие областью определения все пространство $\mathscr{B}_h$; $y_t=(y_{n+1}-y_n)/\tau$.

Уравнение (1) представляет собой двухслойную разностную схему, поскольку оно связывает значения неизвестных $y(t)$ на двух временных слоях $t=t_n$ и $t=t_{n+1}$. Запись двухслойной разностной схемы в виде (1) будем называть ее каноническим видом.

Заметим, что исходной дифференциальной задаче можно сопоставить бесчисленное множество аппроксимирующих ее разностных схем. Оператор $A=A_{h,\tau}(t_n)$ в уравнении (1) порождается обычно оператором $A(t)$ исходной задачи, а оператор $B=B_{h,\tau}(t_n)$ характеризует ту или иную разностную аппроксимацию и определяет, как будет видно из дальнейшего, свойства разностной схемы.

Теория разностных схем рассматривает вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости. Не давая формальных определений, отметим лишь, что для линейных задач при естественных предположениях сходимость разностной схемы следует из аппроксимации и устойчивости (см. [2], [6], [7]).

Нашей целью является исследование устойчивости разностной схемы — ее внутреннего свойства, не связанного непосредственно со свойствами аппроксимации и сходимости. Поэтому мы рассматриваем разностную схему (1) безотносительно к какой-либо исходной дифференциальной задаче и оставляем в стороне вопросы аппроксимации и сходимости. Заметим, впрочем, что изложенная далее теория устойчивости основана на априорных оценках в нормах, согласованных с нормами

исходного пространства $\mathscr{B}$, и позволяет тем самым установить сходимость конкретных схем.

В дальнейшем условия устойчивости схемы (1) будут сформулированы в виде требований к операторам A и B. При этом не будет делаться каких-либо предположений о структуре операторов, а будут лишь использоваться их общие свойства, такие, например, как самосопряженность и положительность.

2. Определения устойчивости разностной схемы. Будем рассматривать двухслойную разностную схему (1), определенную в линейном пространстве $\mathscr{B}_h$. Предположим, что в $\mathscr{B}_h$ введены нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$, в которых измеряются соответственно решение y_n задачи (1) и ее правая часть φ_n.

Определение 1. Схема (1) называется устойчивой, если существуют постоянные $M_1>0$, $M_2>0$, не зависящие от τ и h и такие, что при любых $y_0 \in \mathscr{B}_h$ и $\varphi(t_n) \in \mathscr{B}_h$ для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\| y_{h,\tau}(t_{n+1}) \|_{(1)} \leqslant M_1 \| y_{h,\tau}(0) \|_{(1)} + M_2 \sum_{j=0}^{n} \tau \| \varphi_{h,\tau}(t_j) \|_{(2)}. \tag{2}$$

Таким образом, устойчивость разностной схемы (1) означает непрерывную зависимость ее решения $y_{h,\tau}(t_n)$ от входных данных — начального условия y_0 и правой части φ_n, равномерную относительно τ и h.

Замечание. Иногда в определение устойчивости мы будем включать и условие непрерывной зависимости решения от φ_t — разностной производной правой части, т. е. будем требовать выполнение оценки вида

$$\| y_{n+1} \|_{(1)} \leqslant M_1 \| y_0 \|_{(1)} + M_2 \sum_{j=0}^{n} \tau \left(\| \varphi(t_j) \|_{(2)} + \| \psi_{t,j} \|_{(3)} \right).$$

Наряду с (1) будем рассматривать уравнение с нулевой правой частью

$$By_{t,n} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad y_0 \text{ задано.} \tag{3}$$

Определение 2. Схема (1) устойчива по начальным данным, если устойчива схема (3), т. е. если для (3) при любых $y_{h,\tau}(0) = y_0 \in \mathscr{B}_h$ выполняется оценка

$$\| y_{h,\tau}(t_{n+1}) \|_{(1)} \leqslant M_1 \| y_{h,\tau}(0) \|_{(1)}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

В дальнейшем будем всегда предполагать, что схема (1) разрешима относительно y_{n+1}, т. е. что существует оператор B^{-1}. Тогда, вводя оператор перехода $S_n = E - \tau B_n^{-1} A_n$, где E — единичный оператор, уравнение (3) можно переписать в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad y_0 \text{ задано.} \tag{5}$$

Решением задачи (5) является, очевидно, функция

$$y_{n+1} = T_{n+1} y_0, \quad T_{n+1} = S_n S_{n-1} \ldots S_0, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Из определения 2 следует, что устойчивость по начальным данным эквивалентна равномерной ограниченности операторов T_{n+1},

$$\| T_{n+1} \|_{(1)} \leqslant M_1, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

В частности, если S_n — постоянные операторы (т. е. не зависят от n), то устойчивость по начальным данным эквивалентна требованию $\|S^n\|_{(1)} \leqslant M_1$.

Определение 3. Схема (1) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если при любых $y_j \in \mathscr{B}_h$, $j = 0, 1, \ldots$, и для всех $n = j, j+1, \ldots$ для решения y_{n+1} задачи (3) справедлива оценка

$$\| y_{n+1} \|_{(1)} \leqslant M_1 \| y_j \|_{(1)} \tag{6}$$

с константой $M_1 > 0$, не зависящей от τ и h.

Следовательно, равномерная устойчивость — это устойчивость относительно возмущений, вносимых на любом слое j, а не только относительно возмущений начальных данных y_0.

Равномерная устойчивость по начальным данным эквивалентна равномерной ограниченности операторов

$$T_{n+1,j} = S_n S_{n-1} \ldots S_j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad n = j, j+1, \ldots,$$

т. е. оценке

$$\| T_{n+1,j} \|_{(1)} \leqslant M_1. \tag{7}$$

Определение 4. Схема (1) устойчива по правой части, если при любых $\varphi_{h,\tau}(t_j) \in \mathscr{B}_h$ для решения задачи

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y_0 = 0 \tag{8}$$

справедлива оценка

$$\| y_{h,\tau}(t_{n+1}) \|_{(1)} \leqslant M_2 \sum_{j=0}^{n} \tau \| \varphi_{h,\tau}(t_j) \|_{(2)}. \tag{9}$$

3. Общие теоремы об устойчивости. Существует определенная связь между равномерной устойчивостью по начальным данным и устойчивостью схемы (1). Именно, справедлива

Теорема 1. *Пусть норма* $\| \cdot \|_{(2)}$ *определяется как*

$$\| \varphi \|_{(2)} = \| B^{-1} \varphi \|_{(1)}. \tag{10}$$

Если схема (1) *равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива.*

Доказательство. Переписывая (1) в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n + \tau B_n^{-1} \varphi_n,$$

получим

$$y_{n+1} = T_{n+1} y_0 + \sum_{j=0}^{n} \tau T_{n+1,\, j+1} B_j^{-1} \varphi_j,$$

где $T_{n+1,\, j+1} = S_n S_{n-1} \ldots S_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n-1$, $T_{n+1,\, n+1} = E$. Из равномерной устойчивости по начальным данным следует оценка (7), так что

$$\| y_{n+1} \|_{(1)} \leqslant M_1 \left(\| y_0 \|_{(1)} + \sum_{j=0}^{n} \tau \| B_j^{-1} \varphi_j \|_{(1)} \right),$$

т. е. выполнена оценка (2) с $M_2 = M_1$ и $\|\varphi\|_{(2)}$, определенной согласно (10).

Имеет место следующее обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Если выполнено условие согласования норм* (10), *то из устойчивости схемы* (1) *по правой части следует ее равномерная устойчивость по начальным данным.*

Доказательство. Запишем решение задачи (8) в виде

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \tau T_{n+1,\, j+1} B_j^{-1} \varphi_j$$

и воспользуемся оценкой (9):

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \tau T_{n+1,\, j+1} B_j^{-1} \varphi_j \right\|_{(1)} \leqslant M_2 \sum_{j=0}^{n} \tau \| B_j^{-1} \varphi_j \|_{(1)}.$$

Вводя обозначение $\psi_j = B_j^{-1} \varphi_j$, перепишем это неравенство в виде

$$T_{n+1,1} \psi_0 + T_{n+1,2} \psi_1 + \ldots + T_{n+1,n+1} \psi_n \|_{(1)} \leqslant M_2 (\| \psi_0 \|_{(1)} + \| \psi_1 \|_{(1)} + \ldots + \| \psi_n \|_{(1)}).$$

Согласно определению устойчивости по правой части, функции ψ_j произвольны. Поэтому, полагая, например, $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$, получим для любой $\psi_0 \in \mathscr{B}_h$

$$\| T_{n+1,1} \psi_0 \|_{(1)} \leqslant M_2 \| \psi_0 \|_{(1)},$$

т. е. $\|T_{n+1,\, 1}\| \leqslant M_2$. Аналогично получим, что $\|T_{n+1,\, j+1}\|_{(1)} \leqslant M_2$ для $n=0, 1, \ldots$ и $j=0, 1, \ldots, n$. Но это и означает, что схема (1) равномерно устойчива по начальным данным (т. е. для (3) выполнена оценка (6) с $M_1 = M_2$).

Норма (10) не всегда удобна и естественна для оценки правой части задачи (1). Действительно, для стационарного уравнения $Ay = \varphi$ справедливо тождество $\|y\|_{(1)} = \|A^{-1}\varphi\|_{(1)}$, т. е. $\|\varphi\|_{(2)} = \|A^{-1}\varphi\|_{(1)}$. Для нестационарной задачи (1) имеет место аналогичная оценка решения y, через φ и $\varphi_{\bar{t}}$.

Теорема 3. *Если схема* (1) *равномерно устойчива по начальным данным и оператор* A^{-1} *существует, то для решения задачи* (1) *справед-*

лива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leqslant \|A_n^{-1}\varphi_n\|_{(1)} + M_1\{\|y_0\|_{(1)} + \|A_0^{-1}\varphi_0\|_{(1)} + M_1\sum_{j=1}^{n}\tau\|(A_j^{-1}\varphi_j)_{\bar{t},j}\|_{(1)}\}, \tag{11}$$

где $\psi_{\bar{t}} = (\psi_n - \psi_{n-1})/\tau$, M_1 — *константа из* (6).

Доказательство. Представим решение задачи (1) в виде суммы

$$y_n = v_n + w_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где w_{n+1} есть решение уравнения

$$A_n w_{n+1} = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad w_0 = w_1,$$

а функция v_n удовлетворяет уравнению

$$Bv_t + Av = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = -(B - \tau A)w_t.$$

Из равномерной устойчивости схемы (1) по начальным данным для функции v_n следует оценка (см. теорему 1)

$$\|v_{n+1}\|_{(1)} \leqslant M_1\left(\|v_0\|_{(1)} + \sum_{j=0}^{n}\tau\|B_j^{-1}\tilde{\varphi}_j\|_{(1)}\right).$$

Для оценки величины $\|B_j^{-1}\tilde{\varphi}_j\|_{(1)}$ заметим, что

$$\|B_j^{-1}\tilde{\varphi}_j\|_{(1)} = \|B_j^{-1}(B_j - \tau A_j)w_{t,j}\|_{(1)} = \|Sw_{t,j}\|_{(1)}.$$

По условию теоремы имеем $\|S_j\|_{(1)} \leqslant M_1$, так что

$$\|B_j^{-1}\tilde{\varphi}_j\|_{(1)} \leqslant M_1\|w_{t,j}\|_{(1)} = M_1\|(A_j^{-1}\varphi_j)_{\bar{t},j}\|_{(1)}.$$

Начальное значение v_0 оценим следующим образом:

$$\|v_0\|_{(1)} = \|y_0 - A_0^{-1}\varphi_0\|_{(1)} \leqslant \|y_0\|_{(1)} + \|A_0^{-1}\varphi_0\|_{(1)}.$$

Поэтому, используя оценку для $\|v_{n+1}\|_{(1)}$ и неравенство треугольника

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leqslant \|v_{n+1}\|_{(1)} + \|w_{n+1}\|_{(1)} = \|v_{n+1}\|_{(1)} + \|A_n^{-1}\varphi_n\|_{(1)},$$

приходим к оценке (11).

Теоремы 1 и 3 показывают, что устойчивость разностной схемы по правой части есть следствие ее устойчивости по начальным данным. Именно поэтому исследование устойчивости по начальным данным является центральным моментом теории устойчивости разностных схем.

4. О нелинейных разностных схемах. Можно ли в какой-то мере распространить определения и теоремы, сформулированные выше, на случай нелинейных разностных задач? Нетрудно заметить, что предыдущее изложение относилось лишь к линейным задачам и содержало следующие основные моменты: а) определение разностной схемы, б) определение устойчивости, в) элементарные теоремы об устойчивости. При

построении теории устойчивости нелинейных разностных схем нельзя оставить без изменения ни один из этих пунктов.

Действительно, рассмотрим хотя бы само определение разностной схемы. В линейном случае удается указать канонический вид, т. е. вид, к которому можно привести любую двухслойную разностную схему. В нелинейном случае самым общим видом двухслойной схемы является, очевидно, уравнение

$$A_{h,\tau}(y_n, y_{n+1}) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 \text{ задано},$$

где $A_{h,\tau}$ — нелинейный оператор от двух аргументов. Однако эта запись не содержит в сущности ничего, кроме определения двухслойности, и вряд ли может быть положена в основу теории. Поэтому приходится рассматривать более частные случаи нелинейных разностных схем. Так, непосредственным обобщением уравнения (1) являются следующие уравнения

$$B_{h,\tau}(y, y_t) + A_{h,\tau}(y) = \varphi,$$

$$B_{h,\tau}(y)\, y_t + A_{h,\tau}(y) = \varphi.$$

Здесь правая часть φ не зависит от решения, а запись $B_{h,\tau}(y)\, y_t$ означает, что $B_{h,\tau}$ зависит нелинейно от $y = y_n$ и действует как линейный оператор на y_t.

В дальнейшем будем рассматривать лишь уравнение

$$y_t + A_{h,\tau}(y) = 0, \quad y(0) = y_0, \tag{12}$$

где $A_{h,\tau}$ — нелинейный оператор в линейном нормированном пространстве $\mathscr{B}_h$, $A_{h,\tau}(0) = 0$, начальные данные y_0 и решение y_n определены в $\mathscr{B}_h$. Предполагается существование решения этой задачи хотя бы при малых $\|y_0\|$ или на малых отрезках времени. Отметим, что к уравнению (12) сводится уравнение

$$By_t + A_{h,\tau}(y) = 0$$

с линейным обратимым оператором B.

Переходя к определениям устойчивости, будем ориентироваться на сильно развитую теорию устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [13]) и аналогичные теории устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [14]—[16] и обыкновенных разностных уравнений [17]—[19]. Впервые определения устойчивости нелинейных разностных схем сформулированы, по-видимому, в [6].

В отличие от линейных задач, решения задачи (12), отвечающие различным начальным данным y_0, не обязательно являются одновременно устойчивыми или неустойчивыми. Поэтому рассматривается устойчивость не разностной схемы вообще, а устойчивость того или иного ее решения. В частности, важное значение имеет определение устойчивости нулевого решения ($y_n \equiv 0$) задачи (12), отвечающего начальным данным $y_0 = 0$.

Определение 5. Решение $y_n \equiv 0$ задачи (12) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, не зависящее от τ, h, y_0 и такое, что при всех $y_0 \in \mathscr{B}_h$, удовлетворяющих условию $\|y_0\| < \delta$, для решения y_n задачи (12) справедливо неравенство $\|y_n\| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$.

В частности, нулевое решение устойчиво, если при любых $y_0 \in \mathscr{B}_h$ (с достаточно малой $\|y_0\|$) для решения y_n справедлива оценка $\|y_n\| \leqslant \leqslant M\|y_0\|$ с константой $M > 0$, не зависящей от τ, h, y_0.

Нулевое решение задачи (12) называют устойчивым в целом, если оно устойчиво при любых $y_0 \in \mathscr{B}_h$ (а не только при достаточно малых $\|y_0\|$).

Пусть $y_n = y(t_n;\ y_0)$ и $v_n = v(t_n;\ v_0)$ — решения задачи (12), определяемые соответственно начальными данными y_0 и v_0. Будем считать v_n основным (невозмущенным) решением, а y_n — решением, полученным в результате возмущения начальных данных v_0 на величину $z_0 = y_0 - v_0$.

Определение 6. Решение $v_n = v(t_n;\ v_0)$ задачи (12) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, не зависящее от τ, h, y_0 и такое, что при любых $y_0 \in \mathscr{B}_h$, удовлетворяющих условию $\|y_0 - v_0\| < \delta$, справедлива оценка $\|y_n - v_n\| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$.

Уравнение для возмущения $z_n = y_n - v_n$ имеет вид

$$z_t + \tilde{A}(z) = 0, \quad z_0 = y_0 - v_0, \tag{13}$$

где $\tilde{A}(z) = A(v+z) - A(v)$. Таким образом, устойчивость решения $v_n = v(t_n;\ v_0)$ задачи (12) эквивалентна устойчивости нулевого решения $z_n \equiv 0$ задачи (13). В частности, если A — линейный оператор, то $\tilde{A}(z) = = A(z)$, и, следовательно, устойчивость любого решения линейной разностной схемы эквивалентна устойчивости ее нулевого решения. Поэтому в случае линейного оператора A имеет смысл говорить об устойчивости или неустойчивости разностной схемы.

Следует заметить, что в настоящее время не существует сколько-нибудь удовлетворительной теории устойчивости нелинейных разностных схем, хотя и ведутся многочисленные исследования в этом направлении, связанные в основном с изучением сходимости разностных схем с тем или иным типом нелинейности (см. [20] — [25]).

Представляются перспективными два направления в теории устойчивости нелинейных разностных схем.

Первое из них связано с формулировкой и доказательством теорем об устойчивости по первому приближению. Пусть оператор $A(y)$ дифференцируем в окрестности решения v, т. е.

$$\tilde{A}(z) = A(v+z) - A(v) = A'(v)z + \psi(z, v),$$

где $A'(v)$ действует линейно на z и $\|\psi(z, v)\|/\|z\| \to 0$ при $\|z\| \to 0$. Уравнение для возмущения (13) можно записать в виде уравнения

$$z_t + A'(v)z + \psi(z, v) = 0, \quad \psi(0, v) = 0, \quad z_0 = y_0 - v_0, \tag{14}$$

главная часть которого является линейной. Отбрасывая величины высшего порядка малости, получим линеаризованную разностную схему

$$z_t + A'(v)z = 0, \quad z(0) = z_0. \tag{15}$$

Нулевое решение $z_n \equiv 0$ задачи (14) называется устойчивым по первому приближению, если устойчива линейная задача (15). В ряде случаев можно установить теоремы об устойчивости по первому приближению, т. е. теоремы, в которых устойчивость нулевого решения разностной схемы (14) выводится как следствие устойчивости линеаризованной разностной схемы (15). Приведем пример такой теоремы.

Пусть схема (15) устойчива в том смысле, что при любых $z_0 \in \mathscr{B}_h$ выполняется оценка

$$\|z_{n+1}\| \leqslant \|z_n\|, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

и пусть существуют константы $M > 0$, $\alpha > 0$ такие, что справедлива оценка

$$\|\psi(z, v)\| \leqslant M\|z\|^{1+\alpha}. \tag{17}$$

Тогда нулевое решение задачи (14) устойчиво в том смысле, что при $t_n\|z_0\|^\alpha \leqslant \frac{1-\beta}{\alpha M}$, $0 < \beta < 1$, для (14) выполняется оценка

$$\|z_n\| \leqslant \beta^{-1/\alpha}\|z_0\|. \tag{18}$$

Для доказательства запишем (14) в виде

$$z_{n+1} = Sz_n - \tau\psi(z_n, v), \quad S = E - \tau A'(v),$$

воспользуемся неравенством треугольника и оценкой (17). Тогда получим $\|z_{n+1}\| \leqslant \|Sz_n\| + M\tau\|z_n\|^{1+\alpha}$.

Условие (16) означает, что $\|S\| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\|z_{n+1}\| \leqslant \|z_n\| + M\tau\|z_n\|^{1+\alpha}.$$

Отсюда получаем неравенство (18) (см., например, [21], лемма на стр. 79).

Другим перспективным направлением в теории устойчивости нелинейных разностных схем нам представляется обобщение прямого метода Ляпунова (см., например, [13]), который позволяет сводить исследование устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений к построению положительно определенной функции, монотонно убывающей на решении данной системы (функции Ляпунова). Метод функций Ляпунова нашел свое применение в теории устойчивости обыкновенных разностных уравнений (см. [19], [26]). Имеется обобщение прямого метода Ляпунова и на уравнения с частными производными (см. [15]), хотя здесь этот метод не является столь популярным. Заметим впрочем, что широко распространенный в теории линейных уравнений с частными производными метод энергетических неравенств является, по существу, частным случаем прямого метода

Ляпунова (при этом функция Ляпунова строится в виде некоторой квадратичной формы от решения задачи). Все это позволяет надеяться обобщить метод функций Ляпунова на нелинейные разностные схемы.

§ 2. Основная теорема и ее следствия

1. Устойчивость в гильбертовом пространстве. Сформулированные в предыдущем параграфе определения и теоремы имеют весьма общий характер в том смысле, что они справедливы в произвольных банаховых пространствах и предъявляют минимальные требования к операторам. Однако полученные условия малоэффективны при исследовании устойчивости конкретных схем. Поэтому целесообразно сузить определение устойчивости настолько, чтобы оказалось возможным получить достаточно общие и вместе с тем удобные для проверки критерии устойчивости. Это удается сделать в том случае, когда $\mathscr{B}_h$ — гильбертово пространство, а нормы определяются с помощью некоторого самосопряженного положительного оператора D.

Пусть H_h — линейное пространство (действительное или комплексное) со скалярным произведением $(y, v)_h$ и нормой $\|y\|_h=\sqrt{(y, y)_h}$. Мы предполагаем *конечномерность* пространства H_h при каждом фиксированном h и не исключаем возможности того, что $\dim H_h\to\infty$ при $h\to 0$. Пространство H_h будем называть основным (или исходным) гильбертовым пространством. В приложениях пространство H_h является обычно сеточным пространством L_2. Будем рассматривать также линейные операторы $A_h: H_h\to H_h$, областью определения которых является все пространство H_h, а множество значений принадлежит H_h. В дальнейшем индекс h будет часто опускаться, хотя он везде подразумевается.

Большую роль в последующем изложении будут играть операторные неравенства. Имея в виду комплексные гильбертовы пространства, мы используем операторные неравенства лишь для самосопряженных операторов. Неравенство $A\geqslant 0$ (соответственно $A>0$) означает, что $(Ay, y)\geqslant 0$ $\forall y\in H$ (соответственно $(Ay, y)>0$ $\forall 0\neq y\in H$). Если H — действительное пространство, то в неравенстве $A\geqslant 0$ может участвовать и несамосопряженный оператор A, но тогда это неравенство эквивалентно условию $A_0\geqslant 0$, где $A_0=0{,}5(A+A^*)$. Заметим, что если A_0 — положительный оператор (т. е. $A_0>0$), то существует A^{-1}. Для двух самосопряженных операторов A и B неравенство $A\geqslant B$ означает, что $A-B\geqslant 0$.

Правила действий с операторными неравенствами (кроме тривиальных обобщений числовых неравенств) устанавливают следующие леммы.

Лемма 1. *Если существует оператор L^{-1}, то эквивалентны операторные неравенства $Q\geqslant 0$, $L^*QL\geqslant 0$.*

Доказательство этой леммы опускаем ввиду элементарности.

Лемма 2. *Если A и B — самосопряженные положительные операторы, α и β — любые действительные числа, то эквивалентны неравенства $\alpha A\geqslant\beta B$, $\alpha B^{-1}\geqslant\beta A^{-1}$.*

Доказательство проводится на основе леммы 1 с помощью следующей цепочки эквивалентных преобразований:

$$\alpha A \geqslant \beta B, \quad \alpha E \geqslant \beta C \quad (C = A^{-1/2} B A^{-1/2}),$$

$$\alpha C^{-1/2} C^{-1/2} \geqslant \beta E, \quad \alpha A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} \geqslant \beta E, \quad \alpha B^{-1} \geqslant \beta A^{-1}.$$

Замечание. Если H — действительное пространство и хотя бы один из операторов A или B является несамосопряженным, то неравенства $A \geqslant B$, $B^{-1} \geqslant A^{-1}$ не являются, вообще говоря, эквивалентными.

Пусть в H задан самосопряженный положительный оператор D. Энергетическим пространством H_D называется линейное пространство H, в котором введены скалярное произведение $(y, v)_D = (Dy, v)$ и норма $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Заметим, что $\|y\|_D = \|D^{1/2} y\|$, и поэтому для любого $S: H \to H$ имеем

$$\|Sy\|_D = \|(D^{1/2} S D^{-1/2}) D^{1/2} y\| \leqslant \|D^{1/2} S D^{-1/2}\| \|y\|_D.$$

Поэтому можно положить $\|S\|_D = \|D^{1/2} S D^{-1/2}\|$.

Основная цель настоящего параграфа — получение эффективных признаков устойчивости (в энергетических пространствах) разностной схемы

$$By_t + Ay = 0, \quad y(0) = y_0. \tag{1}$$

Определение 1. Разностная схема (1) называется устойчивой в пространстве H_D, если при любых $y_n \in H$ и при всех $n = 0, 1, \ldots$ для решения y_{n+1} задачи (1) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_n\|_D. \tag{2}$$

Таким образом, устойчивость в этом смысле есть равномерная устойчивость по начальным данным, причем константа M_1 равна единице (см. определение 3 из § 1). Записывая (1) в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad S_n = E - \tau B_n^{-1} A_n, \tag{3}$$

убеждаемся в том, что устойчивость в смысле определения 1 эквивалентна оценке $\|S_n\|_D \leqslant 1$.

2. Основная теорема. Будем рассматривать схему (1) с операторами A и B, действующими в гильбертовом пространстве H. Сформулируем основную теорему, которая доказывает устойчивость схемы (1) в энергетическом пространстве H_A, построенном по оператору A схемы (1).

Теорема 1. *Пусть оператор A является самосопряженным и положительным и не зависит от n. Если существует B^{-1}, то для устойчивости схемы* (1) *в H_A необходимо и достаточно выполнение операторного неравенства*

$$B_0 \geqslant 0{,}5\tau A, \tag{4}$$

где $B_0 = 0{,}5(B + B^*)$.

Ввиду важности этой теоремы, приведем два ее доказательства. Первое основано на энергетических неравенствах, а второе — на оценке нормы оператора перехода.

Доказательство 1. Заметим прежде всего, что для самосопряженного постоянного (не зависящего от n) оператора A и любых $y, y_t \in H$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re}(Ay, y_t) = 0{,}5\,(Ay, y)_t - 0{,}5\tau\,(Ay_t, y_t). \tag{5}$$

Умножая (1) скалярно на y_t и учитывая (5), получим тождество

$$((B_0 - 0{,}5\tau A)\,y_t, y_t) + 0{,}5\,(Ay, y)_t = 0. \tag{6}$$

Таким образом, если выполнено неравенство (4), то из (6) следует неравенство

$$(Ay_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Ay_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

означающее устойчивость схемы (1) в H_A. Обратно, из устойчивости в H_A и тождества (6) следует неравенство

$$((B_0 - 0{,}5\tau A)\,y_t, y_t) \geqslant 0,$$

или, учитывая, что $y_t = -B^{-1}Ay$, неравенство

$$((B_0 - 0{,}5\tau A)\,B^{-1}Ay_n, B^{-1}Ay_n) \geqslant 0.$$

В силу произвольности $y_n \in H$ это условие эквивалентно операторному неравенству

$$(B^{-1}A)^*\,(B_0 - 0{,}5\tau A)\,(B^{-1}A) \geqslant 0,$$

которое в свою очередь эквивалентно (см. лемму 1) неравенству (4).

Доказательство 2. Пусть $S = E - \tau B^{-1}A$ — оператор перехода схемы (1). Устойчивость схемы (1) в H_A эквивалентна неотрицательности функционала

$$I[y] = \|y\|_A^2 - \|Sy\|_A^2 = (Ay, y) - (ASy, Sy).$$

После элементарных преобразований получаем

$$I[y] = 2\tau \operatorname{Re}(y, AB^{-1}Ay) - \tau^2 (AB^{-1}Ay, B^{-1}Ay)$$

или, полагая $x = B^{-1}Ay$,

$$I[y] = J[x] = 2\tau\left[(B_0 x, x) - \frac{\tau}{2}(Ax, x)\right].$$

В силу произвольности y и обратимости оператора $B^{-1}A$ неотрицательность функционала $I[y]$ эквивалентна условию (4).

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то неравенство* (4) *эквивалентно оценке* $\|S\|_A \leqslant 1$, *где*

$$\|S\|_A = \|A^{1/2}SA^{-1/2}\| = \|E - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\|.$$

Замечания. 1. Теорема 1 не предъявляет никаких требований гладкости по t и самосопряженности к оператору B. Не требуется перестановочность операторов A и B.

2. Если H — действительное пространство, то (4) эквивалентно неравенству $B \geqslant 0{,}5\tau A$.

3. Переход к переменному оператору A, т. е. к $A = A(t_n)$, не связан ни с какими принципиальными трудностями, но требует несколько большего объема выкладок. В частности, можно показать, что если $A = A_n$ удовлетворяет условию Липшица

$$(1 - c\tau) A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant (1 + c\tau) A_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от τ, h, то условие (4) достаточно ля оценки $\| y_{n+1} \|_{A_{n+1}} \leqslant (1 + c\tau) \| y_n \|_{A_n}$.

3. Следствия основной теоремы. Сформулируем еще две теоремы об устойчивости двухслойной разностной схемы, которые являются по существу следствиями теоремы 1. Первая из этих теорем относится к случаю самосопряженного оператора B.

Теорема 2. *Пусть оператор B является самосопряженным и положительным и не зависит от n. Если существует A^{-1}, то для устойчивости схемы* (1) *в H_B необходимо и достаточно выполнение операторного неравенства*

$$(A^{-1})_0 \geqslant 0{,}5\tau B^{-1}, \tag{8}$$

где $(A^{-1})_0 = 0{,}5\,(A^{-1} + A^{*-1})$.

Доказательство. Так как по условию теоремы операторы A и B невырожденные, то схема (1) эквивалентна схеме

$$BA^{-1}By_t + By = 0,$$

для которой применима теорема 1. Необходимое и достаточное условие устойчивости (4) принимает вид

$$B\,(A^{-1})_0 B \geqslant 0{,}5\tau B$$

и эквивалентно, согласно лемме 1, условию (8).

Замечания. 1. Для практической проверки более удобным оказывается эквивалентное (8) неравенство $A_0 \geqslant 0{,}5\tau A^* B^{-1} A$. В частности, если (1) — явная схема, т. е. $B = E$, то необходимое и достаточное условие устойчивости в $H_E = H$ принимает вид $A_0 \geqslant 0{,}5\tau A^* A$.

2. Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $A^* = A > 0$, то для устойчивости в H_B необходимо и достаточно выполнение неравенства $B \geqslant 0{,}5\tau A$.

Следующая теорема относится к устойчивости по правой части разностной схемы

$$By_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть оператор A является самосопряженным, положительным и не зависит от n. Если выполнено условие* (4), *то для ре-*

шения задачи (9) *справедлива оценка*

$$\| y_{n+1} \|_A \leqslant \| y_0 \|_A + \| \varphi_0 \|_{A^{-1}} + \| \varphi_n \|_{A^{-1}} + \sum_{j=1}^{n} \tau \| \varphi_{\bar{t},j} \|_{A^{-1}}. \tag{10}$$

Доказательство. Так как схема (9) при условии (4) равномерно устойчива по начальным данным с константой $M_1=1$ (см. (6) из § 1), то, согласно теореме 3 из § 1, для ее решения справедлива оценка (11) из § 1, которая в данном случае принимает вид

$$\| y_{n+1} \|_A \leqslant \| y_0 \|_A + \| A^{-1}\varphi_0 \|_A + \| A^{-1}\varphi_n \|_A + \sum_{j=1}^{n} \tau \| A^{-1}\varphi_{\bar{t},j} \|_A$$

и совпадает с оценкой (10).

Замечание. При условиях теоремы 2 для задачи (9) справедлива оценка

$$\| y_{n+1} \|_B \leqslant \| y_0 \|_B + \sum_{j=0}^{n} \tau \| \varphi_j \|_{B^{-1}}.$$

4. Трехслойные разностные схемы. Трехслойной разностной схемой называется операторно-разностное уравнение, связывающее значение неизвестного $y(t)$ в три момента времени t_{n-1}, t_n и t_{n+1}. Положим

$$y = y^n = y(t_n), \quad y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau}, \quad y_{\bar{t}t} = \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2}.$$

Пусть $A = A_{h,\tau}(t_n)$, $B = B_{h,\tau}(t_n)$, $R = R_{h,\tau}(t_n)$ — линейные операторы, действующие в H_h. Будем рассматривать трехслойную разностную схему, записанную в каноническом виде (см. [4])

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y^0, y^1 \text{ заданы}. \tag{11}$$

Будем считать схему (11) *разрешимой* относительно y^{n+1}, т. е. предполагать существование оператора $(B+2\tau R)^{-1}$.

Покажем, что разностную схему (11) можно трактовать как двухслойную схему

$$\mathcal{B} y_t + \mathcal{A} y = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_1 \text{ задано}, \tag{12}$$

определенную в некотором вспомогательном пространстве. Тем самым теория устойчивости трехслойных разностных схем (включая и определения устойчивости) будет сведена к теории устойчивости двухслойных схем.

Итак, пусть операторы схемы (11) определены в гильбертовом пространстве H. Введем в рассмотрение пространство $H^2 = H \oplus H$, прямую сумму двух экземпляров пространства H, как множество векторов $y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, $y^{(1)}, y^{(2)} \in H$, в котором операции сложения и умножения на число вводятся покоординатно. Скалярное произведение векторов $y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, $v = \{v^{(1)}, v^{(2)}\}$ определяется как сумма $(y, v) = (y^{(1)}, v^{(1)}) +$

$+(y^{(2)}, v^{(2)})$, где $(y^{(\alpha)}, v^{(\alpha)})$ — скалярное произведение в H. Оператор $\mathcal{D}: H^2 \to H^2$ — это матрица

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

элементами которой являются операторы $D_{\alpha\beta}: H \to H$. Если $\mathcal{D}$ — самосопряженный и положительный в H^2 оператор, то можно рассматривать энергетическое пространство $H^2_{\mathcal{D}}$ со скалярным произведением $(y, v)_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}y, v)$, $y, v \in H^2$, и нормой $\|y\|_{\mathcal{D}} = \sqrt{(\mathcal{D}y, y)}$, $y \in H^2$.

Обратимся к разностной схеме (11). Решением задачи (11) в момент $t_n = n\tau$ будем называть вектор

$$y_n = \left\{\frac{y^n + y^{n-1}}{2}, y^n - y^{n-1}\right\} = \left\{\frac{y^n + y^{n-1}}{2}, \tau y^n_{\bar{t}}\right\}, \tag{13}$$

где y^n, y^{n-1} удовлетворяют уравнению (11). Введем также оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & R - \frac{1}{4}A \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Тогда в результате несложных выкладок, использующих лишь линейность операторов A, B, R, получим, что схема (11) эквивалентна двухслойной схеме (12) с оператором

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B + \frac{\tau}{2}A & \tau\left(R - \frac{1}{4}A\right) \\ -\tau\left(R - \frac{1}{4}A\right) & \frac{\tau}{2}\left(R - \frac{1}{4}A\right) \end{pmatrix} \tag{15}$$

и правой частью $\varphi_n = \{\varphi^n, 0\}$.

Схема (12) разрешима (оператор $\mathcal{B}^{-1}$ существует), если обратимы операторы $B + 2\tau R$, $R - \frac{1}{4}A$.

Будем называть трехслойную разностную схему (11) устойчивой, если устойчива (в смысле определений § 1) эквивалентная ей двухслойная схема (12). Для исследования устойчивости по начальным данным будем рассматривать однородное уравнение

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0, \quad y^0, y^1 \text{ заданы}, \tag{16}$$

эквивалентное двухслойной схеме

$$\mathcal{B}y_t + \mathcal{A}y = 0, \quad y_1 \text{ задано}. \tag{17}$$

Определение 2. Пусть задан самосопряженный и положительный оператор $\mathcal{D}: H^2 \to H^2$. Разностная схема (16) называется устойчивой в пространстве $H^2_{\mathcal{D}}$, если при любых $y_n \in H^2$ для решения y_{n+1}

эквивалентной ей задачи (17) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{\mathscr{D}} \leqslant \|y_n\|_{\mathscr{D}}, \quad n=1,\ 2,\ \ldots .$$

5. Теоремы об устойчивости трехслойных разностных схем.

Теорема 4. *Пусть A и R — самосопряженные операторы, не зависящие от n. Определим оператор $\mathscr{A}$ согласно* (14) *и предположим, что*

$$A>0, \quad R>\frac{1}{4}A. \tag{18}$$

Условие

$$B_0=0{,}5\,(B^*+B)\geqslant 0 \tag{19}$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (16) *в пространстве $H^2_{\mathscr{A}}$.*

Доказательство. Применим к схеме (17) теорему 1. Все условия этой теоремы выполнены: оператор $\mathscr{A}$ является самосопряженным и положительным в H^2, оператор $\mathscr{B}^{-1}$ существует. Таким образом, остается проверить неравенство $\mathscr{B}_0\geqslant 0{,}5\tau\mathscr{A}$. Согласно (15) имеем

$$\mathscr{B}^*=\begin{pmatrix} B^*+\frac{\tau}{2}A & -\tau\left(R-\frac{1}{4}A\right) \\ \tau\left(R-\frac{1}{4}A\right) & \frac{\tau}{2}\left(R-\frac{1}{4}A\right)\end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_0=\begin{pmatrix} B_0+\frac{\tau}{2}A & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{2}\left(R-\frac{1}{4}A\right)\end{pmatrix},$$

так что

$$\mathscr{B}_0-0{,}5\tau\mathscr{A}=\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

и неотрицательность в H^2 этого оператора эквивалентна неотрицательности B_0 в H.

Замечание. Норма $\|y_n\|_{\mathscr{A}}$, в которой гарантируется устойчивость схемы, определяется формулой

$$\|y_n\|^2_{\mathscr{A}}=\frac{1}{4}(A(y^n+y^{n-1}),\ y^n+y^{n-1})+\left(\left(R-\frac{1}{4}A\right)(y^n-y^{n-1}),\ y^n-y^{n-1}\right). \tag{20}$$

Если усилить требования (18) и предположить, что

$$A>0, \quad R\geqslant\frac{1+\varepsilon}{4}A, \quad \varepsilon>0, \tag{21}$$

то норму $\|y_n\|_{\mathscr{A}}$ можно оценить сверху и снизу более простыми нормами (см. [27])

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\|y^n\|_A\leqslant\|y_n\|_{\mathscr{A}}\leqslant\|y^{n-1}\|_A+\tau\|y^n_{\bar t}\|_R. \tag{22}$$

Докажем теперь теорему об устойчивости трехслойной разностной схемы (11) по правой части.

Теорема 5. *При тех же условиях, что и в теореме* 4, *для задачи* (11) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{\mathscr{A}} \leqslant \|y_1\|_{\mathscr{A}} + \|\varphi_1\|_{A^{-1}} + \|\varphi_n\|_{A^{-1}} + \sum_{j=2}^{n} \tau \|\varphi_{\bar{t}}^{j}\|_{A^{-1}}, \tag{23}$$

где $\|y_n\|_{\mathscr{A}}$ *определяется согласно* (20).

Доказательство. Применим к схеме (12) теорему 3. Оценка (10) в данном случае принимает вид

$$\|y_{n+1}\|_{\mathscr{A}} \leqslant \|y_1\|_{\mathscr{A}} + \|\varphi_1\|_{\mathscr{A}^{-1}} + \|\varphi_n\|_{\mathscr{A}^{-1}} + \sum_{j=2}^{n} \tau \|\varphi_{\bar{t},j}\|_{\mathscr{A}^{-1}},$$

откуда, учитывая тождество $(\mathscr{A}^{-1}\varphi_n, \varphi_n) = (A^{-1}\varphi^n, \varphi^n)$, справедливое для $\varphi_n = \{\varphi^n, 0\}$ и оператора (14), получаем оценку (23).

Теоремы 4 и 5 предполагают самосопряженность операторов A и R. Случай несамосопряженных операторов A и R представляет принципиальные трудности, и здесь не удается непосредственно перейти к двухслойным схемам. Приведем без доказательства две теоремы (см. [28]), в которых рассматриваются некоторые частные случаи схемы (16) с несамосопряженными операторами, не зависящими от n. Будем пользоваться представлением

$$B_0 = 0{,}5\,(B + B^*), \quad B_1 = 0{,}5\,(B - B^*), \quad B = B_0 + B_1,$$

$$R_0 = 0{,}5\,(R + R^*), \quad R_1 = 0{,}5\,(R - R^*), \quad R = R_0 + R_1.$$

Теорема 6. *Пусть* $A^* = A > 0$, $B_0 > 0$ *и выполнены условия перестановочности*

$$R_0 B_0^{-1} R_1 = R_1 B_0^{-1} R_0, \quad B_1 B_0^{-1} R_1 = R_1 B_0^{-1} B_1, \quad A B_0^{-1} R_1 = R_1 B_0^{-1} A.$$

Схема (16) *устойчива при условии*

$$R_0 - \frac{1}{4} A > R_1 B_0^{-1} B_1 + \tau^2 R_1^* B_0^{-1} A B_0^{-1} R_1.$$

Норму, в которой гарантируется устойчивость, не выписываем ввиду ее сложности. Отметим лишь, что в случае самосопряженного оператора R (когда $R_1 = 0$) она переходит в норму (20).

В следующей теореме рассматривается случай кососимметричного оператора B.

Теорема 7. *Пусть* $A^* = A$, $R^* = R$, $B^* = -B$ *и оператор* B^{-1} *существует. Если выполнены условия перестановочности*

$$AR = RA, \quad BR = RB, \quad BA = AB,$$

то схема (16) *устойчива при условии*

$$B^* B + \tau^2 A\,(4R - A) > 0.$$

Замечание. Положительности операторов A и $4R-A$ в этой теореме не требуется.

Задача 1. Существенны ли условия перестановочности в теоремах 6 и 7? Отметим, что в случае самосопряженных операторов A и R никакой перестановочности не требуется (см. теорему 4).

Задача 2. Рассмотрим неравномерную сетку по времени, когда $\tau=\tau_n$, $n=1, 2, \ldots$. В этом случае трехслойная схема в каждый момент времени зависит от двух параметров τ_n и τ_{n+1}, и, следовательно, уравнение (11) нельзя принять в качестве канонического вида трехслойной разностной схемы. Представляет интерес исследование устойчивости трехслойной разностной схемы на неравномерной сетке и, в частности, нахождение удачного канонического вида такой схемы. По-видимому, эта задача близка к задаче об устойчивости схемы (11) с переменными операторами B, R, A.

Задача 3. Для уравнений с частными производными на практике редко используют схемы с числом слоев, большим трех. Однако с общематематической точки зрения, может быть, представило бы интерес распространение изложенных в § 2 результатов на случай схем с произвольным числом слоев. Назовем $(m+1)$-слойной разностной схемой операторно-разностное уравнение m-го порядка

$$B_m y^{n+m} + B_{m-1} y^{n+m-1} + \ldots + B_1 y^{n+1} + B_0 y^n = 0, \quad n=0, 1, \ldots, \tag{24}$$

где $B_\alpha : H_h \to H_h$, $\alpha=0, 1, \ldots, m$, заданы $y^0, y^1, \ldots, y^{m-1}$.

Эту схему можно записать в виде эквивалентной двухслойной схемы в пространстве $H^m = H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$ (см.; например, [1]). Основная задача заключается в формулировке условий устойчивости схемы (24) в терминах операторов B_α, $\alpha=0, 1, \ldots, m$. Для частных случаев четырехслойных и пятислойных схем эта задача решена в [1].

Решение следующих алгебраических задач облегчило бы решение задачи 3.

Задача 4. Пусть $B_{ij} : H \to H$, $i, j=1, 2, \ldots, m$,— линейные операторы, действующие в H. Будем рассматривать матрицу

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m1} & B_{m2} & \ldots & B_{mm} \end{pmatrix} \tag{25}$$

как оператор, действующий в H^m. Требуется найти (может быть, при тех или иных дополнительных предположениях относительно B_{ij}) необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{B}^{-1}$.

Задача 5. Пусть оператор (25) является самосопряженным в H^m (в этом случае $B_{ji}=B_{ij}^*$). Сформулировать в терминах операторов B_{ij} необходимые и достаточные условия неотрицательности оператора $\mathcal{B}$.

В случае $m=2$ задачи 4 и 5 рассматривались, например, в [1].

§ 3. Необходимые условия устойчивости

1. Формулировка критерия устойчивости в терминах оператора перехода. В предыдущем параграфе устойчивость схемы

$$By_t + Ay = 0, \quad y_0 \text{ задано}, \tag{1}$$

исследовалась в нормах пространств H_A или H_B. Нетрудно получить необходимое и достаточное условие устойчивости в смысле определения 1 § 2 в норме любого пространства H_D, порожденного самосопряженным положительным оператором D. Допуская, как обычно, существование оператора B^{-1}, запишем (1) в виде

$$y_{n+1} = Sy_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \tag{2}$$

и предположим, что задан самосопряженный положительный оператор $D : H \to H$.

Теорема 1. *Для устойчивости схемы* (1) *в пространстве* H_D *необходимо и достаточно выполнение операторного неравенства*

$$D \geqslant S^*DS. \tag{3}$$

Действительно, согласно определению 1 из § 2, устойчивость в H_D означает выполнение неравенства $(DSy_n, Sy_n) \leqslant (Dy_n, y_n)$ для всех $y_n \in H$, т. е. выполнение операторного неравенства (3). Несмотря на тривиальность, критерий (3) имеет большую общность. Здесь не делается никаких предположений относительно самосопряженности операторов A и B; пространство H может быть как действительным, так и комплексным; под схемой (1) можно понимать не только двухслойную схему, но и многослойную, так что при соответствующем определении пространств и операторов неравенство (3) представляет собой критерий устойчивости многослойных разностных схем. Единственное предположение относительно схемы (1) — существование оператора B^{-1}. Вместе с тем критерий (3), в отличие от ранее полученных критериев, не является конструктивным, поскольку, во-первых, не указывается правило построения оператора D для заданной схемы и, во-вторых, неравенство (3) не является линейным относительно операторов A и B и неудобно для проверки.

Подставляя в (3) выражение для оператора перехода, можно переформулировать это неравенство в терминах операторов A и B:

$$(DB^{-1}A)_0 \geqslant 0{,}5\tau\,(B^{-1}A)^*\,D\,(B^{-1}A). \tag{4}$$

Отсюда как частный случай следуют теоремы 1 и 2 из § 2 об устойчивости в H_A и H_B. Действительно, если $A^* = A > 0$ и $D = A$, то неравенство (4) принимает вид

$$A\,(B^{-1})_0\,A \geqslant 0{,}5\tau A\,(B^*)^{-1}\,AB^{-1}A.$$

Так как оператор $(B^{-1}A)^{-1}$ существует, последнее неравенство эквивалентно (лемма 1 из § 2) условию

$$B_0 \geqslant 0{,}5\tau A. \tag{5}$$

Если же $B^*=B>0$ и $D=B$, то (4) совпадает с неравенством $A_0\geqslant \geqslant 0{,}5\,\tau A^*B^{-1}A$ и эквивалентно (при дополнительном предположении существования A^{-1}) неравенству

$$(A^{-1})_0\geqslant 0{,}5\tau B^{-1}. \tag{6}$$

Задача 1. Пусть заданы операторы A и B. Что можно сказать о существовании и единственности оператора $D=D^*>0$, удовлетворяющего неравенству (3)? На языке разностных схем эту задачу можно сформулировать так: всегда ли для схемы (1) найдется норма, в которой эта схема устойчива, и если найдется, то будет ли эта норма единственной?

В такой общей постановке ответ на оба вопроса отрицательный. В п. 3 выделены классы схем, не являющихся устойчивыми ни в каких нормах (абсолютно неустойчивые схемы). Далее, как показано в § 2, схема (1) с самосопряженными и положительными операторами A и B устойчива при условии $B\geqslant 0{,}5\,\tau A$ как в норме H_A, так и в норме H_B, и, следовательно, в данном случае неравенству (3) удовлетворяют по крайней мере два оператора A и B. Более того, если два самосопряженных положительных оператора D_1 и D_2 удовлетворяют неравенству (3), то и любая их линейная комбинация $\alpha D_1+\beta D_2$ с неотрицательными коэффициентами ($\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha^2+\beta^2>0$) удовлетворяет (3). Представляет интерес полное описание множества операторов D, удовлетворяющих условию (3) (при тех или иных предположениях относительно операторов A и B).

Следующая задача примыкает к задаче 1 и содержит более узкую и четкую постановку вопроса.

Задача 2. При каких условиях эквивалентны неравенства

$$D_1\geqslant S^*D_1S, \tag{7}$$

$$D_2\geqslant S^*D_2S \tag{8}$$

(подразумевается, что D_1, D_2 — самосопряженные положительные операторы)? Иначе говоря, когда устойчивость схемы (1) в некотором пространстве H_{D_1} эквивалентна устойчивости в H_{D_2}? Ответ желательно сформулировать в виде некоторой связи между операторами D_1 и D_2 и, может быть, дополнительных требований к операторам S, A, B.

Очевиден частный случай $D_2=\alpha D_1$, $\alpha>0$. Нетрудно получить еще одно условие эквивалентности. Именно, с помощью некоторого обратимого оператора L преобразуем (7) к виду

$$L^*D_1L\geqslant L^*S^*D_1SL.$$

Следовательно, если существует обратимый оператор L, перестановочный с S, то (7) эквивалентно (8) с $D_2=L^*D_1L$. В терминах операторов A и B условие перестановочности принимает вид

$$LB^{-1}A=B^{-1}AL. \tag{9}$$

Пусть, например, $A^*=A>0$. Тогда при условии (5) схема (1) устойчива в H_A. Наряду с этим, выполнено (9) с $L=A^{-1}B$, и, следовательно, схема (1) устойчива в H_{D_2}, где $D_2=B^*A^{-1}B$. В каких еще нормах устойчива схема (1) при условии (5)?

2. Необходимые условия устойчивости. Исследуя устойчивость в конкретных пространствах, например в пространствах H_A или H_B, мы не можем высказать никаких утверждений относительно устойчивости той же схемы в каком-либо другом пространстве H_D. Неравенство (3) удается эффективно использовать для получения необходимых условий устойчивости схемы (1) в любом пространстве H_D. На протяжении этого параграфа будем считать, что операторы A, B, D и т. д. представляют собой числовые квадратные матрицы, размерность которых может зависеть от h. Это предположение, характерное для операторов теории разностных схем, обеспечивает существование дискретного конечного набора собственных значений соответствующих операторов. Необходимое условие устойчивости схемы (1) формулируется в терминах собственных значений оператора S и состоит в том, что спектральный радиус этого оператора не должен превосходить единицы.

Теорема 2. *Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то собственные значения оператора перехода* S *лежат внутри или на границе единичного круга.*

Доказательство. Из существования оператора $D^{-1/2}$ следует, согласно лемме 1 из § 2, эквивалентность (3) операторному неравенству

$$\tilde{S}^*\tilde{S}\leqslant E, \quad \tilde{S}=D^{1/2}SD^{-1/2}.$$

Это неравенство означает, что норма оператора $\tilde{S}$ не превосходит единицы, и, следовательно, все его собственные значения не выходят за пределы единичного круга. Утверждение теоремы теперь следует из подобия операторов $\tilde{S}$ и S.

Возможны различные переформулировки этой теоремы в терминах операторов A и B. В приведенном ниже варианте теоремы 2 проблема устойчивости связывается с поведением характеристических корней обобщенной задачи на собственные значения.

Теорема 3. *Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то все собственные значения* λ *задачи*

$$Ax=\lambda Bx \tag{10}$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0{,}5\tau|\lambda|^2. \tag{11}$$

Доказательство. Собственные значения s оператора S определяются уравнением

$$(E-\tau B^{-1}A)x=sx,$$

которое можно переписать в виде

$$(B-\tau A)x=sBx,$$

т. е. в виде уравнения (10) с $\lambda=(1-s)/\tau$. Условие $|s|\leqslant 1$ совпадает при этом с условием (11).

Таким образом, необходимые условия устойчивости в произвольном пространстве H_D формулируются уже не в терминах операторных неравенств, а в виде ограничений на спектр соответствующих операторов.

Задача 3. Верно ли (может быть, с некоторыми уточнениями) утверждение о том, что если спектральный радиус оператора S не превосходит единицы, то существует самосопряженный и положительный оператор D, удовлетворяющий неравенству (3)?

Это утверждение, аналогичное теореме Ляпунова в теории устойчивости дифференциальных уравнений (см. [29]), справедливо, если спектральный радиус оператора S меньше единицы (см. [18]). Случай собственных значений, лежащих на единичной окружности, рассмотрен в [30] (глава 6). Определенная связь между спектром матрицы S и существованием оператора D, удовлетворяющего неравенству (3), указана в теореме Крейса (см. [7], § 4.9).

Следует отметить, что даже если сформулированное утверждение верно, то норма $\|\cdot\|_D$ зависит от h (фактически от размерности пространства H_h) и может при $|h|\to 0$ оказаться несогласованной ни с какой «естественной» нормой. Соответствующий пример приведен в [1] (стр. 393). Поэтому в приложениях приходится следить за тем, чтобы норма $\|\cdot\|_D$ удовлетворяла дополнительным требованиям типа требований эквивалентности одной из норм $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$.

Связь между спектральными свойствами операторов разностной схемы и ее устойчивостью изучалась в работах [8], [9].

Итак, если A и B — произвольные операторы, то необходимые условия устойчивости имеют вид (11), где под λ можно понимать собственные значения оператора $B^{-1}A$.

Задача 4. Эквивалентно ли условие (11) какому-либо операторному неравенству между операторами A и B?

Эта задача имеет, по-видимому, смысл лишь при дополнительных предположениях относительно операторов A и B. Ответ утвердительный, если A и B — самосопряженные операторы и хотя бы один из них положителен. В этом случае справедлива

Теорема 4. *Предположим, что в схеме* (1) *операторы A и B самосопряженные, не зависят от n и хотя бы один из операторов A или B положителен. Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве H_D, то выполнено операторное неравенство*

$$B\geqslant 0{,}5\tau A. \tag{12}$$

Обратно, если выполнено (12), *то схема* (1) *устойчива* (*в пространстве H_A, если $A>0$, и в пространстве H_B, если $B>0$*).

Доказательство. Достаточность условия (12) доказана в § 2. Докажем необходимость, а именно, покажем, что при условиях теоремы неравенство (12) эквивалентно требованию $|s|\leqslant 1$ для всех собственных чисел s оператора перехода. Пусть $A>0$. Согласно теореме 2, соб-

ственные значения оператора $S=E-\tau B^{-1}A$, а следовательно, и подобного ему оператора $\tilde{S}=A^{1/2}SA^{-1/2}=E-\tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ лежат внутри или на границе единичного круга,

$$|1-\tau\lambda(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2})|\leqslant 1.$$

Так как $\tilde{S}$ — самосопряженный оператор, последнее условие эквивалентно операторному неравенству

$$-E\leqslant E-\tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\leqslant E,$$

откуда эквивалентными преобразованиями получаем (12). В случае положительности оператора B проходит то же самое доказательство, если в качестве $\tilde{S}$ взять оператор $\tilde{S}=B^{1/2}SB^{-1/2}=E-\tau B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

Покажем, как можно формально из необходимых условий (11) получить достаточные условия устойчивости в случае, когда лишь один из операторов A или B является положительным. Пусть $B^*=B>0$. Тогда спектр оператора $B^{-1}A$ совпадает со спектром подобного ему оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$, и неравенство (1) можно понимать как неравенство для собственных значений оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$:

$$\operatorname{Re}\lambda(B^{-1/2}AB^{-1/2})\geqslant 0{,}5\tau\lambda^*(B^{-1/2}AB^{-1/2})\,\lambda(B^{-1/2}AB^{-1/2}).$$

Заменяя в этом неравенстве собственные значения самими операторами (разумеется, такой переход неэквивалентен), получим операторное неравенство

$$B^{-1/2}A_0B^{-1/2}\geqslant 0{,}5\tau B^{-1/2}A^*B^{-1}AB^{-1/2},$$

которое эквивалентно условию

$$A_0\geqslant 0{,}5\tau A^*B^{-1}A.$$

В § 2 показано, что это условие достаточно для устойчивости схемы (1) в H_B. Рассмотрим еще случай $A^*=A>0$. Тогда величины λ^{-1} из (10) являются собственными значениями оператора $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Переписывая (11) в виде $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\geqslant 0{,}5\,\tau$ и заменяя λ^{-1} оператором $A^{-1/2}BA^{-1/2}$, приходим к операторному неравенству $A^{-1/2}B_0A^{-1/2}\geqslant 0{,}5\tau E$, т. е. к условию $B_0\geqslant 0{,}5\tau A$, необходимому и достаточному для устойчивости в H_A.

3. Абсолютно неустойчивые схемы. Теорема 3 позволяет выделить среди схем вида (1) абсолютно неустойчивые схемы, т. е. схемы, неустойчивые в любых нормах.

Пусть λ — какое-либо собственное значение оператора $B^{-1}A$. Будем использовать обозначения $\lambda_0=\operatorname{Re}\lambda$, $\lambda_1=\operatorname{Im}\lambda$.

Теорема 5. *Если схема* (1) *устойчива в какой-либо норме, то действительные и мнимые части всех собственных значений оператора* $B^{-1}A$ *удовлетворяют неравенствам*

$$1)\ 0\leqslant 0{,}5\,\tau\lambda_0\leqslant 1,\qquad 2)\ \lambda_1^2\leqslant 2\,\lambda_0/\tau,$$

причем знаки равенства в первом случае возможны лишь при $\lambda_1=0$.

Доказательство. Переписывая (11) в виде $\lambda_0 \geqslant 0{,}5\tau(\lambda_0^2+\lambda_1^2)$, убеждаемся в том, что $\lambda_0 \geqslant 0$ и, если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$. Отсюда же имеем $\lambda_1^2 \leqslant \lambda_0\left(\frac{2}{\tau}-\lambda_0\right)$, т. е. $\lambda_1^2 \leqslant 2\lambda_0/\tau$ и $\frac{2}{\tau}-\lambda_0 \geqslant 0$.

Следствие 1. *Схема*

$$By_t + Ay = 0, \quad A^* = -A, \ B^* = B > 0, \tag{13}$$

абсолютно неустойчива.

Действительно, согласно теореме 5, для устойчивости схемы (13) в какой-либо норме необходимо, чтобы собственные значения оператора $B^{-1}A$ лежали в правой полуплоскости. Но это условие не выполнено, так как $B^{-1}A$ подобен кососимметричному оператору $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ и все его собственные значения чисто мнимые.

Следствие 2. *Схема*

$$By_t + Ay = 0, \quad A^* = A > 0, \ B^* = -B,$$

абсолютно неустойчива.

Вытекает из подобия оператора $B^{-1}A$ кососимметричному оператору $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$.

Применим теорему 2 для получения необходимых условий устойчивости трехслойной разностной схемы

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0, \quad y^0, y^1 \text{ заданы.} \tag{14}$$

Запишем уравнение (14) в виде эквивалентной системы

$$\begin{aligned} y^n &= \qquad\qquad y^n, \\ y^{n+1} &= -B_2^{-1}B_0 y^{n-1} - B_2^{-1}B_1 y^n, \end{aligned}$$

где $B_2 = B + 2\tau R$, $B_1 = 2\tau(A - 2R)$, $B_0 = -B + 2\tau R$, и введем векторы $y_n = \{y^{n-1}, y^n\} \in H^2$ и оператор

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -B_2^{-1}B_0 & -B_2^{-1}B_1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

При этом схема (14) становится эквивалентной двухслойной схеме

$$y_{n+1} = Sy_n, \quad y_n \text{ задано,} \tag{16}$$

определенной в H^2.

Лемма 1. *Если $x = \{x^1, x^2\} \in H^2$ — собственный вектор оператора (15) и s — отвечающее ему собственное значение, то $x^2 = sx^1$ и элемент $x^1 \in H$ является решением следующей задачи на собственные значения:*

$$(s^2B_2 + sB_1 + B_0)\, x^1 = 0, \tag{17}$$

Доказательство леммы следует из покомпонентной записи задачи на собственные значения для оператора (15):

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -B_2^{-1}B_0 & -B_2^{-1}B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. *Пусть операторы B, R, A не зависят от n и оператор A^{-1} существует. Если схема* (14) *устойчива в какой-либо норме, то действительные части всех собственных значений задачи*

$$\left[\lambda^2 A - 2\lambda \frac{B}{\tau} + (4R - A)\right] x = 0 \tag{18}$$

неотрицательны.

Доказательство. Из устойчивости схемы (16) следует условие $|s| \leqslant 1$ для всех собственных значений задачи (17). Заметим, что $s=1$ не является собственным значением, так как при $s=1$ уравнение (17) принимает вид $2\tau A x^1 = 0$ и, в силу обратимости оператора A, $x^1 = 0$. Поэтому в (17) можно сделать замену $\lambda = \frac{1+s}{1-s}$, переводящую круг $|s| \leqslant 1$ в правую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Подставляя $s = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$ в (17), получаем уравнение (18).

Следствие 1. *Пусть существует A^{-1}. Если схема*

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + A y = 0 \tag{19}$$

устойчива в какой-либо норме, то все собственные значения оператора $B^{-1}A$ лежат на мнимой оси. В частности, схема

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + A y = 0, \quad B^* = B > 0, \quad A^* = A,$$

абсолютно неустойчива.

Доказательство. Уравнение (18) эквивалентно в данном случае уравнению

$$0{,}5\tau (\lambda^2 - 1) B^{-1} A x = \lambda x. \tag{20}$$

Из предположения о существовании A^{-1} следует, что числа $\lambda = 0$, $\lambda = \pm 1$ не являются собственными значениями задачи (20). Таким образом, собственное значение c задачи $B^{-1}Ax = cx$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - \frac{2}{\tau c}\lambda - 1 = 0.$$

Из устойчивости схемы (19) следует, что корни λ_1 и λ_2 этого уравнения имеют неотрицательные действительные части. Так как $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, получаем $\operatorname{Re}\lambda_1 = -|\lambda_1|^2 \operatorname{Re}\lambda_2$, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$. Следовательно, все числа λ, удовлетворяющие (20), чисто мнимые. Но тогда и c — чисто мнимое число,

$$c = \frac{2\lambda}{\tau(\lambda^2 - 1)} = -\frac{2i\alpha}{\tau(1 + \alpha^2)}.$$

Следствие 2. *Пусть существует A^{-1}. Если схема*

$$B y_{\bar{t}t} + A y = 0 \tag{21}$$

устойчива в какой-либо норме, то все собственные значения оператора $B^{-1}A$ лежат на действительной оси. В частности, схема

$$B y_{\bar{t}t} + A y = 0, \quad B^* = B > 0, \quad A^* = -A,$$

абсолютно неустойчива.

Доказательство. После переобозначений уравнение (18) принимает вид

$$(\lambda^2 - 1) Ax = -\frac{4}{\tau^2} Bx.$$

Следовательно, собственные значения c оператора $B^{-1}A$ удовлетворяют уравнению $c = \frac{4}{\tau^2(1-\lambda^2)}$. Отсюда находим, что $\lambda^2 = 1 - \frac{4}{c\tau^2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_1 = -\operatorname{Re}\lambda_2$, следовательно, $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = 0$, λ — чисто мнимое и c — действительное число.

§ 4. Асимптотическая устойчивость разностных схем

1. Постановка задачи. Иногда оказывается, что решение разностной задачи, полученное по устойчивой и аппроксимирующей разностной схеме, неверно отражает поведение решения исходного дифференциального уравнения, т. е., как говорят в подобных случаях, «схема плохо считает». Это может объясняться тем, что решение разностной задачи оказывается близким к решению дифференциальной задачи лишь при очень малых шагах сетки, а считать всегда приходится с конечными шагами. Поведение решения разностной задачи может улучшиться, если помимо формальных требований аппроксимации и устойчивости предъявить к схеме некоторые дополнительные требования, отражающие характерные свойства исходного дифференциального уравнения. Так, уже в [31] показано, что существенным является свойство консервативности (дивергентности) разностных схем. При конструировании разностных схем для уравнений газовой динамики нашел применение принцип полной консервативности (см. [32]). Для уравнений гиперболического типа оказалось полезным исследование дисперсионных свойств соответствующих разностных уравнений (см. [33], [35]).

Другой подход к построению разностных схем лучшего качества состоит в получении разностных схем, удовлетворяющих тем же априорным оценкам, которые характерны (неулучшаемы) для исходных дифференциальных уравнений. С точки зрения общей теории разностных схем вопросы получения адекватных априорных оценок рассматривались в работах [36]—[38]. Работы [37], [38] связаны также с попыткой классификации разностных схем по типам (например, рассматривается понятие параболической разностной схемы). Отметим, что, в отличие от уравнений с частными производными, в теории линейных разностных схем сейчас не существует четкой классификации по типам, хотя и вводились различные определения.

В этом параграфе исследуется одно из дополнительных требований к разностной схеме, а именно, требование асимптотической устойчивости. Известно, что для параболической системы уравнений $u'(t) + Lu = 0$ справедлива априорная оценка $\|u(t)\| \leqslant e^{-\delta t}\|u(0)\|$, $\delta > 0$, выражающая свойство асимптотической устойчивости при $t \to \infty$. Далеко не каждая аппроксимирующая разностная схема обладает оценкой по-

добного типа. Условия устойчивости, сформулированные в предыдущих параграфах, гарантируют лишь выполнение оценки вида $\|u(t)\| \leqslant \leqslant \|u(0)\|$.

В настоящем параграфе вводится понятие ρ-устойчивости разностной схемы, обобщающее понятие устойчивости (см. определение 1 из § 2), и на основе этого понятия выясняются свойства асимптотической устойчивости.

2. Понятие ρ-устойчивости. Будем рассматривать разностную схему с постоянными операторами

$$By_t + Ay = 0, \quad y_0 \text{ задано}, \tag{1}$$

определенную в гильбертовом пространстве. Пусть заданы число $\rho > 0$ и самосопряженный положительный оператор $D : H \to H$.

Определение 1. Разностная схема (1) называется ρ-устойчивой в пространстве H_D, если при любых $y_n \in H$ и при всех $n = 0, 1, \ldots$ для решения y_{n+1} задачи (1) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \rho \|y_n\|_D. \tag{2}$$

Замечание. Понятие ρ-устойчивости согласовано с общими определениями устойчивости из § 1, если ρ^n ограничено при всех n, например, при $\rho = 1$, $\rho = 1 + c_0\tau$, $c_0 > 0$, $\rho = e^{c_0\tau}$. Однако многие теоремы о ρ-устойчивости (см. [1]) справедливы без предположения ограниченности ρ^n, поэтому оно и не включается в определение.

Из определения следует, что для ρ-устойчивости в H_D необходимо и достаточно потребовать выполнения операторного неравенства

$$\rho^2 D \geqslant S^* D S, \quad S = E - \tau B^{-1} A. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если A и B — самосопряженные положительные операторы, то для ρ-устойчивости схемы* (1) *в пространствах H_A и H_B необходимо и достаточно выполнение операторных неравенств*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leqslant A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B. \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство (3) означает, что

$$\|S\|_{D^*} = \|D^{1/2} S D^{-1/2}\| \leqslant \rho. \tag{5}$$

При $D = A$ и $D = B$ оператор $D^{1/2} S D^{-1/2}$ является самосопряженным, и условие (5) эквивалентно операторному неравенству

$$-\rho E \leqslant D^{1/2} S D^{-1/2} \leqslant \rho E,$$

откуда эквивалентными преобразованиями переходим к (4).

Задача 1. Найти совпадающие необходимые и достаточные условия ρ-устойчивости в случае, когда один из операторов A или B является несамосопряженным.

В [1] показано, что если $A^* = A > 0$ и $\rho \geqslant 1$, то условие $B_0 \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A$ достаточно для ρ-устойчивости в H_A. Если же $\rho \leqslant 1$, то это условие не-

обходимо для ρ-устойчивости в H_A. Вопрос о совпадающих необходимых и достаточных условиях ρ-устойчивости остается открытым.

3. Асимптотическая устойчивость двухслойных разностных схем. Будем рассматривать схему (1) с самосопряженными операторами A и B.

Определение 2. Схема (1) называется асимптотически устойчивой в пространстве H_D, если существуют постоянные $c_0>0$, $M>0$, не зависящие от τ, h, t_n, y_0 и такие, что при любых $y_0 \in H$ и при всех $t_n>0$ для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\| y(t_n) \|_D \leqslant M e^{-c_0 t_n} \| y(0) \|_D. \tag{6}$$

В частности, схема (1) асимптотически устойчива в H_D, если она ρ-устойчива в H_D, причем $\rho \leqslant e^{-c_0\tau}$.

Теорема 2. *Пусть A и B — самосопряженные положительные операторы, удовлетворяющие неравенствам*

$$\delta B \leqslant A \leqslant \Delta B, \quad \Delta > \delta > 0. \tag{7}$$

Если

$$\tau \leqslant \frac{2}{\Delta + \delta} \tag{8}$$

и $\delta \geqslant c_0 > 0$, где c_0 не зависит от τ, h, t_n, y_0, то схема (1) *асимптотически устойчива в H_A.*

Доказательство. Согласно теореме 1, схема (1) ρ-устойчива в H_A при всех $\rho>0$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1-\rho}{\tau} \leqslant \delta, \quad \Delta \leqslant \frac{1+\rho}{\tau}.$$

В частности, схема (1) ρ-устойчива при $\rho=1-\delta\tau$, если $\Delta \leqslant (1+(1-\delta\tau))/\tau$, т. е. $\tau \leqslant 2/(\delta+\Delta)$. Учитывая неравенства $\rho=1-\delta\tau \leqslant e^{-\delta\tau} \leqslant e^{-c_0\tau}$, получаем для (1) оценку (6), где $M=1$, $D=A$.

Замечание. Схему (1) можно трактовать как итерационный метод решения уравнения $Ay=0$ (см. [2]). При этом оптимальным значением итерационного параметра τ является величина $2/(\delta+\Delta)$. Следовательно, асимптотическая устойчивость гарантирована при шаге τ, не превосходящем оптимального итерационного параметра в соответствующем итерационном методе.

Пример 1. Рассмотрим схему с весами

$$y_t + \sigma A y_{n+1} + (1-\sigma) A y_n = 0, \tag{9}$$

где σ — неотрицательная постоянная, не зависящая от τ и $A^*=A>0$, $\lambda_1 E \leqslant A \leqslant \lambda_2 E$. Для этой схемы $B=E+\sigma\tau A$, неравенства (7) выполнены с константами

$$\delta = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \sigma\tau}, \quad \Delta = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_2} + \sigma\tau}.$$

Потребуем, чтобы существовала постоянная $\varepsilon \in (0, 1)$, не зависящая от τ, h, t_n, y_0 и такая, что $\frac{1}{1+\sigma\tau\lambda_1} \geqslant \varepsilon > 0$ (фактически, это требование мало-

сти τ). Тогда $\delta \geqslant \lambda_1 \varepsilon = c_0$. Условие асимптотической устойчивости (8) принимает вид

$$\sigma(\sigma-1)\nu_1\nu_2 + (\sigma-0{,}5)(\nu_1+\nu_2) + 1 \geqslant 0, \quad \nu_1 = \tau\lambda_1, \ \nu_2 = \tau\lambda_2. \tag{10}$$

В частности, схема (9) с $\sigma=0{,}5$ асимптотически устойчива при условии $\tau \leqslant 2/\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, в то время как устойчивость в обычном смысле для нее имеет место при любых τ.

Пример 2. В [1] показано, что схема

$$\left(E + \frac{\sigma}{2}\tau A\right)^2 y_{n+1} = (E - (1-\sigma)\tau A)\, y_n, \quad \sigma = 2 - \sqrt{2},$$

асимптотически устойчива при любых τ.

4. Асимптотическая устойчивость трехслойных разностных схем. Проведем исследование асимптотической устойчивости трехслойной разностной схемы

$$By_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0 \tag{11}$$

с самосопряженными операторами A, B, R. Будем исходить из условий ρ-устойчивости схемы (11). Известно (см. [1]), что если A, B, R — самосопряженные операторы, не зависящие от n, и если выполнены операторные неравенства

$$\begin{gathered}
\tilde{A} = -\frac{1-\rho^2}{2}\frac{B}{\tau} + (1-\rho)^2 R + \rho A > 0, \\
\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1-\rho^2}{2}\frac{B}{\tau} + (1+\rho)^2 R - \rho A\right] > 0, \\
\frac{\tilde{B}}{\tau} = \frac{1+\rho^2}{2}\frac{B}{\tau} - (1-\rho^2) R \geqslant 0, \quad \rho > 0,
\end{gathered} \tag{12}$$

то для (11) справедлива оценка

$$\| y_{n+1} \|_{\mathscr{D}} \leqslant \rho \| y_n \|_{\mathscr{D}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

где

$$\| y_n \|^2_{\mathscr{D}} = \frac{1}{4}\left\| \frac{1}{\rho} y^{n+1} + y^n \right\|^2_{\tilde{A}} + \left\| \frac{1}{\rho} y^{n+1} - y^n \right\|^2_{\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}}. \tag{14}$$

Дальнейшие оценки получим в предположении, что операторы B и R связаны с оператором A неравенствами

$$r_1 A \leqslant R \leqslant r_2 A, \quad b_1 \tau A \leqslant B \leqslant b_2 \tau A, \tag{15}$$

где r_1, r_2, b_1, b_2 — положительные числа.

Теорема 3. *Пусть A, B, R — самосопряженные положительные операторы, связанные неравенствами* (15), *причем константы r_1, r_2, b_1, b_2 удовлетворяют неравенствам*

$$r_1 > 0{,}5, \quad r_2 \leqslant 0{,}5 b_1 b_2, \tag{16}$$

$$1 < b_2 \leqslant \frac{1}{c_0\tau} - 1, \tag{17}$$

где $c_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ, h, t_n и y_0. Тогда при неко-

тором $\rho \leqslant e^{-c_0\tau}$ *выполнены условия* (12) *и для решения задачи* (11) *справедлива оценка*

$$\| y_n \|_{\mathscr{D}} \leqslant e^{-c_0 t_n} \| y_0 \|_{\mathscr{D}}, \tag{18}$$

где $\| y_n \|_{\mathscr{D}}$ *определяется согласно* (14).

Доказательство. Из (12), (15) при любом $\rho \in (0, 1)$ получаем следующие оценки операторов $\widetilde{A}$, $\widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ через оператор A:

$$\widetilde{A} = (1-\rho)^2 \left[R - \frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^2}{2} \frac{B}{\tau} - \rho A \right) \right] \geqslant$$

$$\geqslant (1-\rho)^2 \left[r_1 - \frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^2}{2} b_2 - \rho \right) \right] A,$$

$$\widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A} \geqslant \frac{(1+\rho)^2}{4} \left[r_1 - \frac{1}{(1+\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^2}{2} b_2 + \rho \right) \right] A,$$

$$\frac{\widetilde{B}}{\tau} \geqslant (1-\rho^2) \left[-r_2 + \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \frac{b_1}{2} \right] A.$$

Выбирая величину ρ из условия

$$\frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^2}{2} b_2 - \rho \right) = \frac{1}{(1+\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^2}{2} b_2 + \rho \right),$$

получим

$$\rho^2 = \frac{b_2 - 1}{b_2 + 1}. \tag{19}$$

Заметим, что $\rho \in (0, 1)$, если $b_2 > 1$. Кроме того, учитывая (17) и неравенство $e^{-x} \geqslant 1 - x$, получаем оценку

$$b_2 \leqslant \frac{1}{c_0\tau} - 1 \leqslant \frac{1 + e^{-2c_0\tau}}{1 - e^{-2c_0\tau}} = \widetilde{b}_2, \quad c_0 > 0,$$

и, следовательно,

$$\rho^2 \leqslant \frac{\widetilde{b}_2 - 1}{\widetilde{b}_2 + 1} = e^{-2c_0\tau}. \tag{20}$$

При ρ, определенном согласно (19), получаем оценки

$$\widetilde{A} \geqslant (1-\rho)^2 (r_1 - 0{,}5) A, \quad \widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A} \geqslant \frac{(1+\rho)^2}{4} (r_1 - 0{,}5) A,$$

$$\widetilde{B} \geqslant \tau (1-\rho^2) (-r_2 + 0{,}5 b_1 b_2) A,$$

из которых при условиях (16) следует, что $\widetilde{A} > 0$, $\widetilde{R} - \frac{1}{4}\widetilde{A} > 0$, $\widetilde{B} \geqslant 0$. Отсюда и из (13), (20) получаем оценку (18).

Пример 1. Рассмотрим симметричную схему

$$y_{\overset{\circ}{t}} + A(\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma) y^n + \sigma y^{n-1}) = 0, \quad A^* = A > 0. \tag{21}$$

Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > \lambda_1$ — границы собственных значений оператора A, т. е. $0 < \lambda_1 E \leqslant A \leqslant \lambda_2 E$. Предположим, что λ_1 не зависит от τ и h. Для данной схемы $B = E$, $R = \sigma A$ и условия (15) выполнены с постоянными

$r_1=r_2=\sigma$, $b_1=1/(\tau\lambda_2)$, $b_2=1/(\tau\lambda_1)$. Условия (16) принимают вид

$$\frac{1}{2}<\sigma\leqslant\frac{1}{2\tau^2\lambda_1\lambda_2}$$

и накладывают ограничения на параметр σ и на величину $\tau^2\lambda_2$, характеризующую обычно отношение шагов сетки по времени и по пространству. Условие (17) — это условие малости шага τ. Так, если положить $c_0=\alpha\lambda_1$, $0<\alpha<1$, то из (17) получим $\tau\lambda_1<\min\left\{1, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$.

Отметим, что схема (21) устойчива в обычном смысле (т. е. при $\rho=1$) при условии $\sigma>1/4$ без всяких ограничений на шаги сетки.

Пример 2. Рассмотрим абсолютно устойчивую схему

$$\frac{3}{2}y_t-\frac{1}{2}y_{\bar t}+Ay^{n+1}=0,\quad 0<\lambda_1E\leqslant A\leqslant\lambda E_2. \tag{22}$$

Для нее

$$b_1=1+\frac{1}{\tau\lambda_2},\quad b_2=1+\frac{1}{\tau\lambda_1},\quad r_1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\tau\lambda_2},\quad r_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{\tau\lambda_1}.$$

Условия асимптотической устойчивости (16), (17) приводят к неравенствам (при $c_0=\alpha\lambda_1$, $0<\alpha<1$) $\tau\lambda_1\leqslant\frac{1-\alpha}{2\alpha}$, $\tau\lambda_2\leqslant\frac{1+\tau\lambda_1}{3}$, последнее из которых означает, что шаг τ должен быть порядка $1/\lambda_2$ (порядка h^2 в приложениях).

Замечание. Если $B=0$, $R>0$, то последнее из условий (12) выполняется лишь при $\rho\geqslant1$. Поэтому схемы вида

$$Ry_{\bar t t}+Ay=0,\quad A^*=A,\quad R^*=R>0$$

не являются асимптотически устойчивыми.

(Поступила в редакцию 22/IX 1975 г.)

Литература

1. **А. А. Самарский, А. В. Гулин,** Устойчивость разностных схем, Москва, изд-во «Наука», 1973.
2. **А. А. Самарский,** Введение в теорию разностных схем, Москва, изд-во «Наука», 1971.
3. **А. А. Самарский,** К теории разностных схем, ДАН СССР, **165**, № 5 (1965), 1007—1010.
4. **А. А. Самарский,** О регуляризации разностных схем, ЖВММФ, **7**, № 1 (1967), 62—93.
5. **А. А. Самарский,** Классы устойчивых схем, ЖВММФ, **7**, № 5 (1967), 1096—1133.
6. **В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов,** Об устойчивости разностных уравнений, Москва, Гостехиздат, 1956.
7. **Р. Рихтмайер, К. Мортон,** Разностные методы решения краевых задач, Москва, изд-во «Мир», 1972.
8. **С. К. Годунов, В. С. Рябенький,** Разностные схемы, Москва, изд-во «Наука», 1973.
9. **В. С. Рябенький,** Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач, Успехи матем. наук, **XXVI**, вып. 3 **(159)** (1971), 105—160.

10. **V. Thomée,** Stability theory for partial difference operators, SIAM Review, **11,** № **2** (1969), 152—195.
11. **Н. Н. Кузнецов,** Слабо устойчивые конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений, ЖВММФ, **11,** № **6** (1971), 1437—1452.
12. **С. И. Сердюкова,** Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений, ЖВММФ, **7,** № **3** (1967), 497—509.
13. **Б. П. Демидович,** Лекции по математической теории устойчивости, Москва, изд-во «Наука», 1967.
14. **В. И. Зубов,** Устойчивость движения, Москва, изд-во «Высшая школа», 1973.
15. **В. И. Зубов,** Методы Ляпунова и их применение, Ленинград, изд-во ЛГУ, 1957.
16. **Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн,** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Москва, изд-во «Наука», 1970.
17. **S. G. Hahn,** Stability of motion, Berlin, 1967.
18. **А. Халанай, Д. Векслер,** Качественная теория импульсных систем, Москва, изд-во «Мир», 1971.
19. **Д. И. Мартынюк,** Лекции по качественной теории разностных уравнений, Киев, «Наукова Думка», 1972.
20. **А. А. Самарский,** Априорные оценки для разностных уравнений, ЖВММФ, **1,** № **6** (1961), 972—1000.
21. **В. Н. Абрашин,** О сходимости метода сеток для квазилинейных задач математической физики, Изв. АН БССР, серия физ.-матем., № **1** (1973), 73—80.
22. **Е. Г. Дьяконов,** Разностные методы решения краевых задач, Москва, изд-во МГУ, вып. **1** (1971), вып. **2** (1972).
23. **А. Д. Ляшко, М. М. Карчевский,** Исследование одного класса нелинейных разностных схем, Изв. ВУЗов, Математика, № 7 (**98**) (1970), 63—71.
24. **А. В. Лапин,** О корректности нелинейной двухслойной разностной схемы, Изв. ВУЗов, Математика, № **9 (124)** (1972), 48—53.
25. **P. A. Raviart,** Sur la resolution de certaines équations paraboliques non linéaires, J. of funct. anal., **5,** № **2** (1970), 299—328.
26. **Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан,** Применение метода функций Ляпунова для исследования сходимости численных методов, ЖВММФ, **15,** № **1** (1975), 101—112.
27. **А. А. Самарский,** Об устойчивости трехслойных разностных схем, ДАН СССР, **192,** № **5** (1970), 998—1001.
28. **А. В. Гулин,** Условия устойчивости трехслойных разностных схем для нестационарного уравнения Шредингера, ЖВММФ, **14,** № **6** (1974), 1488—1498.
29. **Ф. Р. Гантмахер,** Теория матриц, Москва, изд-во «Наука», 1967.
30. **Н. С. Бахвалов,** Численные методы, Москва, изд-во «Наука», 1973.
31. **А. Н. Тихонов, А. А. Самарский,** О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов, ДАН СССР, **124,** № **3** (1959), 529—532.
32. **Ю. П. Попов, А. А. Самарский,** Полностью консервативные разностные схемы, ЖВММФ, **9,** № **4** (1969), 953—958.
33. **М. Н. Москальков,** О точности разностных схем, аппроксимирующих волновое уравнение с кусочно гладкими решениями, ЖВММФ, **14,** № **2** (1974), 613—621.
34. **А. А. Самарский,** О работах по теории разностных схем, Доклад на международном конгрессе математиков в Ницце, 1970.
35. **K. V. Roberts, N. O. Weiss,** Convective difference schemes, Math. of Comput, **20,** № **94** (1966), 272—299.
36. **В. Б. Андреев,** Об устойчивости по начальным данным разностных схем для параболических уравнений, ЖВММФ, **11,** № **6** (1971), 1462—1475.
37. Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений, Сб. работ под ред. В. Б. Андреева, Москва, изд-во МГУ, 1973.
38. **Ю. И. Мокин,** Двухслойные параболические и слабо параболические разностные схемы, ЖВММФ, **15,** № **3** (1975), 661—671.