1976 г. ноябрь — декабрь *т. XXXI, вып. 6 (192)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.9

О РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. А. Самарский, И. В. Фрязинов

В работе построены и исследованы консервативные схемы для эллиптических уравнений в произвольной области. Для получения разностных аппроксимаций в случае уравнений со смешанными производными и при краевых условиях третьего рода оказалось полезным понятие векторной схемы. Векторные разностные схемы строятся при помощи интегро-интерполяционного метода (метода баланса).

При получении экономичных алгоритмов решения многомерных параболических задач используется метод суммарной аппроксимации, приводящий к аддитивным схемам и векторным аддитивным схемам. Построены, в частности, экономичные аддитивные векторные схемы для параболических уравнений с краевым условием третьего рода в произвольной области.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 167
Глава I. Консервативные однородные разностные схемы 169
§ 1. Разностные схемы для уравнения Пуассона 169
§ 2. Векторные схемы для эллиптических уравнений со смешанными производными 173
§ 3. Векторные схемы для эллиптических уравнений на неортогональных сетках 177
Глава II. Метод суммарной аппроксимации 180
§ 4. Аддитивные схемы 180
§ 5. Примеры экономичных аддитивных схем 182
§ 6. Векторные аддитивные схемы 188
§ 7. Разностные схемы и метод суммарной аппроксимации 194
Литература 195

Введение

Для численного решения задач математической физики часто применяют метод конечных разностей. В теории разностных методов основными являются вопросы: 1) аппроксимация дифференциальных уравнений на сетке; 2) исследование свойств разностных схем (устойчивости, сходимости и др.); 3) численное решение системы разностных уравнений. К разностным схемам, как правило, предъявляют такие требования, как однородность и консервативность [1], [2], устойчивость, точность, экономичность (число операций, необходимых для отыскания решения задачи, пропорционально числу узлов сетки, безусловная устойчивость).

Основное внимание в данной работе уделяется методам построения разностных аппроксимаций для эллиптических уравнений с учетом указанных выше требований.

Естественно требовать, чтобы основные свойства исходной задачи, такие, как, например, знакоопределенность, самосопряженность дифференциального оператора сохранились в пространстве сеточных функций при переходе к соответствующим разностным схемам.

Дифференциальные уравнения математической физики обычно являются следствием некоторых интегральных законов сохранения (массы, импульса, энергии и т. д.). Разностные схемы также должны выражать законы сохранения на сетке. Законы сохранения для всей сеточной области должны быть следствием разностных уравнений. Схемы, обладающие этими свойствами, называются консервативными. Такие свойства как самосопряженность разностного оператора (когда исходный дифференциальный оператор — самосопряженный) тесно связаны с консервативностью схемы. Для построения консервативных разностных схем можно использовать интегро-интерполяционный метод или метод баланса [2].

Область применимости принципа консервативности разностных схем, в развитии и обосновании которого важнейшая роль принадлежит А. Н. Тихонову, в настоящее время существенно расширилась. Дальнейшее развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности [3], [4]. Полностью консервативная схема, например, для уравнений газовой динамики характеризуется не только выполнением разностных аналогов законов сохранения, но и дополнительных соотношений, выражающих баланс отдельных видов энергии. Отметим также полностью консервативную схему для кинетического уравнения [5].

Применению метода баланса для построения консервативных схем для эллиптических уравнений посвящена глава I данной работы (см. также [6], [7]).

При переходе к уравнениям, содержащим смешанные производные, оказалось целесообразным расширить понятие разностной схемы, введя понятие векторной схемы. Исходная задача для дифференциального уравнения заменяется эквивалентной задачей для системы дифференциальных уравнений, каждое из которых аппроксимируется на своей сетке. В результате мы получаем разностную схему для вектора Y, каждая из компонент которого есть сеточная функция, заданная на «своей» сетке и аппроксимирующая решение исходной задачи. Можно говорить, что вектор $Y \in \mathcal{H}^{(m)}$, где $\mathcal{H}^{(m)}$ есть прямая сумма m сеточных пространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_m$, таких, что компонента y_k вектора Y принадлежит $\mathcal{H}_k$: $y_k \in \mathcal{H}_k$. В двумерном случае $m = 2$, в случае трех измерений $m = 4$. Введение векторных схем позволяет существенно расширить область применения метода баланса для построения консервативных разностных схем [8], [9].

В последние годы большое внимание уделяется построению экономичных схем для нестационарных уравнений математической физики [10], [11] (литературу см. в [12], [13]). Наиболее эффективным и общим методом получения экономичных разностных схем является метод суммарной аппроксимации [11], [12]. В связи с этим было введено понятие составной схемы как цепочки

разностных уравнений, определенной структуры, осуществляющих переход от временно́го слоя t_j к слою t_{j+1}.

Составная схема, погрешность аппроксимации которой определяется как сумма невязок (погрешностей аппроксимаций на решении исходной задачи) всех уравнений цепочки, называется аддитивной схемой.

Семейство аддитивных схем является весьма широким, экономичные схемы для многомерных задач следует искать в этом семействе. Большое число экономичных аддитивных схем построены для многомерных уравнений и систем уравнений параболического и гиперболического типов (литературу см. [12]).

Дальнейшее развитие метода суммарной аппроксимации, которому посвящена глава II, естественно привело к понятию векторных аддитивных схем [14]. Использование векторных аддитивных схем позволяет получить экономичные алгоритмы решения достаточно общих задач математической физики для параболических уравнений.

ГЛАВА I

КОНСЕРВАТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

§ 1. Разностные схемы для уравнения Пуассона

1. Постановка задачи. Построим разностные схемы с самосопряженными знакоопределенными сеточными операторами для уравнения Пуассона в случае первой краевой задачи. При построении схемы используем интегро-интерполяционный метод (или метод баланса) [12].

Пусть Ω — ограниченная область в плоскости Ox_1x_2 с гладкой границей Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $x = (x_1, x_2)$ — точка плоскости Ox_1x_2. Для простоты изложение проведем для выпуклой области Ω.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad u = \nu(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Пусть f, ν, Γ таковы, что существует решение задачи (1.1) — функция $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\nu(x) \in C^2(\Gamma)$.

2. Сетки. Обозначения. Введем решетку R_h узлов $x = x_{i_1 i_2} = (i_1 h_1, i_2 h_2)$, $i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\alpha = 1, 2$ с шагами h_1, h_2, $h = \max(h_1, h_2)$.

Построим сетку $\overline{\omega}_h$ в области $\overline{\Omega}$. Узлы решетки R_h, принадлежащие Ω, назовем внутренними узлами сетки. Множество их обозначим через ω_h. Точки пересечения прямых, параллельных осям координат, проходящих через узлы решетки R_h, с границей Γ назовем граничными узлами. Множество их обозначим через γ_h, $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Расстояния от граничных узлов $x \in \gamma_h$ до соседних внутренних узлов $x^{(+1_\alpha)} \in \omega_h$, либо $x^{(-1_\alpha)} \in \omega_h$ в направлении оси координат Ox_α обозначим через h_α^*, $h_\alpha^* \leqslant h_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$).

Проведем прямые $x_\alpha = (i_\alpha + 0{,}5)\, h_\alpha$ ($i_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\alpha = 1, 2$), и каждому узлу $x \in \omega_h$ поставим в соответствие прямоугольник $H_0(x)$, ограниченный справа и слева ортогональными оси координат Ox_α отрезками $s_{0\alpha}^{\pm}$ указанных прямых ($x_{3-\alpha} = (i_{3-\alpha} \pm 0{,}5) h_{3-\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$)). Фигуры и их

площади, отрезки, дуги и их длины будем обозначать одними и теми же буквами, а все постоянные, не зависящие от шагов сеток, одной и той же буквой M. Тогда $H_0(x) = h_1h_2$, $s^{\pm}_{0\alpha} = h_{3-\alpha}$ $(\alpha = 1, 2)$ (рис. 1).

Введем множества ω'_{h1}, ω'_{h2} потоковых узлов — середин отрезков $s^{\pm}_{01}$, $s^{\pm}_{02}$, ограничивающих площадки $H_0(x)$, $x \in \omega_h$:

$$x'_1 = x^{(\pm 0{,}5_1)} = ((i_1 \pm 0{,}5)\, h_1,\ i_2h_2) \in \omega'_{h1},$$

$$x'_2 = x^{(\pm 0{,}5_2)} = (i_1h_1,\ (i_2 \pm 0{,}5)\, h_2) \in \omega'_{h2},\ \overline{\omega}'_h = \omega'_{h1} \cup \omega'_{h2}.$$

Сеточные функции будем обозначать через $y(x)$, $x \in \overline{\omega}_h$. Введем сеточный аналог производной $\partial u/\partial x_\alpha$ в потоковых узлах $x'_\alpha \in \omega'_{h\alpha}$:

$$y^+_{x_\alpha} = y_{x_\alpha}(x^{(+0{,}5\alpha)}) = (y^{(+1\alpha)} - y)/h'_\alpha,$$

$$y^-_{x_\alpha} = y_{x_\alpha}(x^{(-0{,}5\alpha)}) =$$

$$= (y - y^{(-1\alpha)})/h'_\alpha,\quad y^{(\pm 1\alpha)} = y(x^{(\pm 1\alpha)}).$$

Здесь $h'_\alpha = h_\alpha$ либо $h'_\alpha = h^*_\alpha$, h'_α — расстояние между соседними узлами x и $x^{(\pm 1\alpha)}$.

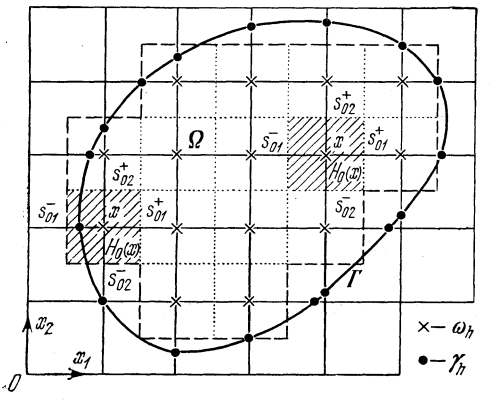

Рис. 1.

3. Консервативная схема. Перейдем к построению консервативной разностной схемы. Для этого, следуя [6], запишем уравнение баланса для каждой площадки $H_0(x)$, $x \in \omega_h$. В приграничных узлах уравнение баланса также запишем для прямоугольной площадки $H_0(x)$, если предварительно продолжить функции $u(x)$, $f(x)$ с сохранением гладкости на полоску Δ^h ширины $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$ вне области Ω. Полученные в $\Omega^h = \Omega \cup \Delta^h$ функции будем обозначать теми же буквами u и f. Функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = -f_0$, $x \in \Omega^h$, где $f_0 = f$, $x \in \Omega$, $f_0 = f + O(|h|)$, $x \in \Delta^h$. Проинтегрируем уравнение $\Delta u = -f_0$ по площадке $H_0(x)$, $x \in \omega_h$:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (s^+_{0\alpha}\overline{w}^+_{0\alpha} - s^-_{0\alpha}\overline{w}^-_{0\alpha}) = -\int_{H_0} f_0\, dx_1\, dx_2. \tag{1.2}$$

Здесь $\overline{w}^{\pm}_{0\alpha}$ — средний поток (с точностью до знака), через отрезок $s^{\pm}_{0\alpha}$:

$$\overline{w}^{\pm}_{0\alpha} = (s^{\pm}_{0\alpha})^{-1} \int_{s^{\pm}_{0\alpha}} \partial u/\partial x_\alpha\, dx_{3-\alpha}.$$

Заменим в (1.2) потоки $\overline{\omega}^{\pm}_{0\alpha}$ сеточными аналогами $\omega^{h\pm}_{0\alpha} = y^{\pm}_{x_\alpha}$, правую часть (1.2) — приближенно на $f(x)H_0(x)$. Разделим получающееся выражение на $H_0(x)$. Приходим к сеточному аналогу уравнения баланса:

$$\Lambda y = \frac{1}{H_0} \sum_{\alpha=1}^{2} (s^+_{0\alpha} w^{h+}_{0\alpha} - s^-_{0\alpha} w^{h-}_{0\alpha}) = -f(x),\quad x \in \omega_h, \tag{1.3}$$

где

$$w^h_{0\alpha} = y_{x_\alpha},\quad x'_\alpha = x^{(\pm 0{,}5\alpha)} \in \omega'_{h\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{1.4}$$

Исходной задаче (1.1) поставим в соответствие разностную задачу

$$\Lambda y = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y = \nu(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем под Λy будем понимать выражение, получающееся после подстановки в сеточное уравнение баланса (1.3) выражений для потоков (1.4). Эта пятиточечная схема в [6] была записана следующим образом:

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -f(x),$$

где в строго внутренних узлах

$$\Lambda_\alpha y = (y_{i_\alpha+1} - 2y_{i_\alpha} + y_{i_\alpha-1})/h_\alpha^2,$$

в узлах пограничной зоны

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha}\left(\frac{y_{i_\alpha+1} - y_{i_\alpha}}{h^*_{\alpha+}} - \frac{y_{i_\alpha} - y_{i_\alpha-1}}{h^*_{\alpha-}}\right).$$

Введем пространство $\mathscr{H}_0$ сеточных функций, определенных на ω_h, со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} y(x)\, v(x)\, H_0(x), \qquad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Оператор $-\Lambda$ является самосопряженным и положительно-определенным в $\mathscr{H}_0$ (на функциях, обращающихся в нуль на γ_h). Для оператора Λ имеет место принцип максимума [12].

Введем также нормы:

$$\|y\|^2_{W_2^1(\omega_h)} = \|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega'_{h\alpha}} H_{0\alpha}(x'_\alpha)\, y_{x_\alpha}(x'_\alpha), \quad H_{0\alpha} = h'_\alpha s_{0\alpha},$$

$$\|y\|_{C(\omega_h)} = \max_{\omega_h} |y(x)|.$$

Т е о р е м а 1 [6]. *Решение разностной задачи* (1.5) *сходится при* $h \to 0$ *к решению исходной задачи* (1.1). *Справедливы оценки*

$$\|y - u\|_{W_2^1(\omega_h)} \leqslant M_1 h^{3/2}, \qquad \|y - u\|_{C(\omega_h)} \leqslant M_2 h^2,$$

где M_1, M_2 — *постоянные, не зависящие от* h, $y(x)$, $u(x)$ — *решения задач* (1.5) *и* (1.1) *соответственно.*

Весьма распространенной является пятиточечная схема для уравнения Пуассона с аппроксимацией в узлах пограничной зоны, предложенной в [15], [16] (см. также [12], стр. 235). Эта схема также имеет второй порядок точности в $C(\omega_h)$, однако в случае произвольной области она является несамосопряженной и, вообще говоря, незнакоопределенной.

Для уравнения Лапласа в [17] на квадратной сетке также построена схема (1.5).

4. Пример другой консервативной схемы. При построении схемы (1.5) область Ω заменялась фактически ступенчатой областью, образованной совокупностью всех прямоугольников $H_0(x)$, $x \in \omega_h$. В узлах пограничной зоны уравнение баланса записывалось для площадок $H_0(x) \notin \Omega$. Однако можно построить схему с оператором $-\Lambda$, самосопряженным и положительно-определенным, не заменяя Ω ступенчатой областью.

Приграничным узлам $x \in \omega_h^*(x \in \omega_h^*, H_0(x) \notin \Omega)$ поставим в соответствие площадки $H(x) = H_0(x) \cap \Omega$, ограниченные отрезками $s_\alpha^\pm = s_{0\alpha}^\pm \cap \Omega$ ($\alpha = 1, 2$), и дугами $\Delta s = H_0(x) \cap \Gamma$ (рис. 2). В строго внутренних узлах $x \in \omega_h^0 = \omega_h \setminus \omega_h^*$ $H(x) = H_0(x)$. Если соответствующая узлу $x \in \omega_h$ площадка $H(x)$ не ограничена отрезком $s_\alpha^\pm$, дугой Δs, то положим $s_\alpha^\pm = 0$, $\Delta s = 0$.

Проинтегрируем уравнение (1.1) по площадке $H(x)$, $x \in \omega_h$:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (s_\alpha^+ \overline{w}_\alpha^+ - s_\alpha^- \overline{w}_\alpha^-) - \Delta s \overline{w}_n = -\int_H f\, dx_1\, dx_2. \tag{1.6}$$

Здесь

$$\overline{w}_\alpha^\pm = (s_\alpha^\pm)^{-1} \int_{s_\alpha^\pm} \partial u/\partial x_\alpha\, dx_{3-\alpha}, \quad \overline{w}_n = (\Delta s)^{-1} \int_{\Delta s} \partial u/\partial n\, d\Gamma,$$

n — внутренняя нормаль к Γ. Соединим концы дуги Δs прямой и проведем к ней нормаль Δn из соответствующего узла $x \in \omega_h^*$ до точки x_Γ' пересечения

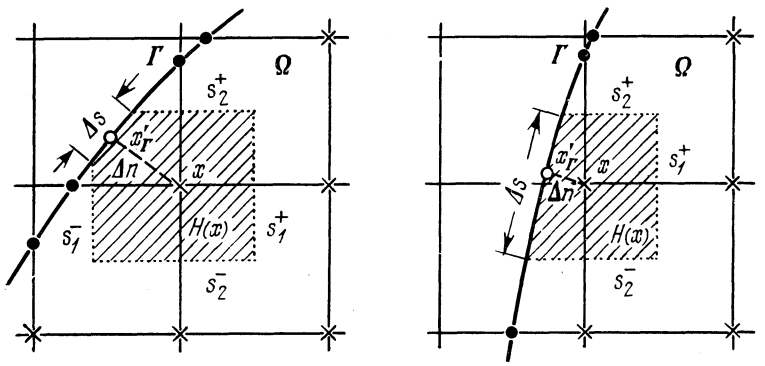

Рис. 2.

Δn с Γ. Множество точек x_Γ' обозначим через γ_h'. Множество всех потоковых узлов, включая граничные узлы $x_\Gamma' \in \gamma_h'$, обозначим через $\overline{\omega}_h'$.

В точке $x_\Gamma' \in \gamma_h'$ введем сеточный аналог $\partial u/\partial n$:

$$y_n(x_\Gamma') = (y(x) - y(x_\Gamma'))/\Delta n,$$

и в узлах $x' \in \overline{\omega}_h'$ сеточные аналоги потоков

$$w_\alpha^h = y_{x_\alpha}, \quad x_\alpha' \in \omega_{h\alpha}', \quad w_n^h = y_n, \quad x_\Gamma' \in \gamma_h'. \tag{1.7}$$

Заменим в (1.6) потоки $\overline{w}_\alpha^\pm$, w_n их сеточными аналогами (1.7), правую часть (1.6) заменим на $f(x)H(x)$. Получим

$$\Lambda y = \frac{1}{H(x)} \Big[\sum_{\alpha=1}^{2} (s_\alpha^+ w_\alpha^{h+} - s_\alpha^- w_\alpha^{h-}) - \Delta s w_n^h \Big] = -f(x), \quad x \in \omega_h. \tag{1.8}$$

Исходной задаче (1.1) поставим в соответствие разностную задачу (1.8) при условиях (1.7) и

$$y(x_\Gamma') = \nu(x_\Gamma'), \quad x_\Gamma' \in \gamma_h', \quad y = \nu(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{1.9}$$

Схема (1.7)—(1.8) отличается от схемы (1.3)—(1.4) только в приграничных узлах дополнительным слагаемым $\Delta s w_n^h$ и значениями $s_\alpha^\pm$, $H(x)$.

В пространстве $\mathcal{H}$ сеточных функций, определенных на ω_h (обращающихся в нуль на γ_h и γ_h'), со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{\omega_h} y(x) v(x) H(x), \quad \|y\| = (y, y)^{1/2},$$

оператор $-\Lambda$ задачи (1.7)—(1.8) является положительно-определенным и самосопряженным; для него также справедлив принцип максимума [12]. Пусть

$$\|y\|^2_{W_2^1(\omega_h)} = \|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega_{h\alpha}'} y^2_{x_\alpha}(x_\alpha') H_\alpha(x_\alpha') + \sum_{\gamma_h'} y_n^2 H_n,$$

$$H_\alpha = s_\alpha h_\alpha' \quad (\alpha = 1, 2), \quad H_n = \Delta n \, \Delta s.$$

Т е о р е м а 2 [7]. *Схема* (1.7)—(1.9) *сходится в сеточных нормах* $W_2^1(\omega_h)$, $C(\omega_h)$ *со скоростями соответственно* $O(h^{3/2})$ *и* $O(h^2)$.

Схемы для третьей краевой задачи можно построить в соответствии с [9], [14], [18].

5. Уравнения с переменными коэффициентами. Для уравнения $\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) = -f(x)$ введем сеточные аналоги коэффициента $k(x)$, полагая, например,

$$a_\alpha = k(x_\alpha'), \quad x_\alpha' \in \Omega, \quad a_\alpha = k(x_*), \quad x_\alpha' \notin \Omega,$$

где x_* — точка на Γ, ближайшая к x_α', $a = k(x_\Gamma')$, $x_\Gamma' \in \gamma_h'$. Положим

$$(1.10) \qquad \begin{cases} w_\alpha^h = a_\alpha y_{x_\alpha}, \quad w_{0\alpha}^h = a_\alpha y_{x_\alpha}, \quad x_\alpha' \in \omega_{h\alpha}', \\ w_n^h = a y_n, \qquad x_\Gamma' \in \gamma_h'. \end{cases}$$

В этом случае для схем (1.3), (1.5), (1.10) и (1.8)—(1.10) имеет место сходимость в сеточных нормах $W_2^1(\omega_h)$, $L_2(\omega_h)$ и $C(\omega_h)$ соответственно со скоростями $O(h^{3/2})$, $O(h^2)$ и $O(h^2 \ln 1/h)$. Подобные же оценки имеют место и на неравномерной решетке R_h с шагами $h_\alpha(x_\alpha')$ ($\alpha = 1, 2$) [6]. Случай разрывных коэффициентов рассмотрен в [6], [19]. Аналогично строятся схемы для любого числа измерений. Отметим, что схема (1.3), (1.5), (1.10) записана в [6] в виде

$$\Lambda y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x), \quad x \in \omega_h.$$

Построенные здесь схемы сохраняют свойство самосопряженности и знакоопределенности исходной задачи, что позволяет для решения полученных разностных уравнений применять быстросходящиеся итерационные методы. В отличие от этих схем, как было уже отмечено выше, известная схема [15], [16] (см. также [12], стр. 235) в общем случае не является ни консервативной, ни знакоопределенной.

§ 2. Векторные схемы для эллиптических уравнений со смешанными производными

1. Постановка задачи. Сетки. Рассмотрим в области Ω задачу для эллиптического уравнения со смешанными производными

$$(2.1) \qquad Lu = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} L_{\alpha\beta} u = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad u = \nu(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $L_{\alpha\beta} u = \partial/\partial x_\alpha \, (k_{\alpha\beta}(x) \, \partial u/\partial x_\beta)$. Условие эллиптичности оператора имеет вид

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{2} \xi_\alpha^2, \quad c_1 = \text{const}_1 > 0.$$

Пусть $k_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$, ν, f и граница Γ таковы, что решение задачи (2.1) — функция $u(x) \in C^4(\overline{\Omega})$. Будем предполагать, что $k_{\alpha\beta} \in C^2(\overline{\Omega})$, $f \in C^2(\overline{\Omega})$, $\nu \in C^2(\Gamma)$.

Схемы для уравнений со смешанными производными в произвольной области можно построить вариационно-разностным методом [20], однако мы здесь будем пользоваться лишь методом баланса, с помощью которого построим схемы в пространстве сеточных функций, являющемся прямой суммой двух (или нескольких) пространств.

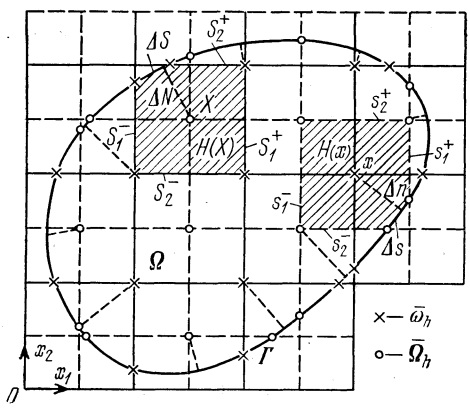

Рис. 3.

Эти схемы будем называть векторными.

Наряду с основной сеткой ω_h, введенной в п. 4 § 1, введем дополнительную сетку Ω_h с узлами $X = X_{i_1+1/2,\, i_2+1/2} = ((i_1 + 0{,}5)h_1, (i_2 + 0{,}5)h_2) \in \Omega$ (рис. 3), расположенными в шахматном порядке по отношению к узлам x основной сетки ω_h. Каждому узлу $X \in \Omega_h$ поставим в соответствие площадку $H(X)$, ограниченную отрезками $S_\alpha^\pm$ прямых, ортогональных осям координат $Ox_\alpha (\alpha = 1, 2)$ и вблизи границы Γ дугой $\Delta S \in \Gamma$. Площадку $H(X)$, отрезки $S_\alpha^\pm$, дуги ΔS построим следующим образом. Рассмотрим прямоугольник $H_0(X_{i_1+1/2\, i_2+1/2})$, ограниченный отрезками $S_{0\alpha}^+$ прямой $x_{3-\alpha} = (i_{3-\alpha} + 1)h_{3-\alpha}$, и отрезками $S_{0\alpha}^-$ прямой $x_{3-\alpha} = i_{3-\alpha}h_{3-\alpha} (\alpha = 1, 2)$. Положим $H(X) = H_0(X) \cap \Omega$, $S_\alpha^\pm = S_{0\alpha}^\pm \cap \Omega$, $\Delta S = H_0 \cap \Gamma$. Подобное построение площадок H, H_0 при $X \in \Omega_h$, отрезков $S_\alpha^\pm$, $S_{0\alpha}^\pm$, дуги ΔS, совершенно аналогично построению H, H_0, $s_\alpha^\pm$, $s_{0\alpha}^\pm$, Δs, проведенному в пп. 2—4 § 1 по отношению к сетке ω_h. Введем также множества приграничных узлов $X \in \Omega_h^* (H_0(X) \not\subset \Omega)$, строго внутренних узлов $X \in \Omega_h^0 = \Omega_h \setminus \Omega_h^*$, а также множества граничных $X \in \Gamma_h^*$ и потоковых граничных узлов $X_\Gamma' \in \Gamma_h'$ (X_Γ' — точка пересечения ΔS и нормали ΔN из соответствующего узла $X \in \Omega_h^*$).

Сеточные функции в узлах $\overline{\Omega}_h$, Γ_h' обозначим через Y. Положим

$$Y_{\hat{x}_\alpha}(x_{3-\alpha}') = (Y^{(+0{,}5_\alpha)} - Y^{(-0{,}5_\alpha)})/h_\alpha', \quad x_{3-\alpha}' \in \omega_{h3-\alpha}',$$

где $Y^{(\pm 0{,}5_\alpha)}$ — значения функции Y в соседних узлах, расстояние между которыми $h_\alpha' \leqslant h_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. Также $Y_{\hat{n}}(X_\Gamma') = (Y(X) - Y(X_\Gamma'))/\Delta N$, $X_\Gamma' \in \Gamma_h'$.

Положим

$$Y_{\hat{s}}(x_\Gamma') = \frac{Y(X_+) - Y(X_-)}{\Delta s}, \qquad y_s(X_\Gamma') = \frac{y(x_+) - y(x_-)}{\Delta S},$$

где $X_\pm$, $x_\pm$ — концы и начала дуг Δs и ΔS. Введем сеточные аналоги коэффициентов $k_{\alpha\beta}$ дифференциального оператора, полагая $a_{\alpha\beta}(x_m') = k_{\alpha\beta}(x_m')$, $x_m' \in \omega_{hm}' \cap \Omega$, $a_{\alpha\beta}(x_m') = k_{\alpha\beta}(x_*)$, $x_m' \notin \Omega$, x_* — ближайшая к x_m' точка на Γ

($m = 1, 2$). В узлах $x' \in \gamma'_h \cup \Gamma'_h$ введем коэффициенты

$$a_{pq}(x') = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x') \cos(p(x'), x_\alpha) \cos(q(x'), x_\beta), \quad p, q = n, s.$$

В силу условия эллиптичности $a_{nn}, a_{ss} \geqslant c_1 > 0$.

2. Векторные схемы. Проинтегрируем уравнение (2.1) по площадке $H(x)$. Получим равенство (1.6), где

$$(2.2)\quad \begin{cases} \bar{w}_\alpha = (s_\alpha)^{-1} \int\limits_{s_\alpha} w_\alpha \, dx_{3-\alpha}, & \bar{w}_n = (\Delta s)^{-1} \int\limits_{\Delta s} w_n \, d\Gamma, \\ w_\alpha = k_{\alpha\alpha} \partial u/\partial x_\alpha + k_{\alpha 3-\alpha} \partial u/\partial x_{3-\alpha}, & w_n = a_{nn} \partial u/\partial n + a_{ns} \partial u/\partial s, \\ s^{\pm}_\alpha = s_\alpha(x'_\alpha), \quad \bar{w}^{\pm}_\alpha = \bar{w}_\alpha(x'_\alpha), & x'_\alpha = x^{(\pm 0,5\alpha)} \in \omega'_{h\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Введем сеточные аналоги средних потоков $\bar{w}_\alpha(x'_\alpha)$, $\bar{w}_n$:

$$(2.3)\quad \begin{cases} w^h_\alpha(x'_\alpha) = a_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha} + a_{\alpha 3-\alpha} Y_{\hat{x}_{3-\alpha}}, & x'_\alpha \in \omega'_{h\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \\ w^h_n(x'_\Gamma) = a_{nn} y_n + a_{ns} Y_{\hat{s}}, & x'_\Gamma \in \gamma'_h. \end{cases}$$

Для получения разностной схемы напишем уравнение баланса, соответствующее уравнению (2.1). Оно имеет такой же вид, как и (1.6). Потоки, входящие в это уравнение баланса, определяются формулой (2.2). Заменим средние потоки $\bar{w}_\alpha$, $\bar{w}_n$ сеточными аналогами (2.3). Тогда в узлах x основной сетки ω_h получим сеточное уравнение баланса (1.8), где w^h_α и w^h_n определяются по формулам (2.3). Эти уравнения содержат не только значения $y(x)$ в узлах $x \in \omega_h$, но и $Y(X)$ в узлах дополнительной сетки $X \in \Omega_h$. Поэтому схему (1.8), (2.3) можно записать в виде

$$(2.4)\quad \begin{cases} \Lambda(x;\, y,\, Y) = -f(x), & x \in \omega_h, \\ y = v(x), \quad x \in \gamma_h, & y = v(x'_\Gamma), \quad x'_\Gamma \in \gamma'_h. \end{cases}$$

Перейдем теперь к выводу разностных уравнений в узлах X дополнительной сетки Ω_h. Проинтегрируем уравнение (2.1) по площадке $H(X)$ и получим аналог уравнения баланса (1.6), в котором $s^{\pm}_\alpha$, Δs, $H(x)$ следует заменить на $S^{\pm}_\alpha$, ΔS, $H(X)$ соответственно. Сеточные аналоги средних потоков через $S^{\pm}_\alpha$, ΔS определим так:

$$(2.5)\quad \begin{cases} W^h_\alpha(x'_{3-\alpha}) = a_{\alpha\alpha} Y_{\hat{x}_\alpha} + a_{\alpha 3-\alpha} y_{x_{3-\alpha}}, & x'_{3-\alpha} \in \omega'_{h\,3-\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \\ W^h_n(X'_\Gamma) = a_{nn} Y_{\hat{n}} + a_{ns} y_s, & X'_\Gamma \in \Gamma'_h. \end{cases}$$

Как и выше, $W^{h\pm}_\alpha = W^h_\alpha(x^{(\pm 0,5_{3-\alpha})})$. Заменяя в уравнении баланса потоки их сеточными аналогами (2.5), интеграл от $f(x)$ выражением $f(X)H(X)$, приходим к уравнению

$$(2.6)\quad \Lambda(X;\, y,\, Y) = \frac{1}{H(X)} \Big[\sum_{\alpha=1}^{2} (S^+_\alpha W^{h+}_\alpha - S^-_\alpha W^{h-}_\alpha) - \Delta S W^h_n \Big] = -f(X), \quad X \in \Omega_h,$$

в котором потоки W^h_α, W^h_n определяются по формулам (2.5). Кроме того, следует задать граничные условия

$$(2.7)\quad Y = v(X), \quad X \in \Gamma_h, \quad Y = v(X'_\Gamma), \quad X'_\Gamma \in \Gamma'_h.$$

В результате для пары сеточных функций $\{y(x), Y(X)\}$ получена разностная схема, совпадающая в узлах $x \in \omega_h$ с уравнением (2.4), и в узлах $X \in \Omega_h$ — с уравнением (2.6). Для описания схемы удобно ввести пространство $\mathscr{H}_1$ сеточных функций $y(x)$, заданных на сетке ω_h, так что $y(x) \in \mathscr{H}_1$ при $x \in \omega_h$, и пространство $\mathscr{H}_2$ функций $Y(X)$, заданных на Ω_h, так что $Y(X) \in \mathscr{H}_2$ при $X \in \Omega_h$. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ — прямая сумма пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, так что вектор $\bar{y} = \{y, Y\} \in \mathscr{H}$, если его компоненты y и Y являются элементами $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$: $y \in \mathscr{H}_1$, $Y \in \mathscr{H}_2$.

Очевидно, что $\bar{y} \in \mathscr{H}$ можно рассматривать как вектор-функцию пары точек $\bar{x} = \{x, X\}$, где $x \in \omega_h$, $X \in \Omega_h$. Обозначим через $\mathscr{G}_h$ множество пар $\bar{x} = \{x, X\}$, где $x \in \omega_h$, $X \in \Omega_h$. Тогда можно записать, что $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathscr{G}_h$.

Если $(\ ,\ )_1$, $(\ ,\ )_2$ — скалярные произведения в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, то скалярное произведение векторов $\bar{y} = \{y, Y\}$, $\bar{v} = \{v, V\}$ в $\mathscr{H}$ определяется как сумма $(\bar{y}, \bar{v}) = (y, v)_1 + (Y, V)_2$. В рассматриваемом случае

$$(y, v)_1 = \sum_{\omega_h} y(x) v(x) H(x), \quad (Y, V)_2 = \sum_{\Omega_h} Y(X) V(X) H(X).$$

Норма $\|\bar{y}\| = (\bar{y}, \bar{y})^{1/2}$ в $\mathscr{H}$ определяется по формуле

$$\|\bar{y}\|^2 = (y, y)_1 + (Y, Y)_2 = \|y\|_1^2 + \|Y\|_2^2.$$

Естественно ввести оператор

$$\bar{\Lambda}\bar{y} = \{\Lambda(x; y, Y), \quad \Lambda(X; y, Y)\}$$

и записать уравнения (2.3) — (2.7) в виде

$$\bar{\Lambda}\bar{y} = -\bar{f}(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in \mathscr{G}_h \tag{2.8}$$

при граничных условиях

$$\bar{y} = \bar{\nu}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathscr{T}_h, \quad \bar{y} = \bar{\nu}(\bar{x}'), \quad \bar{x}' \in \mathscr{T}'_h. \tag{2.9}$$

Здесь $\mathscr{T}_h$ и $\mathscr{T}'_h$ множества пар $x = \{x, X\}$, $x \in \gamma_h$, $X \in \Gamma_h$ и $\bar{x}' = \{x'_\Gamma, X'_\Gamma\}$, $x'_\Gamma \in \gamma'_h$, $X'_\Gamma \in \Gamma'_h$, $\bar{f}(\bar{x}) = \{f(x), f(X)\}$, $\bar{\nu}(\bar{x}) = \{\nu(x), \nu(X)\}$ и т. д. В результате получена векторная схема (2.8), (2.9) для решения задачи (2.1).

В пространстве $\mathscr{H}$ (на вектор-функциях $\bar{y}$, обращающихся в нуль на $\mathscr{T}_h$ и $\mathscr{T}'_h$) оператор $-\bar{\Lambda}$ является самосопряженным при $k_{12} = k_{21}$ и положительно-определенным. Пусть

$$\|\bar{y}\|^2_{W_2^1(\mathscr{G}_h)} = \|\bar{y}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega'_{h\alpha}} H_\alpha (y^2_{\hat{x}_\alpha} + Y^2_{\hat{x}_{3-\alpha}}) + \sum_{\gamma'_h} H_n y_n^2 + \sum_{\Gamma'_h} H_n Y^2_{\hat{n}},$$

где $H_\alpha = s_\alpha h'_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ $H_n(x'_\Gamma) = \Delta n\, \Delta s$, $H_n(X'_\Gamma) = \Delta N\, \Delta S$. Справедлива

Теорема 3 [9]. *Разностная схема* (2.8), (2.9) *сходится в сеточной норме* $W_2^1(\mathscr{G}_h)$. *Справедлива оценка* $\|\bar{y} - \bar{u}\|_{W_2^1(\mathscr{G}_h)} \leqslant Mh^{3/2}$. *Здесь* $\bar{u} = \{u(x), u(X)\}$, u — *решение задачи* (2.1), $\bar{y}$ — *решение задачи* (2.8)—(2.9), M — *постоянная, не зависящая от* h.

Векторные схемы для второй и третьей краевых задач уравнения (2.1) в произвольной области, а также схемы для уравнения с разрывными коэф-

фициентами рассмотрены в [9]. Векторные схемы для эллиптических уравнений со смешанными производными в переменных (r, φ), (r, θ), (r, z), а также векторные схемы для уравнения (2.1) в случае трех измерений построены в [21]. В трехмерном случае вводятся четыре сетки узлов, и пространство $\mathscr{H}$ является прямой суммой четырех пространств сеточных функций. Схемы для эллиптического уравнения со смешанными производными в переменных (r, φ), (r, θ) и (r, z) на одной сетке $\overline{\omega}_h$ построены в [22].

§ 3. Векторные схемы для эллиптических уравнений на неортогональных сетках

1. Схема на криволинейной четырехугольной сетке. Рассмотрим задачу (1.1) в криволинейном четырехугольнике Ω. Построим две сетки узлов $\nu \in \overline{\omega}_h$, $X \in \overline{\Omega}_h$ (рис. 4). Соединим соседние узлы $x \in \overline{\omega}_h$ и узлы $X \in \overline{\Omega}_h$ в направлениях ξ_1 и ξ_2, определяемыми направлениями сторон четырехугольника, отрезками h_α и $\hbar_\alpha (\alpha = 1, 2)$. Каждому узлу $x \in \overline{\omega}_h$, $X \in \overline{\Omega}_h$ поставим в соответствие выпуклые четырехугольники $H(x)$ и $H(X)$ (рис. 4), ограниченные отрезками $s_\alpha^{\pm}$ и $S_\alpha^{\pm}$ $(\alpha = 1, 2)$. Введем, как и ранее, потоковые узлы $x'_\alpha = x^{(\pm 0{,}5_\alpha)} \in \omega'_{h\alpha}$, как точки пересечения соответствующих отрезков $s_\alpha(x'_\alpha)$ и $S_{3-\alpha}(x'_\alpha)$. Очевидно, что $s_\alpha(x'_\alpha) = \hbar_{3-\alpha}(x'_\alpha)$, $S_{3-\alpha}(x'_\alpha) = h_\alpha(x'_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$.

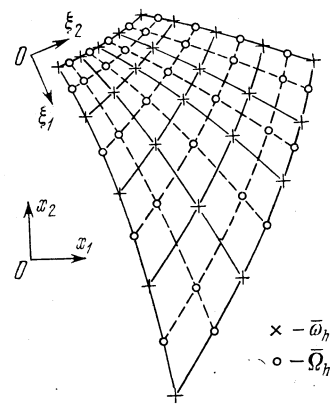

Рис. 4.

Будем предполагать, что сетка удовлетворяет требованиям:

$$(3.1)\quad \begin{cases} m_0 \overline{h}_\alpha \leqslant h_\alpha(x'_\alpha) \leqslant \overline{h}_\alpha / m_0, \\ m_0 \overline{h}_\alpha \leqslant \hbar_\alpha(x'_{3-\alpha}) \leqslant \overline{h}_\alpha / m_0, \\ 0 < m_0 = \text{const} \leqslant 1, \\ \sin\theta(x'_\alpha) \geqslant m_1 = \text{const}_1 > 0 \\ (\alpha = 1, 2). \end{cases}$$

Здесь $\overline{h}_\alpha$ — характерный шаг сетки в направлении ξ_α, совпадающем в каждом узле x'_α с направлением отрезка $S_{3-\alpha}(x'_\alpha)$, $\theta(x'_\alpha)$ — угол между направлениями $\xi_\alpha(x'_\alpha)$ и $\xi_{3-\alpha}(x'_\alpha)$, $x'_\alpha \in \omega'_{h\alpha}$ $(\alpha = 1, 2)$, m_0, m_1 — постоянные, не зависящие от $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2$. Положим $h = \max(\overline{h}_1, \overline{h}_2)$.

Проинтегрируем уравнение (1.1) по площадкам $H(x)$, $H(X)$. Тогда получим уравнение баланса (1.6), в котором $\Delta s = 0$,

$$(3.2)\qquad \overline{w}_\alpha = (s_\alpha)^{-1} \int_{s_\alpha} \partial u / \partial n \, ds_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2),$$

где n — нормаль к s_α. Аналогично записывается средний поток через S_α. Выразим производную $\partial u / \partial n$ через производные по направлениям ξ_1 и ξ_2:

$$\partial n / \partial u = \frac{1}{\sin\theta(x'_\alpha)} \left(\partial u / \partial \xi_\alpha - \cos\theta(x'_\alpha) \, \partial u / \partial \xi_{3-\alpha}\right) \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Введем разностные отношения $y_{\xi_\alpha}(x'_\alpha)$, $Y_{\xi_{3-\alpha}}(x'_\alpha)$, средние потоки $\overline{w}_\alpha$

из (3.2) аппроксимируем следующим образом:

$$(3.3)\quad \begin{cases} w_\alpha^h(x'_\alpha) = \dfrac{1}{\sin\theta(x'_\alpha)}\left(y_{\xi_\alpha}(x'_\alpha) - \cos\theta(x'_\alpha)\, Y_{|\hat{\xi}_{3-\alpha}}(x'_\alpha)\right), \\ W_{3-\alpha}^h(x'_\alpha) = \dfrac{1}{\sin\theta(x'_\alpha)}\left(Y_{\hat{\xi}_{3-\alpha}}(x'_\alpha) - \cos\theta(x'_\alpha)\, y_{\xi_\alpha}(x'_\alpha)\right) \qquad (\alpha = 1,\ 2). \end{cases}$$

Заменим в уравнении баланса (1.6) потоки $\overline{w}_\alpha$ их сеточными аналогами (3.3). Приходим к следующей векторной схеме:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \Lambda(x;\ y,\ Y) = \dfrac{1}{H(x)} \sum\limits_{\alpha=1}^{2} (s_\alpha^+ w_\alpha^{h+} - s_\alpha^- w_\alpha^{h-}) = -f(x), \qquad x \in \omega_h, \\ \Lambda(X;\ y,\ Y) = \dfrac{1}{H(X)} \sum\limits_{\alpha=1}^{2} (S_\alpha^+ W_\alpha^{h+} - S_\alpha^- W_\alpha^{h-}) = -f(X), \qquad X \in \Omega_h, \\ y = \nu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad Y = \nu(X), \quad X \in \Gamma_h, \end{cases}$$

где w_α^h, W_α^h определяются по формулам (3.3).

Как и ранее, уравнения (3.4) запишем в виде

$$(3.5)\qquad \overline{\Lambda}\overline{y} = -\overline{f}(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \mathcal{G}_h, \quad \overline{y} = \overline{\nu}(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \mathcal{T}_h,$$

с оператором $\overline{\Lambda}$ самосопряженным и положительно-определенным в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Т е о р е м а 4. *Схема* (3.3), (3.4) *при условиях* (3.1) *сходится в сеточной норме* $W_2^1(\mathcal{G}_h)$. *Справедлива оценка*

$$(3.6)\qquad \|\overline{y} - \overline{u}\|_{W_2^1(\mathcal{G}_h)} \leqslant M(m_0,\ m_1)\, h.$$

Здесь $\overline{u} = \{u(x),\ u(X)\}$, u — решение исходной задачи (1.1), $\overline{y}$ — решение задачи (3.3)—(3.4), M — постоянная, зависящая от постоянных m_0, m_1 из (3.1) и не зависящая от h,

$$\|\overline{y}\|^2_{W_2^1(\mathcal{G}_h)} = \|\overline{y}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\omega'_{h\alpha}} (y^2_{\xi_\alpha} + Y^2_{\hat{\xi}_{3-\alpha}})\, s_\alpha S_{3-\alpha} \sin\theta(x'_\alpha).$$

В случае уравнения $\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u) = -f(x)$ правые части формул (3.3) нужно умножить на $k(x'_\alpha)$. Справедлива оценка (3.6).

2. Векторная схема на сетке, заданной произвольной совокупностью точек. Рассмотрим вопрос об аппроксимации уравнения (2.1) на сетке $\overline{\omega}_h$, заданной произвольной совокупностью точек $x \in \overline{\Omega}$. Построим дополнительную к $\overline{\omega}_h$ сетку узлов $X \in \overline{\Omega}_h$.

Около каждого узла $x \in \overline{\omega}_h$ построим ячейку Дирихле, которая определяется (см. [23]) как минимальный из вложенных друг в друга многоугольников, стороны которых — перпендикуляры, проходящие через середины отрезков прямых, соединяющих данную точку с окружающими ее узлами. Вся область покрывается ячейками Дирихле без пересечений и дырок (см. рис. 5). Множество вершин X ячеек Дирихле образуют дополнительную к $\overline{\omega}_h$ сетку $\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$.

Каждому узлу $x \in \omega_h$ поставим в соответствие ячейку Дирихле $H(x)$, ограниченную совокупностью отрезков $s = s_k(x)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ K(x))$,

включающую, быть может, отрезок s^*, соединяющий концы дуги $\Delta s \in \Gamma$, $(x \in \omega_h^*)$. Каждому узлу $X \in \Omega_h$ поставим в соответствие ячейку $H(X)$ (как правило, треугольник), ограниченную отрезками $S = S_k(X)$ $(k = 1, 2, \ldots, K(X))$, соединяющими ближайшие к X узлы x из множества $\overline{\omega}_h$ (рис. 5).

Узлы x'_Γ — точки пересечения нормали Δn, проведенной из узла $x \in \omega_h^*$ к отрезку s^*, с границей Γ,— будем относить как к множеству γ'_h потоковых узлов, так и к множеству граничных узлов γ_h.

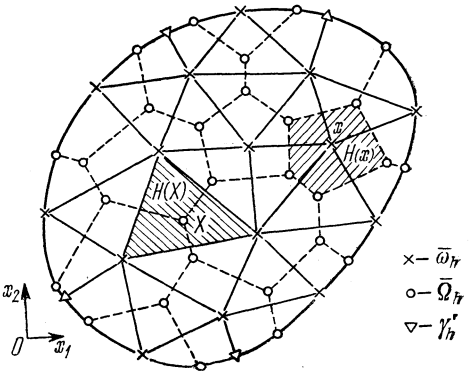

Рис. 5.

Отрезки s и S образуют по построению локально-ортогональную систему отрезков. Точки x' пересечения соответствующих ортогональных отрезков s_k и S_m назовем потоковыми узлами $(x' \in \overline{\omega}'_h, \ \gamma'_h \subset \overline{\omega}'_h)$. Вместо $s_k(x)$, $S_m(X)$ будем писать $s = s(x')$, $S = S(x')$, $x' \in \overline{\omega}'_h$.

В узлах $x' \in \overline{\omega}'_h$ введем нормальное $n(x')$ и касательное $l(x')$ направления к отрезку $s(x')$ ($l(x')$ — направление, ортогональное к $S(x')$). Каждому узлу x, X поставим в соответствие наборы $Ш(x)$ и $Ш(X)$ потоковых узлов x', соответствующих отрезкам $s_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, K(x))$, $S_k(X)$ $(k = 1, 2, \ldots, K(X))$.

Введем разностные отношения $y_n(x')$, $Y_{\hat{l}}(x')$ для сеточных функций $y(x)$, $x \in \overline{\omega}_h$ и $Y(X)$, $X \in \overline{\Omega}_h$, аппроксимирующие производные $\partial u/\partial n$ и $\partial u/\partial l$ в в точке $x' \in \overline{\omega}'_h$, $n = n(x')$, $l = l(x')$. Пусть $h = \max\limits_{\omega'_h} (s(x'), S(x'))$.

Запишем средний поток $\overline{w}$ через отрезки $s(x')$ и $S(x')$:

$$\overline{w} = s^{-1} \int_s w_n \, ds, \qquad \overline{w} = S^{-1} \int_S w_l \, dS,$$

где

$$w_n = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \, \partial u/\partial x_\beta \cos(n, x_\alpha), \qquad w_l = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \, \partial u/\partial x_\beta \cos(l, x_\alpha).$$

Выразим w_n и w_e через производные $\partial u/\partial n$ и $\partial u/\partial e$:

$$w_n = a_{nn} \, \partial u/\partial n + a_{nl} \, \partial u/\partial l, \quad w_l = a_{ln} \, \partial u/\partial n + a_{ll} \, \partial u/\partial l,$$

где

$$a_{pq} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \cos(p, x_\alpha) \cos(q, x_\beta), \quad p, q = n, l.$$

Очевидно, что $a_{nn}, a_{ll} \geqslant c_1 > 0$ (см. (2.1)).

Введем сеточные аналоги средних потоков $\overline{w}_n$, $\overline{w}_l$:

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{cases} w^h(x') = a_{nn} y_n + a_{nl} Y_{\hat{l}}, \\ W^h(x') = a_{ln} y_n + a_{ll} Y_{\hat{l}}. \end{cases}$$

Запишем уравнение баланса для ячеек $H(x)$, $H(X)$. Для этого проинтегрируем (2.1) по площадкам $H(x)$, $H(X)$. Заменим в получающихся уравнениях баланса средние потоки $\overline{w}_n$, $\overline{w}_l$ их сеточными аналогами (3.7), правую часть заменим приближенно на Hf. Приходим к задаче:

$$(3.8)\quad \begin{cases} \Lambda(x;\ y,\ Y) = \dfrac{1}{H(x)} \sum\limits_{x' \in Ш(x)} s(x')\, w^h(x') = -f(x), & x \in \omega_h, \\ \Lambda(X;\ y,\ Y) = \dfrac{1}{H(X)} \sum\limits_{x' \in Ш(X)} S(x')\, W^h(x') = -f(X), & X \in \Omega_h, \\ y = v(x), \quad x \in \gamma_h, \quad Y(X) = v(X), \quad X \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Введем, как и выше, пространства сеточных функций $\mathscr{H}_1$ $(y(x),\ x \in \omega_h)$, $\mathscr{H}_2(Y(X),\ X \in \Omega_h)$, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Схему (3.7), (3.8) запишем в виде (3.5), оператор $-\overline{\Lambda}$ в пространстве $\mathscr{H}$ является самосопряженным при $k_{12} = k_{21}$ и положительно-определенным. Схема (3.7), (3.8) сходится в сеточной норме $W_2^1(\mathscr{G}_h)$ со скоростью $O(h)$ (Л. А. Маслянкина, И. В. Фрязинов),

$$\|\overline{y}\|^2_{W_2^1(\mathscr{G}_h)} = \|\overline{y}\|^2 + \sum_{x' \in \overline{\omega}_h} s(x')\, S(x')\, (y_{\overline{n}}^2 + Y_{\overline{l}}^2).$$

Аналогично рассматривается третья краевая задача.

ГЛАВА II
МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

§ 4. Аддитивные схемы

1. Суммарная аппроксимация. Перейдем к построению и исследованию экономичных схем для параболических уравнений. Экономичные схемы являются безусловно устойчивыми (как неявные схемы) и требуют для нахождения решения числа действий, пропорционального числу узлов сетки (как явные схемы).

Наиболее общим и эффективным методом построения экономичных схем является метод суммарной аппроксимации.

Следуя [12], введем понятие составной схемы, как «цепочки» разностных уравнений определенной структуры, осуществляющих переход от временно́го слоя t_j к t_{j+1}.

Начнем с простого примера двухслойной составной схемы:

$$(4.1)\quad \begin{cases} \dfrac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} + A_1 y^{j+1/2} = \varphi_1^j, \\ \dfrac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} + A_2 y^{j+1} = \varphi_2^j, \\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ j_0, \qquad y^0 = u^0, \end{cases} \qquad x \in \omega_h$$

где $A_\alpha (\alpha = 1,\ 2)$ — разностные операторы, заданные в пространстве $\mathscr{H}$ сеточных функций, определенных на сетке ω_h, τ — шаг по времени. Задача (4.1) разрешима, если операторы $(E + \tau A_\alpha)^{-1}$, $\alpha = 1,\ 2$ существуют. Это имеет место при

$$(4.2)\qquad (A_\alpha y,\ y) \geqslant 0,$$

где $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$.

Пусть $u = u(t)$ является решением некоторой исходной задачи (абстрактной задачи Коши). Погрешностью аппроксимации составной схемы назовем [11] сумму погрешностей аппроксимаций (определяемых как невязка на решении исходной задачи) всех разностных уравнений цепочки. Так, для составной схемы (4.1) погрешность аппроксимации

$$\psi^j = \psi_1^j + \psi_2^j,$$

где $\psi_\alpha^j (\alpha = 1, 2)$ — погрешности аппроксимации (невязки) отдельных уравнений (4.1)

$$\psi_\alpha^j = \varphi_\alpha^j - \frac{u^{j+\alpha/2} - u^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} - A_\alpha u^{j+\alpha/2}$$

на решении исходной задачи (функции $u = u(t)$). Составные схемы, погрешность аппроксимации которых понимается в суммарном смысле, называются аддитивными.

Для решения задачи (4.1) при условии (4.2) справедлива оценка

$$(4.3) \qquad \| y^{j+1} \| \leqslant \| y^0 \| + M \Big(\max_{0 \leqslant k \leqslant j} \| \varphi_1^k + \varphi_2^k \| + \tau^{1/2} \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant j \\ \alpha = 1, 2}} \| \varphi_\alpha^k \| \Big),$$

где $\| y \| = (y, y)^{1/2}$, $M = \text{const}$, не зависящая от τ, ω_h.

Ошибка $z^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} - u^{j+\alpha/2}$, $\alpha = 1, 2$ удовлетворяет уравнениям (4.1) с правыми частями ψ_1^j, ψ_2^j, $z^0 = 0$. Поэтому из (4.3) следует сходимость схемы, если имеет место суммарная аппроксимация

$$\| \psi_1^k + \psi_2^k \| \to 0 \quad \text{при} \quad h, \tau \to 0, \quad \| \psi_\alpha^k \| = O(1) \ (\alpha = 1, 2), \quad (k = 0, 1, \ldots, j_0).$$

Условия $\| \psi_\alpha^k \| = O(1)$ обычно выполнены в случае гладких функций u. Из суммарной аппроксимации и устойчивости следует сходимость схемы (4.1).

В общем случае составную схему рассматриваем как систему операторно-разностных уравнений для перехода с временно́го слоя t_j на слой t_{j+1}:

$$(4.4) \qquad C_\alpha^j y \equiv B \frac{y^{j+\alpha/2} - y^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} A_{\alpha\beta}(t_j)\, y^{j+\beta/p} -$$

$$- G_\alpha(t_j)\, y^j = \varphi_\alpha^j \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad y^0 = u^0,$$

где B, $A_{\alpha\beta}$, G_α — операторы, отображающие $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$, u^0, φ_α^j — заданные функции, $\alpha, \beta = 1, 2 \ldots p$.

Для перехода со слоя t_j на слой t_{j+1}, т. е. определения y^{j+1} по y^j нужно решить систему операторных уравнений. При t_0 задается произвольная функция $y^0 \in \mathscr{H}$.

Погрешность аппроксимации $\psi(u)$ на функции $u(t)$ — решении исходной задачи, определяется как сумма,

$$(4.5) \qquad \psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha(u),$$

где $\psi_\alpha(u) = \psi^{j+\alpha/p}$ — невязка для уравнения (4.4) номера α. Схема (4.4) с суммарной погрешностью (4.5) называется двухслойной аддитивной схемой [12]. Если $| A_{\alpha\beta} |$ — нижняя треугольная матрица-оператор и $B + \tau A_{\alpha\alpha}$ — экономичные операторы, то устойчивая аддитивная схема является экономичной.

2. Аддитивная схема n-го ранга. Пусть задача (4.4) однозначно разрешима и схема устойчива, так что

$$\| y^{j+\alpha/p} \| \leqslant M \Big(\max_{0\leqslant k\leqslant j} \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} \| \varphi_\beta^k \|_{(2)} + \| u^0 \|_{(1)} \Big), \tag{4.6}$$

$M = \text{const}$, не зависящая от t, h, τ, $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые функционалы в $\mathscr{H}$. Ошибка $z^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} - u^{j+\alpha/2}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$ — решение задачи

$$C_\alpha^j z = \psi_\alpha^j \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p;\ j = 0, 1, \ldots, j_0), \qquad z^0 = 0,$$

где $\psi_\alpha = C_\alpha u - \varphi_\alpha$ — погрешность аппроксимации отдельных уравнений (4.4), $\psi_\alpha = \psi_\alpha^k$, $t = t_k$.

Назовем составную схему (4.4) аддитивной схемой n-го ранга, если на решении исходной задачи — достаточно гладкой функции $u = u(t)$ — погрешность аппроксимации ψ_α может быть представлена в виде

$$\psi_\alpha^k = \Psi_{\alpha 0}^k + \sum_{s=1}^{n} \psi_{\alpha s}^k, \tag{4.7}$$

причем

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_{\alpha s}^k = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4.8}$$

где

$$\Psi_{\alpha s}^k = \psi_{\alpha s}^k - \sum_{\beta=1}^{p} A_{\alpha\beta}(t_k)\, \eta_s^{k+\beta/p},$$

$$\eta_s^{k+\beta/p} = \tau B^{-1} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Psi_{\beta s-1}^k \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Будем говорить, что схема n-го ранга аппроксимирует исходную задачу в суммарном смысле с порядком $\tau^l + h^r$, если

$$\| \Psi_{\alpha n}^k \|_{(2)} \leqslant M(\tau^l + h^r) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p),\ t_k \in \omega_\tau, \tag{4.9}$$

$M = \text{const}$, не зависящая от τ, h, t_k.

Если аддитивная схема n-го ранга (4.4), (4.7), (4.8) обладает суммарной аппроксимацией (4.9) и устойчива (4.6), то она сходится со скоростью $O(\tau^l + h^r)$ (см. [24]).

Идея суммарной аппроксимации n-го ранга позволяет построить аддитивные экономичные схемы повышенного порядка точности (см. § 5).

§ 5. Примеры экономичных аддитивных схем

1. Локально-одномерная схема. Рассмотрим простейшую экономичную аддитивную схему — локально-одномерную схему (л. о. с.) — для уравнения теплопроводности в произвольной области Ω с границей Γ:

$$\begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u, & x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad u = \nu(x), \quad x \in \Gamma, \\ 0 < t \leqslant T, & u(x, 0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пусть u^0, ν, Γ таковы, что решение задачи (5.1) — функция $u(x, t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$ $(\partial^4 u/\partial x_\alpha^4,\ \partial^2 u/\partial t^2 \in C(\overline{Q}_T))$, $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times (0 \leqslant t \leqslant T)$, $u^0 \in C(\overline{\Omega})$, $\nu \in C(\Gamma)$.

Введем сетку $\overline{\omega}_h$, как в п. 2 § 1, и сетку по времени ω_τ:

$$\omega_\tau = \{t_{j+\alpha/2} = (j + 0{,}5\alpha)\tau, \quad \alpha = 1, 2; \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 = T/\tau\}.$$

Укажем следующий эвристический прием построения л. о. с. Перепишем уравнение (5.1) в виде

$$\mathscr{P}u = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathscr{P}_\alpha u = 0, \qquad \mathscr{P}_\alpha u = 0{,}5\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x_\alpha^2.$$

Рассмотрим цепочку из двух одномерных задач. На каждом промежутке $t_j < t < t_{j+1}$ будем рассматривать «цепочку» из двух одномерных задач:

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \mathscr{P}_1 v_1 = 0, & x \in \Omega, \quad v_1 = \nu, \quad x \in \Gamma, \quad t_j < t < t_{j+1/2}, \\ \mathscr{P}_2 v_2 = 0, & x \in \Omega, \quad v_2 = \nu, \quad x \in \Gamma, \quad t_{j+1/2} < t < t_{j+1}, \end{cases}$$

причем

$$v_1(t_j) = v(t_j), \qquad v_2(t_{j+1/2}) = v_1(t_{j+1/2}),$$
$$v(t_{j+1}) = v_2(t_{j+1}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, j_0), \qquad v(0) = u^0.$$

Для v_1, v_2 получаем одномерные уравнения теплопроводности. Аппроксимируем каждое из уравнений. Продолжим, как и в п. 3 § 1, решение в область Ω^h, проинтегрируем каждое из уравнений по площадке $H_0(x)$, $x \in \omega_h$:

$$H_0^{-1} \int_{H_0} 0{,}5\partial v/\partial t dx_1 dx_2 = H_0^{-1}(s_{0\alpha}^{+}\overline{w}_\alpha^{+} - s_{\overline{0}\alpha}\overline{w}_\alpha^{-}).$$

Заменяя, как и в § 1, $\overline{w}_\alpha^{\pm}$ сеточными аналогами $w_\alpha^{h\pm}$, приходим к оператору Λ_α — сеточному аналогу $L_\alpha = \partial^2/\partial x_\alpha^2$:

$$(5.3) \qquad \Lambda_\alpha y = \frac{1}{H_0}(s_{0\alpha}^{+} w_\alpha^{h+} - s_{\overline{0}\alpha} w_\alpha^{h-}),$$

где в данном случае

$$(5.4) \qquad w_\alpha^{h\pm} = y_{\overline{x}_\alpha}^{\pm}, \qquad x'_\alpha = x^{(\pm 0{,}5_\alpha)} \in \omega'_{h\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Тогда $\Lambda_\alpha y = y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}$, $\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$. Заменяя также производную по времени сеточным аналогом, приходим к л. о. с.:

$$(5.5) \qquad \frac{y^{j+\alpha/2} - y^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\alpha/2}, \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+\alpha/2} = \nu(x), \quad x \in \gamma_h$$
$$(\alpha = 1, 2; \ j = 0, 1, \ldots, j_0); \quad y^0 = u^0, \quad x \in \omega_h.$$

Для ошибки $z^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} - u^{j+\alpha/2}$ получаем неоднородные уравнения с однородными краевым и начальным условиями. Правые части уравнения — погрешности аппроксимации $\psi_\alpha^j = O(1)$ $(\alpha = 1, 2)$. Из формулы

$$\psi_1^j + \psi_2^j = -\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \Lambda_1 u^{j+1/2} + \Lambda_2 u^{j+1}$$

видно, что на решении исходной задачи (5.1)

$$\psi_1^j + \psi_2^j = O(\tau + h^2), \quad x \in \omega_h^0, \quad \psi_1^j + \psi_2^j = O(\tau + h), \quad x \in \omega_h^*,$$
$$\psi_\alpha^j = O(1) \quad (\alpha = 1, 2).$$

Схема (5.5) — аддитивная схема первого ранга. В пространстве сеточных функций $\mathscr{H}_0$, определенном в п. 2 § 1, операторы $-\Lambda_1, -\Lambda_2$ являются положительно-определенными и самосопряженными. Из (4.3), где $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$, следует сходимость л. о. с. (5.5). В [25] показано, что л. о. с. для уравнения $\partial u/\partial t = \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) + f(x)$ в сеточной норме $C(\omega_h)$ на неравномерной сетке сходится со скоростью $O(h^2 \ln 1/h + \tau)$, на равномерной сетке — со скоростью $O(h^2 + \tau)$. В этом случае вместо (5.4) следует записать

$$w_\alpha^h(x'_\alpha) = k(x'_\alpha)\, y_{x_\alpha}(x'_\alpha), \qquad x'_\alpha \in \omega'_{h\alpha}, \tag{5.6}$$

и в правые части (5.5) добавить слагаемые f_α ($\alpha = 1, 2$), $f_1 + f_2 = f$; л. о. с. является экономичной.

Аналогично строятся л. о. с. для параболических уравнений в случае любого числа измерений [11], [25], для уравнений в криволинейных ортогональных координатах [26], уравнения колебаний и для систем параболических и гиперболических уравнений [12], [27].

Отметим, что нетрудно построить л. о. с. на сетке $\bar{\omega}_h$ из п. 4 § 1. Для этого проинтегрируем уравнения (5.2) по площадке $H(x)$. В этом случае приходим при $x \in \omega_h^*$ к выражениям

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{H(x)}\left(s_\alpha^+ w_\alpha^{h+} - s_\alpha^- w_\alpha^{h-} - \Delta s w_{n\alpha}^h\right), \quad x \in \omega_h^*, \tag{5.7}$$

где $w_{n\alpha}^h$ — сеточный аналог среднего потока

$$\bar{w}_{n\alpha} = \Delta s^{-1} \int_{\Delta s} w_{n\alpha}\, ds, \tag{5.8}$$

$w_{n\alpha} = \partial u/\partial x_\alpha \cos(n, x_\alpha)$, n — внутренняя нормаль к Г. Выразим производные $\partial u/\partial x_\alpha$ через производные $\partial u/\partial n$, $\partial u/\partial s$, которые заменим сеточными аналогами. Приходим к выражению

$$w_{n\alpha}^h(x'_\Gamma) = c_{n\alpha}^2 y_n + c_{n\alpha} c_{s\alpha} \hat{Ys}, \qquad \hat{Ys} \equiv \hat{\nu s}, \tag{5.9}$$

где $c_{n\alpha} = \cos(n(x_*), x_\alpha)$, $c_{s\alpha} = \cos(s(x_*), x_\alpha)$, x_* — середина дуги Δs. Аддитивная схема (5.7), (5.5), (5.9) сходится в $\mathscr{H}$ (см. п. 4 § 1) со скоростью $O(h^{3/2} + \tau^{1/2})$.

Уравнение баланса при построении л. о. с. записывалось для каждого из уравнений цепочки (5.2). Это соответствует специальной аппроксимации потоков в уравнении баланса для исходной задачи (5.1) с точностью до $O(\tau + h^2)$ на гладких функциях.

2. Аддитивные схемы переменных направлений. Классические схемы переменных направлений — схема Писмена — Рэчфорда (П.— Р.) [28], и схема Дугласа — Рэчфорда (Д.— Р.) [29] также могут рассматриваться как аддитивные схемы. Схемы П.— Р. и Д.— Р. для уравнения (5.1)

в произвольной области Ω имеют соответственно вид

$$(5.10)\qquad \frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}=\Lambda_2 y^{j+1/2}+\Lambda_1 y^j,\quad \frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau}=\Lambda_2 y^{j+1/2}+\Lambda_1 y^{j+1},\quad x\in\omega_h,$$

и

$$(5.11)\qquad \frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}=\Lambda_2 y^{j+1/2}+\Lambda_1 y^j,\quad \frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau}=\tau\Lambda_1\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},\quad x\in\omega_h,$$

при граничном и начальном условиях

$$(5.12)\qquad y^{j+\alpha/2}=\nu(x),\quad x\in\gamma_h\quad(\alpha=1,\ 2;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ j_0),\quad y^0=u^0,\ x\in\omega_h.$$

Здесь операторы Λ_α определяются по формулам (5.3), (5.4) (либо по формулам (5.7), (5.9)).

Каждое из уравнений (5.10) обладает обычной аппроксимацией ($\Psi^k_{\alpha 0}=0$), а в случае, когда область Ω — прямоугольник, является аддитивной схемой второго ранга ($\Psi^k_{11}+\Psi^k_{12}=0$, см. п. 2 § 4 при соответствующем задании граничного условия [30]). Схема (5.11) — аддитивная схема первого ранга.

Схемы П.— Р., Д.— Р. рассматривались как аддитивные, схемы в произвольной области Ω в переменных x_1, x_2, а также переменных (r, φ), (r, z), (r, θ). Удалось установить их сходимость без обычного в подобных случаях требования перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2. Схемы (5.10), (5.11) сходятся в $\mathscr{H}_0$ и $\mathscr{H}$ (см. § 1) со скоростью $O(h^{3/2}+\tau)$ (А. В. Гулин, И. В. Фрязинов).

3. Аддитивные схемы повышенного порядка точности. Рассмотрим вопрос о построении аддитивных схем повышенного порядка точности. Напишем схему переменных направлений с весами для задачи (5.1) при однородных краевых условиях ($\nu(x)=0$, $x\in\Gamma$) в прямоугольнике Ω:

$$(5.13)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}=\sigma_2\Lambda_2 y^{j+1/2}+(1-\sigma_1)\Lambda_1 y^j, \\ \dfrac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau}=(1-\sigma_2)\Lambda_2 y^{j+1/2}+\sigma_1\Lambda_1 y^{j+1}, \end{cases} \quad x\in\omega_h$$

$$y^{j+1/2}=y^{j+1}=0,\qquad x\in\gamma_h\qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ j_0),\qquad y^0=u^0,\quad x\in\overline{\omega}_h.$$

Схема (5.13) устойчива при $\sigma_\alpha\geqslant 0{,}5-h_\alpha^2(1+\varepsilon)/4\tau$, $\varepsilon>0$, имеет второй ранг (см. п. 2 § 5) для $\sigma_\alpha=1/2$ и $\sigma_\alpha=1/2-h_\alpha^2/12\tau$ и сходится в $\mathscr{H}_0$ со скоростями $O(\tau^2+h^2)$ при $\sigma_\alpha=1/2$ и $O(\tau^2+h^4)$ при $\sigma_\alpha=1/2-h_\alpha^2/12\tau$.

Укажем способ построения аддитивных симметризованных (относительно момента $t=t_{j+1/2}$) схем в случае любого числа измерений, использующий в качестве блоков уравнения типа (5.13).

Обозначим первое уравнение (5.13) символом $A_{21}^{\sigma_2,\ 1-\sigma_1}$. Тогда для второго уравнения получим запись $A_{12}^{\sigma_1,\ 1-\sigma_2}$, а схема (5.13) может быть записана в виде $A_{21}^{\sigma_2,\ 1-\sigma_1}\to A_{12}^{\sigma_1,\ 1-\sigma_2}$, где стрелка указывает порядок решения уравнений. В случае p измерений каждый интервал τ делится на $2p-2$ интервала, вводятся промежуточные значения.

Аддитивная схема строится как цепочка уравнений

$$A_{21}^{\pi_2\sigma_2,\ \pi_1(1-\sigma_1)} \to A_{32}^{\pi_3\sigma_3,\ \pi_2(1-\sigma_2)} \to \ldots A_{pp-1}^{\pi_p\sigma_p,\ \pi_{p-1}(1-\sigma_{p-1})} \to$$
$$\to A_{p-1p}^{\pi_{p-1}\sigma_{p-1},\ \pi_p(1-\sigma_p)} \to A_{p-2\,p-1}^{\pi_{p-2}\sigma_{p-2},\ \pi_{p-1}(1-\sigma_{p-1})} \to \ldots \to A_{12}^{\pi_1\sigma_1,\ \pi_2(1-\sigma_2)},$$

где $\pi_\alpha = 0{,}5$, $\alpha \neq 1$, p, $\pi_1 = \pi_p = 1$, $\sigma_\alpha = 0{,}5 - h_\alpha^2/(12\tau\pi_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$.

Большое число аддитивных симметризованных схем было построено в [30] и [31]. В случае неоднородных краевых условий при построении схем повышенного порядка точности потребовалось введение поправок $O(\tau^2)$ в краевое условие ($O(h^2)$ в правую часть уравнения). Однако для ряда аддитивных схем с помощью сеточного аналога принципа Дюгамеля удалось установить устойчивость схем по краевым условиям, что позволило отбросить поправки $O(\tau^2)$, не меняя порядка точности схем [32]. Схемы повышенного порядка точности в переменных (r, z) построены в [21].

4. Схемы с уравнениями на графах. Существует ряд задач математической физики, для которых локально-одномерный метод не обеспечивает достаточной точности. Для решения этих задач экономичным методом целесообразно в некоторых узлах сетки $\bar{\omega}_h$ пользоваться разностными уравнениями, аппроксимирующими исходное уравнение в обычном смысле, а в остальных узлах пользоваться уравнениями локально-одномерной схемы. Поясним это на примере двумерного уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \operatorname{div}(k(x)\ \operatorname{grad} u)$, когда коэффициент $k(x)$ терпит разрыв на кривой Γ^0, не параллельной координатным осям. На линии Γ^0 выполнены условия непрерывности функции u и проекции потока на нормаль к Γ^0, $w_n = -k\,\partial u/\partial n$, n — нормаль к Γ^0. Составляющие потока вдоль осей Ox_α, $w_\alpha = -k(x)\partial u/\partial x_\alpha$ терпят на Γ^0 разрывы. Для простоты изложения будем считать функцию $k(x)$ кусочно-постоянной. В рассматриваемом случае л. о. с. является недостаточно точной.

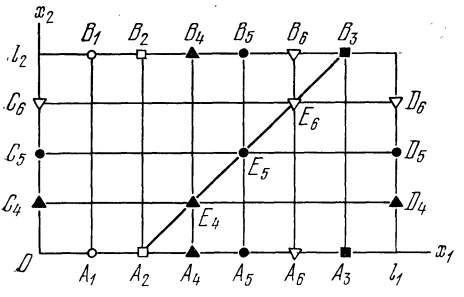

Рис. 6.

Пусть $\Omega = \{0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, Γ^0 — отрезок прямой, делящей Ω на две области Ω^+ и Ω^- с границами Γ^+ и Γ^-, $\Omega^0 = \Omega, \setminus \Gamma^0$, $\Gamma^0 = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$. Введем равномерную сетку $\bar{\omega}_h$ с шагами h_1 и h_2, согласованную с линиями Γ^0 и Γ, как показано на рис. 6. Введем множество γ_h^0 узлов сетки $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, лежащих на Γ^0 (на рис. 6 E_4, E_5, $E_6 \in \gamma_h^0$). Оператору $L_\alpha = \partial/\partial x_\alpha(k(x)\partial/\partial x_\alpha)$ поставим в соответствие оператор Λ_α:

$$\Lambda_\alpha y = k^\pm y_{x_\alpha \bar{x}_\alpha}, \quad x \in \omega_h^\pm = \Omega^\pm \cap \omega_h \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\Lambda_1 y = 1/h_1\,(k^+ y_{x_1} - k^- y_{\bar{x}_1}), \quad \Lambda_2 y = 1/h_2\,(k^- y_{x_2} - k^+ y_{\bar{x}_2}), \qquad x \in \gamma_h^0.$$

Так как $\Lambda_\alpha u = O(1/h_\alpha)$ при $x \in \gamma_h^0$, то в л. о. с. $\psi_\alpha = O(1/h_\alpha)$ при $x \in \gamma_h^0$ и $\|\psi_\alpha\| = O(1/\sqrt{h_\alpha})$. Поэтому в оценку (4.3) войдет величина $O(\sqrt{\tau/h_\alpha})$. При этом величина ψ_α при $x \in \gamma_h^0$ умножается на величину скачка потока

вдоль оси Ox_α. Если скачок коэффициента k велик, то для получения достаточной точности необходимо выбирать шаг τ столь малым, что применение л. о. с. становится нецелесообразным.

Из предыдущего ясно, что необходимо повысить аппроксимацию схемы при $x \in \gamma_h^0$, что может быть достигнуто применением обычной многомерной схемы, в остальных узлах можно пользоваться уравнениями л. о. с. В результате мы приходим к аддитивной схеме с уравнениями на графах [33].

Рассмотрим задачу

$$(5.14)\qquad \begin{cases} \partial u/\partial t = k^{\pm}\Delta u, \quad x \in \Omega^{\pm}, \quad u = \nu(x), \quad x \in \Gamma, \\ u^+ = u^-, \quad k^+ (\partial u/\partial n)^+ = k^- (\partial u/\partial n)^-, \quad x \in \Gamma^0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь $v^{\pm}$ — предельные значения справа и слева функции v на Γ^0, $k(x) = k^{\pm} = \text{const}^{\pm} > 0$, $x \in \Omega^{\pm}$. Пусть $u \in C^{4,2}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $\overline{Q}_T^{\pm} = \overline{\Omega}^{\pm} \times (0 < t \leqslant T)$.

Рассмотрим графы $G_1, G_2, \ldots, G_m$ двух типов: графы типа «крест» и графы типа «отрезок», изображенные на рис. 6. Графы построены таким образом, что совокупность точек пересечения всех ребер и вершины графов образуют сетку $\overline{\omega}_h$. Вершины графов лежат на границах Γ и Γ^0, а их ребра параллельны координатным осям. Вершины различных графов на рис. 6 отмечены различными значками, вершины одного и того же графа — одинаковыми.

На рис. 6 изображено три графа типа «крест» с вершинами A_n, B_n, C_n, D_n, E_n и ребрами (A_n, E_n), (C_n, E_n), (E_n, B_n), (E_n, D_n) $(n = 4, 5, 6)$ и три графа типа «отрезок» с вершинами A_n, B_n и одним ребром (A_n, B_n) $(n = 1, 2, 3)$; $m = 6$.

Обозначим через g_n множества узлов из $\overline{\omega}_h$, лежащих на графе $G_n (n = 1, 2, \ldots, m)$. Определим на каждом графе G_n оператор $\Lambda^{(n)} y = \Lambda_\alpha y$ в узлах на ребрах графа, параллельных оси координат $Ox_\alpha (\alpha = 1, 2)$, $\Lambda^{(n)} y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$ при $x \in \gamma_h^0$.

Исходной задаче (5.14) поставим в соответствие следующую разностную задачу:

$$(5.15)\qquad \begin{cases} y_0 = y^j, \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ \dfrac{\overline{y}_n - y_{n-1}}{\tau} = \Lambda^{(n)} \overline{y}_n, \quad x \in g_n, \quad \overline{y}_n = \nu, \quad x \in \gamma_h, \\ y_n = \begin{cases} \overline{y}_n, & x \in g_n \\ y_{n-1}, & x \notin g_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots, m), \quad y^{j+1} = y_m, \quad x \in \overline{\omega}_h \\ (j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad y^0 = u^0, \quad x \in \omega_h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что переход от слоя t_j к слою t_{j+1} осуществляется путем последовательного решения задач на графах $G_1, G_2, \ldots G_m$. При нахождении функции $\overline{y}_n$ используется метод прогонки.

Каждый узел $x \notin \gamma_h^0$ принадлежит двум графам, G_{n_1} и G_{n_2}, ребро одного из которых параллельно оси Ox_1, другого — оси Ox_2. На каждом из ребер решаются те же уравнения, что и в л. о. с. В силу определения оператора $\Lambda^{(n)}$

будем иметь $\Lambda^{(n_1)} + \Lambda^{(n_2)} = \Lambda$. Отсюда следует наличие суммарной аппроксимации в таком узле $x \notin \gamma_h^0$. Каждый узел $x \in \gamma_h^0$ принадлежит только одному графу типа «крест», и в нем имеется обычная аппроксимация. Имеет место оценка (4.3), из которой следует сходимость схем на графах [34].

Аналогично строятся аддитивные экономичные схемы на графах для третьей краевой задачи для одного класса областей с криволинейными границами, часто встречающимися в технических приложениях [35], а также и в случае других p-мерных задач ($p \geqslant 2$). В общем случае эти схемы приводят к специальным системам алгебраических уравнений на графах. Для решения этих систем используются различные модификации метода прогонки [36] (см. также [37]).

§ 6. Векторные аддитивные схемы

1. Векторная аддитивная схема для первой краевой задачи. Пусть Ω — произвольная область в плоскости Ox_1x_2 с гладкой границей Γ (как и выше, для простоты изложения будем считать область выпуклой), $Q_T = \Omega \times (0 < t \leqslant T)$, $S_T = \Gamma \times (0 < t \leqslant T)$.

Рассмотрим задачу для параболического уравнения со смешанными производными:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \partial u/\partial t = \sum\limits_{\alpha,\,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta}u, & (x,\,t) \in Q_T, \quad u(x,\,t) = \nu(x), \quad (x,\,t) \in S_T, \\ u(x,\,0) = u^0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь, как и в § 2, $L_{\alpha\beta}u = \partial/\partial x_\alpha\,(k_{\alpha\beta}(x)\,\partial u/\partial x_\beta)$, $L = \sum\limits_{\alpha,\,\beta=1}^{p} L_{\alpha\beta}$ — эллиптический оператор. Будем считать, что

$$(6.2)\qquad k_{12}(x) = k_{21}(x).$$

Пусть существует решение задачи (6.1), (6.2) — функция

$$u = u(x,\,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T), \quad k_{\alpha\beta} \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u^0 \in C^4(\bar{\Omega}), \quad \nu \in C^2(\Gamma).$$

Введем сетки $\bar{\omega}_h$, $\bar{\Omega}_h$ как в п. 1 § 2, сетку ω_τ как в п. 1 § 5. Рассмотрим цепочку уравнений (5.2):

$$(6.3)\qquad \mathscr{P}_\alpha v_\alpha = 0{,}5\partial v_\alpha/\partial t - L_\alpha v_\alpha = 0, \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{2}} < t < t_{j+\alpha/2},$$

где $L_\alpha = L_{\alpha\alpha} + L_{\alpha 3-\alpha}$ $(\alpha = 1,\,2)$, $v_1(t_{j+\alpha/2}) = v_2(t_{j+\alpha/2})$.

Проинтегрируем уравнение (6.3) по площадке $H(x)$, $x \in \omega_h$, заменим потоки $w_\alpha = k_{\alpha\alpha}\partial v_\alpha/\partial x_\alpha + k_{\alpha 3-\alpha}\partial v_\alpha/\partial x_{3-\alpha}$, производную $\partial v_\alpha/\partial t$ сеточными аналогами. Оператору L_α поставим в соответствие сеточный оператор Λ_α согласно (5.7), где $w_\alpha^h(x'_\alpha)$ определяется первой формулой (2.3), $w_{n\alpha}^h$ — сеточный аналог (5.8), где $w_{n\alpha} = w_\alpha \cos(n,\,x_\alpha)$. Выразим $w_{n\alpha}$ через производные $\partial v/\partial n$ и $\partial v/\partial s$ и заменим их сеточными аналогами. Вместо (5.9) получим

$$w_{n\alpha}^h = k_{\alpha\alpha}(c_{n\alpha}^2 y_n + c_{n\alpha}c_{s\alpha}\hat{Ys}) + k_{\alpha 3-\alpha}(c_{n\alpha}c_{n3-\alpha}y_n + c_{n\alpha}c_{s3-\alpha}\hat{Ys}),$$

$$\hat{Ys} \equiv \hat{\nu s}, \quad x'_\Gamma \in \gamma'_h.$$

Поскольку теперь w_α^h, $w_{n\alpha}^h$ зависят от y и Y, то вместо $\Lambda_\alpha y$ в (5.7) будем писать $\Lambda_\alpha(x;\ y,\ Y)$.

Аналогичные выражения получаются при интегрировании по площадкам $H(X)$, $X \in \Omega_h$:

$$\Lambda_\alpha(X;\ y,\ Y) = \frac{1}{H(X)}(S_\alpha^+ W_\alpha^{h+} - S_\alpha^- W_\alpha^{h-} - \Delta S W_{n\alpha}^h),$$

где W_α^h определяется первой формулой (2.5),

$$W_{n\alpha}^h(X'_\Gamma) = k_{\alpha\alpha}(C_{n\alpha}^2 Y\hat{n} + C_{n\alpha}C_{s\alpha}y_s) + k_{\alpha 3-\alpha}(C_{n\alpha}C_{n3-\alpha}Y\hat{n} + C_{n\alpha}C_{s3-\alpha}y_s),$$
$$y_s = \nu_s, \qquad X'_\Gamma \in \Gamma'_h.$$

Здесь $C_{n\alpha} = \cos(n(X_*), x_\alpha)$, $C_{s\alpha} = \cos(s(X_*), x_\alpha)$, X_* — середина дуги ΔS. Если граница площадок $H(x)$, $H(X)$ не содержит каких-либо отрезков $s_\alpha^\pm$, $S_\alpha^\pm$ или дуг Δs, ΔS, то соответствующие слагаемые в выражениях $\Lambda_\alpha(x;\ y,\ Y)$, $\Lambda_\alpha(X;\ y,\ Y)$ следует опустить.

Положим

$$(6.4)\quad \begin{cases} \Lambda_\alpha(x;\ y,\ Y) = \Lambda_{\alpha\alpha}(x;\ y) + \Lambda_{\alpha 3-\alpha}(x;\ Y), & x \in \omega_h, \\ \Lambda_\alpha(X;\ y,\ Y) = \Lambda_{\alpha\alpha}(X;\ Y) + \Lambda_{\alpha 3-\alpha}(X;\ y), & X \in \Omega_h. \end{cases}$$

В (6.4) зависимость $\Lambda_{\alpha\alpha}, \Lambda_{\alpha 3-\alpha}$ от заданных величин $\hat{Y}s = \nu\hat{s}$, $x'_\Gamma \in \gamma'_h$, $y_s = \nu_s$, $X'_\Gamma \in \Gamma'_h$ не указана.

Рассмотрим абсолютно устойчивую экономичную схему:

$$(6.5)\quad \begin{cases} \dfrac{y^{j+\alpha/2} - y^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \Lambda_{\alpha\alpha}(x;\ y^{j+\alpha/2}) + \Lambda_{\alpha 3-\alpha}(x;\ Y^{j+\frac{\alpha-1}{2}}), & x \in \omega_h, \\ \dfrac{Y^{j+\alpha/2} - Y^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \Lambda_{\alpha\alpha}(X;\ Y^{j+\alpha/2}) + \Lambda_{\alpha 3-\alpha}(X;\ y^{j+\frac{\alpha-1}{2}}), & X \in \Omega_h, \\ y^{j+\alpha/2} = \nu, \quad x \in \gamma_h, \quad x'_\Gamma \in \gamma'_h, \quad Y^{j+\alpha/2} = \nu, \quad X \in \Gamma_h \quad X'_\Gamma \in \Gamma'_h \\ (\alpha = 1, 2;\ j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad y^0 = u^0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad Y^0 = u^0, \quad X \in \bar{\Omega}_h. \end{cases}$$

В (6.5) смешанные производные вычисляются по значениям сеточной функции на предыдущем временно́м слое (см. [38]). Решение задачи (6.5) осуществляется с помощью прогонок вдоль цепочек узлов ($x \in \omega_h$, $X \in \Omega_h$), лежащих на отрезках, параллельных осям Ox_1 и Ox_2.

Как и в п. 2 § 2, вводим пространства сеточных функций $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Для решения задачи (6.5) имеет место аналог оценки (4.3). Схема (6.5) обладает свойством суммарной аппроксимации и сходится в $\mathscr{H}$ со скоростью $O(h^{3/2} + \tau^{1/2})$ [39]. Аналогично строятся схемы для уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u$ на неортогональных сетках из п. 1 § 3.

2. О построении векторных аддитивных схем. В рассмотренных выше случаях построение векторных схем было связано с введением двух (или нескольких при $p \geqslant 3$) сеток ω_h и Ω_h с соответствующей аппроксимацией смешанных производных. Однако в случае третьей краевой задачи в произвольной области задачи с разрывными коэффициентами при произвольной линии разрыва коэффициентов для параболического уравнения, даже не содержащего смешанных производных, применение л. о. с. и схем с уравнениями

на графах встречает трудности. Для их преодоления необходимо снова расширить класс схем, перейдя к более общей трактовке понятия векторной схемы.

В каждом узле сетки ω_h (также и Ω_h в случае уравнения со смешанными производными) будем рассматривать p-мерный вектор $y(Y)$, где p — число измерений, каждая из компонент которого будет приближать решение исходной задачи. К постановке подобной разностной задачи можно прийти следующим образом. Исходной дифференциальной задаче ставится в соответствие задача для системы дифференциальных уравнений, эквивалентная исходной задаче: каждая из компонент вектора U решения системы есть решение исходной задачи. Рассматривается цепочка уравнений, как и в п. 1 § 5, из элементов эквивалентной системы. Различная аппроксимация уравнений этой системы приводит к различным векторным схемам, сводящимся в частных случаях к л. о. с. и к схемам с уравнениями на графах.

3. Построение эквивалентной системы дифференциальных уравнений. Для простоты изложения ограничимся случаем двух измерений и построим эквивалентную систему дифференциальных уравнений для следующей задачи:

$$(6.6)\qquad \begin{cases} \partial u/\partial t = \Delta u + f(x), & (x, t) \in Q_T, \quad lu = \partial u/\partial n - \sigma u = \nu(x), \\ & \qquad\qquad (x, t) \in S_T, \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь $\sigma = \text{const} > 0$, n — внутренняя нормаль к Γ.

Будем рассматривать вектор-функции $U(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t)\}$ с равными друг другу компонентами $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ при каждом $(x, t) \in S_T$. Введем матрицы-операторы

$$\widetilde{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & L_{22} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L}_2 = \begin{pmatrix} L_{22} & 0 \\ 0 & L_{11} \end{pmatrix}, \quad L_{\alpha\alpha} = \partial^2/\partial x_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, 2),$$

и оператор $\widetilde{L} = \widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2$. Положим

$$(6.7)\qquad U^0 = \{u^0, u^0\}, \quad \Phi = \{f, f\}, \quad \mu = 2\nu.$$

Исходной задаче (6.6) поставим в соответствие задачу для системы дифференциальных уравнений

$$(6.8)\qquad \begin{cases} \partial U/\partial t = \widetilde{L}U + \Phi, & (x, t) \in Q_T, \quad \widetilde{l}U = \mu, \quad (x, t) \in S_T, \\ U(x, 0) = U^0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

где $\widetilde{l}$ — оператор граничного условия — определим следующим образом. Переобозначим компоненты вектора U, полагая $U = \{u_1, u_2\} = U_k \equiv \equiv \{u_k^k, u_{3-k}^k\}$ $(k = 1, 2)$. Введем операторы $\widetilde{l}_k$ $(k = 1, 2)$ и $\widetilde{l}$:

$$\widetilde{l}_k U = \widetilde{l}_k U_k = \sum_{\alpha=1}^{2} \cos(n, x_\alpha)\, \partial u_\alpha^k/\partial x_\alpha - \sigma u^k \qquad (k = 1, 2),$$

где $u^k = u_1^k = u_2^k$ при $(x, t) \in S_T$ и $\widetilde{l} = \widetilde{l}_1 + \widetilde{l}_2$. В данном случае $\widetilde{l}U = \sum_{k=1}^{2} lu_k$.

Пусть $\mathscr{H}$ — пространство вектор-функций с равными друг другу компонентами на S_T со скалярным произведением и нормой:

$$(Y, Z) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{2} y_k z_k \, d\Omega, \quad \|Y\| = (Y, Y)^{1/2}.$$

Равенство $u_1 = u_2$ на S_T и определение операторов $\widetilde{l}_k$ обеспечивает положительную определенность в $\mathscr{H}$ операторов $-\widetilde{L}_k (k = 1, 2)$.

Решение задачи (6.8) единственно. При условии (6.7) компоненты $u_1(x, t) = u_2(x, t) = u(x, t)$ при $(x, t) \in \overline{Q}_T$, где $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (6.6). Эквивалентная система построена.

В случае общего параболического уравнения со смешанными производными $\left(L = \sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{2} L_{\alpha\beta}\right)$ при краевом условии третьего рода следует положить

$$\widetilde{L}_m = \begin{pmatrix} L_{mm} & L_{m\,3-m} \\ L_{3-m\,m} & L_{3-m\,3-m} \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2), \qquad \widetilde{l}_m U_m = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2} k_{\alpha\beta} \cos(n, x_\alpha) \frac{\partial u_\beta^m}{\partial x_\beta} - \sigma u^m.$$

Операторы $-\widetilde{L}_m$ — положительно-определенные и самосопряженные при $k_{12} = k_{21}$ в $\mathscr{H}$. Аналогично рассматривается случай p измерений.

4. Аддитивные векторные схемы Роте. Построим аддитивные векторные схемы Роте, аппроксимируя лишь производные по времени на сетке ω_τ. Как и выше, рассмотрим цепочку уравнений

$$\mathscr{P}_\alpha V_\alpha = 0{,}5\, \partial V_\alpha / \partial t - \widetilde{L}_\alpha V_\alpha - \Phi/2 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Пусть $V^{j+\alpha/2} = \{v_\alpha^{j+\alpha/2}, v_{3-\alpha}^{j+\alpha/2}\}$ $(\alpha = 1, 2)$. Задаче (6.6) и эквивалентной задаче (6.7) — (6.8) поставим в соответствие векторную схему Роте:

$$(6.9) \qquad \begin{cases} \dfrac{V^{j+\alpha/2} - V^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \widetilde{L}_\alpha V^{j+\alpha/2} + \Phi/2, & x \in \Omega, \\ \widetilde{l}_\alpha V^{j+\alpha/2} = \mu/2, \quad v_1^{j+\alpha/2} = v_2^{j+\alpha/2}, & x \in \Gamma \\ (\alpha = 1, 2;\ j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad V^0 = U^0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Задача (6.9) имеет единственное решение. Точность схемы Роте (6.9) определяется величиной $Z^{j+\alpha/2} = V^{j+\alpha/2} - U^{j+1}$, где $U^{j+1} = \{u(x, t_{j+1}), u(x, t_{j+1})\}$, $u = u(x, t)$ — решение задачи (6.6).

Погрешность аппроксимации отдельных уравнений (6.9) (краевые условия аппроксимируются точно, так как $\widetilde{l}_\alpha U = lu$, $\mu/2 = \nu$)

$$\Psi^{j+\alpha/2} = -\delta_{\alpha, 1} \frac{U^{j+1} - U^j}{\tau} + \widetilde{L}_\alpha U^{j+1} + \Phi/2 = O(1),$$

где $\delta_{\alpha, 1}$ — символ Кронекера. Имеет место суммарная аппроксимация

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \Psi^{j+\alpha/2} = -(U^{j+1} - U^j)/\tau + \Delta U^{j+1} + \Phi = O(\tau).$$

Справедлива оценка (4.3), так как $A_\alpha = -\widetilde{L}_\alpha \geqslant 0$ в $\mathscr{H}$. Векторная схема Роте сходится в $\mathscr{H}$ при $\tau \to 0$ [40]. Каждая компонента $v_\alpha^{j+\alpha/2}$ приближает решение исходной задачи в $L_2(\Omega)$ при каждом $t_{j+\alpha/2} \in \omega_\tau$.

В случае первой краевой задачи $l = E$, $\widetilde{l}_k = E$ $(k = 1, 2)$, E — единичный оператор, схема (6.9) распадается на две независимые л. о. с., отличающиеся порядком перебора операторов $L_{\alpha\alpha}$. В случае третьей краевой задачи в специальных областях [35] решение задачи сводится к решению уравнений на графах.

При $p = 2$ рассмотрим векторную схему Роте типа [38] для третьей краевой задачи для параболического уравнения со смешанными производными:

$$(6.10)\quad \begin{cases} \dfrac{Y^{j+\alpha/2} - Y^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \widetilde{L}_{\alpha\alpha} Y^{j+\alpha/2} + \widetilde{L}_{\alpha 3-\alpha} Y_*^{j+(\alpha-1)/2} + \Phi/2, & x \in \Omega, \\ (\widetilde{l}_{\alpha\alpha} Y)^{j+\alpha/2} - \sigma v^{j+\alpha/2} = \mu/2, \quad v_1^{j+\alpha/2} = v_2^{j+\alpha/2} = v^{j+\alpha/2}, & x \in \Gamma, \\ (\alpha = 1, 2;\ j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad Y^0 = U^0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь

$$\widetilde{L}_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} L_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & L_{3-\alpha\, 3-\alpha} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L}_{\alpha 3-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & L_{\alpha 3-\alpha} \\ L_{3-\alpha\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\widetilde{l}_{\alpha\alpha} Y)^{j+\alpha/2} \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{2} \cos(n, x_m)\, k_{mm} \frac{\partial v_m^{j+\alpha/2}}{\partial x_m} + \sum_{m=1}^{2} \cos(n, x_{3-m})\, k_{3-mm} \frac{\partial v_m^{j+\frac{\alpha-1}{2}}}{\partial x_m} - \sigma v^{i+\alpha/2},$$

$$Y_*^{j+\alpha/2} = \{v_{3-\alpha}^{j+\alpha/2}, v_\alpha^{i+\alpha/2}\}.$$

Для схемы (6.10) справедливы предыдущие утверждения [40]. Случай любого числа измерений рассмотрен в [40].

5. Аддитивная векторная схема для третьей краевой задачи в произвольной области. Перейдем к построению разностной схемы (и по переменным x_1, x_2) для задачи (6.6) в произвольной области Ω с гладкой границей Γ. Пусть решение задачи (6.6) — функция $u = u(x, t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$, $\nu \in C^2(\Gamma)$, $u^0 \in C(\overline{\Omega})$. Введем сетки ω_h, ω_τ и будем аппроксимировать уравнения цепочки (6.9).

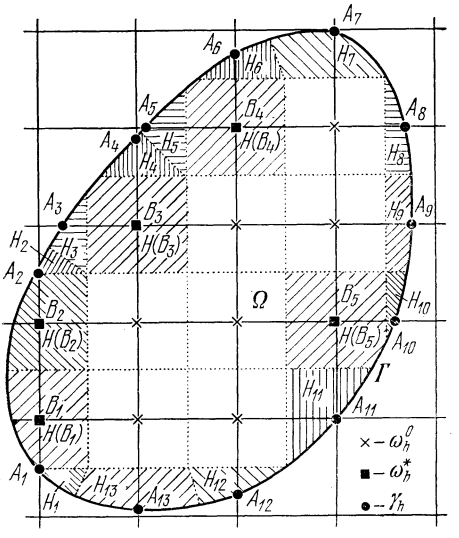

Рис. 7.

Проведем из каждого узла $x \in \omega_h$, лежащего вблизи границы Γ, прямые, ортогональные отрезкам $s_\alpha^\pm$, ограничивающим площадку $H(x)$. Точки пересечения этих прямых с Γ, отстоящие от узла x на расстоянии $h'_\alpha \leqslant h_\alpha$, назовем граничными узлами по направлению Ox_α. Множества их обозначим через $\gamma_{h\alpha} (\alpha = 1, 2)$, $\gamma_{h\alpha} = \gamma_{h\alpha}^+ \cup \gamma_{h\alpha}^-$, $\gamma_{h\alpha}^\pm$ — множества правых и левых граничных узлов по направлению $Ox_\alpha (\alpha = 1, 2)$, $\gamma_h = \gamma_{h1} \cup \gamma_{h2}$. Введем множество узлов приграничной зоны $\widetilde{\omega}_h^* = \omega_h^* \cup \gamma_h$.

Каждому узлу $x \in \gamma_{h\alpha}^\mp$ соответствует по построению отрезок $s_\alpha^\pm$, ограничивающий площадку H соседнего узла $x^{(\mp 1\alpha)} \in \omega_h$. Проведем из концов отрезка $s_\alpha^\mp$ нормали ΔN^+ и ΔN^- к Γ, как это делалось в п. 1 § 2. Узлу $x \in \gamma_{h\alpha}^\pm$ поставим в соответствие площадку $H(x) \in \Omega$, ограниченную отрезком $s_\alpha^\pm$, отрезками ΔN^+, ΔN^- и дугой Δs (см. рис. 7).

В узлах $x \in \widetilde{\omega}_h^*$ запишем уравнение баланса для площадок $H(x)$, интегрируя по $H(x)$ исходное уравнение (6.6). Приходим к сеточному оператору Лапласа

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \Lambda_s y + \Lambda_n y. \tag{6.11}$$

Здесь

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{H(x)}\left(s_\alpha^+ w_\alpha^{h+} - s_\alpha^- w_\alpha^{h-}\right) \quad (\alpha = 1, 2), \qquad \Lambda_n y = -\frac{\Delta s}{H(x)} w_n^h,$$

$$\Lambda_s y = \frac{1}{H(x)}\left(\Delta N^+ w_s^{h+} - \Delta N^- w_s^{h-}\right).$$

Потоки w_α^h, w_s^h, w_n^h определим естественным образом:

$$w_\alpha^h(x'_\alpha) = y_{x_\alpha}(x'_\alpha), \quad x'_\alpha \in \omega'_{h\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \qquad w_s^h(X'_\Gamma) = y_s(X'_\Gamma),$$

$$X'_\Gamma \in \Gamma'_h, \quad w_n^h(x'_\Gamma) = \sigma y(x) + \nu(x'_\Gamma), \quad x'_\Gamma \in \gamma'_h, \quad x \in \widetilde{\omega}_h^*.$$

В узлах $x \in \omega_h^*$ $\Delta N^\pm = 0$ и в (6.11) $\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \Lambda_n y$.

Исходной задаче (6.6) (схеме Роте (6.9)) поставим в соответствие следующую векторную разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_\beta^{j+\alpha/2} - y_{3-\beta}^{j+(\alpha-1)/2}}{\tau} = \Lambda_\beta y_\beta^{j+\alpha/2}, \quad x \in \omega_h^0 \quad (\beta = 1, 2), \\ \dfrac{y_{12}^{j+\alpha/2} - y_{12}^{j+(\alpha-1)/2}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y_1^{j+\alpha/2} + \Lambda_2 y_2^{j+\alpha/2} + \Lambda_s y_{12}^{j+\alpha/2} + \Lambda_n y_{12}^{j+\alpha/2}, \\ y_1^{j+\alpha/2} = y_2^{j+\alpha/2} = y_{12}^{j+\alpha/2}, \quad x \in \widetilde{\omega}_h^*, \\ (\alpha = 1, 2;\ j = 0, 1, \ldots, j_0), \quad y_1^0 = y_2^0 = u^0, \quad x \in \overline{\omega}_h. \end{cases} \tag{6.12}$$

Схема (6.12) абсолютно устойчива. В строго внутренних узлах $x \in \omega_h^0(H_0(x) \in \Omega)$ каждое из первых уравнений (6.12) ($\beta = 1,2$) при $t = t_{j+\alpha/2}$ содержит значения лишь одной из компонент $y_\beta^{j+\alpha/2}$ вектора $\overline{y}^{j+\alpha/2}(x) = \{y_\alpha^{j+\alpha/2}(x),\ y_{3-\alpha}^{j+\alpha/2}(x)\}$. Между собой компоненты $y_1^{j+\alpha/2}$ и $y_2^{j+\alpha/2}$ связаны уравнениями (6.12) в узлах $x \in \widetilde{\omega}_h^*$ приграничной зоны. Решение задачи (6.12) сводится к прогонкам и решению алгебраической системы относительно значений искомой функции $y_1^{j+\alpha/2} = y_2^{j+\alpha/2} = y_{12}^{j+\alpha/2}$ в узлах приграничной зоны.

Первые уравнения (6.12) — уравнения л. о. с., аппроксимирующие исходные уравнения эквивалентной задачи (6.8) в суммарном смысле, второе уравнение (6.12) аппроксимирует исходное уравнение (6.6). Схема (6.12) — векторная аддитивная схема. Имеет место оценка (4.3).

Теорема 5 [14]. *Схема* (6.12) *сходится в* $\mathscr{H}$ *со скоростью* $O(h + \tau^{1/2})$. *Справедлива оценка*

$$\|\overline{y}^{j+\alpha/2} - \overline{u}^{j+\alpha/2}\| \leqslant M(h + \tau^{1/2}),$$

где $M = \text{const}$, *не зависящая от* h, τ, $\overline{y}^{j+\alpha/2}$ — *решение задачи* (6.12), $\overline{u}^{j+\alpha/2} = \{u(x, t_{j+\alpha/2}),\ u(x, t_{j+\alpha/2})\}$, u — *решение задачи* (6.6),

$$\|\overline{y}\|^2 = \sum_{\overline{\omega}_h} H(x) \sum_{\beta=1}^{2} y_\beta^2(x).$$

Каждая компонента $y_\beta^{j+\alpha/2}$ *вектора* $\overline{y}^{j+\alpha/2}$ *приближает решение исходной задачи в сеточной норме* $L_2(\overline{\omega}_h)$.

Аналогично строятся схемы для задач с разрывными коэффициентами при произвольной линии разрыва Γ^0 [14]. Векторные схемы переменных направлений (схемы типа П.— Р.) рассмотрены в [41].

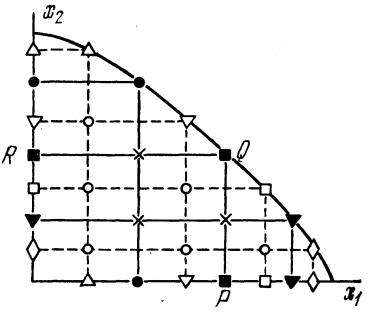

Рис. 8.

Для специального класса областей из [35] (пример области см. на рис. 8) решение задачи (6.12) сводится к решению задач на графах (на рис. 8 к прогонкам вдоль ломаных, например, вдоль ломаной PQR).

В случае задачи со смешанными производными следует аппроксимировать схему Роте (6.10), используя сетки $\overline{\omega}_h$, $\overline{\Omega}_h$, введенные в § 2. В каждом из узлов сеток $\overline{\omega}_h$ и $\overline{\Omega}_h$ определяется вектор $\overline{y}^{j+\alpha/2}(x) = \{y_\alpha^{j+\alpha/2}, y_{3-\alpha}^{j+\alpha/2}\}$ и $\overline{Y}^{j+\alpha/2}(X) = \{Y_\alpha^{j+\alpha/2}, Y_{3-\alpha}^{j+\alpha/2}\}$. Рассматриваются пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ векторов $\overline{y}^{j+\alpha/2}(x)$, $x \in \overline{\omega}_h$ и $\overline{Y}^{j+\alpha/2}(X)$, $X \in \overline{\Omega}_h$ и пространство $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, в котором и устанавливается сходимость схем [39], [40]. Аналогично строятся векторные аддитивные схемы для уравнения колебаний $\partial^2 u/\partial t^2 = \Delta u$.

§ 7. Разностные схемы и метод суммарной аппроксимации

Из сказанного выше следует, что векторные аддитивные схемы являются естественным обобщением л. о. с., а также схем с уравнениями на графах. Последовательный переход от л. о. с. к векторным аддитивным схемам был вызван усложнением исходных задач для дифференциальных уравнений. В процессе этого перехода понятие суммарной аппроксимации играло определяющую роль. Таким образом, можно говорить о методе суммарной аппроксимации как о весьма общем и конструктивном методе построения экономичных схем для многомерных задач математической физики.

Метод суммарной аппроксимации использовался для построения экономичных схем. По мере усложнения исходных задач экономичные схемы становятся все более сложными. Так, например, при рассмотрении экономичных алгоритмов для решения третьей краевой задачи в произвольной области в каждом узле сетки оказалось необходимым определять вектор с двумя компонентами (в случае двух измерений) и решать систему алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах приграничной зоны. Таким образом, возникла новая проблема, связанная со сложностью реализации на ЭВМ решения разностных задач, которая в подобных случаях приходит в противоречие с исходным требованием экономичности алгоритма.

В связи с этим следует рассмотреть также чисто неявные экономичные схемы. При отсутствии в уравнении смешанных производных исследование

соответствующих пятиточечных схем осуществляется различными методами из [12].

В случае двумерного параболического уравнения с самосопряженным оператором ($k_{12} = k_{21}$) можно написать следующую векторную схему, обладающую аппроксимацией в обычном смысле

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^{j+1}-y^j}{\tau} = \Lambda(x;\ y^{j+1},\ Y^j), & x \in \omega_h, \\ \dfrac{Y^{j+1}-Y^j}{\tau} = \Lambda(X;\ y^j,\ Y^{j+1}), & X \in \Omega_h, \end{cases}$$

где в случае первой краевой задачи операторы Λ определены согласно п. 2 § 2 ($y = v$, $x \in \gamma_h$, $x'_\Gamma \in \gamma'_h$, $Y = v$, $X \in \Gamma_h$, $X'_h \in \Gamma'_h$), для третьей краевой задачи в произвольной области Ω — в [9].

Схема (7.1) является абсолютно устойчивой (при $k_{12} = k_{21}$). Решение соответствующей задачи сводится при $t = t_{j+1}$ к решению двух систем пятиточечных разностных уравнений.

Методом энергетических неравенств устанавливается сходимость схемы (7.1) в сеточной норме $L_2(\mathcal{G}_h)$ (в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$) со скоростью $O(h^{3/2} + \tau)$.

Рассмотренные методы построения экономичных схем, различные приемы аппроксимации уравнений позволяют в каждом конкретном случае выбрать наиболее удобную схему и метод решения соответствующей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами, ДАН **109**:3 (1956), 393—396.

[2] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Об однородных разностных схемах, ЖВМ и МФ **1**:1 (1961), 5—63.

[3] Ю. П. Попов и А. А. Самарский, Полностью консервативные разностные схемы, ЖВМ и МФ **9**:4 (1969), 953—954.

[4] А. А. Самарский, Ю. П. Попов, Разностные схемы газовой динамики, М., «Наука», 1975.

[5] А. В. Бобылев и В. А. Чуянов, О численном решении кинетического уравнения Ландау, ЖВМ и МФ **16**:2 (1976), 407—416.

[6] А. А. Самарский и И. В. Фрязинов, О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами, ЖВМ и МФ **11**:2 (1971), 385—410.

[7] И. В. Фрязинов, Об одной разностной аппроксимации уравнения Пуассона, Дифф. уравнения **12**:3 (1976), 540—548.

[8] И. В. Фрязинов, Об одной аппроксимации смешанных производных, ЖВМ и МФ **15**:3 (1975), 644—660.

[9] И. В. Фрязинов, Об одной разностной аппроксимации задач для эллиптического уравнения, ЖВМ и МФ **16**:1 (1976), 102—118.

[10] Н. Н. Яненко, Об одном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, ДАН **125**:6 (1959), 1207—1210.

[11] А. А. Самарский, Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, ЖВМ и МФ **2**:5 (1962), 787—811.

[12] А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., «Наука», 1971.

[13] Н. Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, «Наука», 1967.

[14] И. В. Фрязинов, Об одном классе схем для уравнения параболического типа ЖВМ и МФ 15:1 (1975), 114—125.
[15] G. H. Shortley, R. Weller, The numerical solution of Laplace's equation, J. Appl. Phys. 9 (1938), 334—348.
[16] Ш. Е. Микеладзе, О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов, Изв. АН, сер. матем. 5:1 (1941), 57—74.
[17] И. Бабушка, Э. Витасек и М. Прагер, Численные процессы решения дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1969.
[18] А. А. Самарский и В. Б. Андреев, Разностные методы для эллиптических уравнений, М., «Наука», 1976.
[19] В. Я. Ривкинд, Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решения разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, Вест. ЛГУ, сер. матем., механ. и астрон., № 13 (1964), 37—51.
[20] Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд и Л. А. Руховец, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1 и 2, Вильнюс, «Пяргале», 1973.
[21] И. В. Фрязинов, О разностной аппроксимации эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными на специальных сетках, Препринт ИПМ АН СССР, № 90 (1976).
[22] И. В. Фрязинов, Разностные схемы для двумерных эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными в полярных, цилиндрических и сферических координатах, Препринт ИПМ АН СССР, № 36 (1976).
[23] Ю. П. Глаголева, Б. М. Жогов, Ю. Ф. Кирьянов, В. Д. Мальшаков, Л. В. Нестеренко, И. Ф. Подливаев и И. Д. Сафронов, Основы методики «Медуза» численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики, Числ. методы мех. сплошн. среды, ВЦ СО АН 3:2 (1972), 18—55.
[24] И. В. Фрязинов, Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, ЖВМ и МФ 8:2 (1968), 436—443.
[25] А. А. Самарский и И. В. Фрязинов, О сходимости локально-одномерной схемы решения многомерного уравнения теплопроводности на неравномерных сетках, ЖВМ и МФ 11:3 (1971), 642—657.
[26] И. В. Фрязинов и М. И. Бакирова, Об экономичных разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных цилиндрических и сферических координатах, ЖВМ и МФ 12:2 (1972), 352—363.
[27] А. А. Самарский, О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики, Apl. Math. 10:2 (1965), 146—164.
[28] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic equations, J. Soc. Industr. and Appl. Math. 3:1 (1955), 28—42.
[29] J. Douglas, H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, Trans. Amer. Math. Soc. 82:2 (1956), 421—439.
[30] И. В. Фрязинов, Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа, ЖВМ и МФ 9:6 (1969), 1316—1326.
[31] Г. Штойан, Некоторые экономичные аддитивные схемы решения краевых задач для многомерных уравнений параболического типа, ЖВМ и МФ 10:3 (1970), 644—653.
[32] Г. Штойан, К устойчивости аддитивных схем по краевым данным, ЖВМ и МФ 11:4 (1971), 943—947.
[33] И. В. Фрязинов, Экономичные схемы для многомерного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, ЖВМ и МФ 13:1 (1973), 80—91.
[34] И. В. Фрязинов, О сходимости аддитивных схем с уравнениями на графах, ЖВМ и МФ 12:5 (1972), 1208—1219.
[35] И. В. Фрязинов, Экономичные схемы для уравнения теплопроводности с краевым условием третьего рода, ЖВМ и МФ 12:3 (1972), 612—626.

[36] А. Ф. Воеводин, Газотермодинамический расчет потоков в простых и сложных трубопроводах, Изв. СО АН, сер. техн. наук 8:2 (1969), 45—55.

[37] И. В. Фрязинов, Алгоритм решения разностных задач на графах, ЖВМ и МФ **10**:2 (1970), 474—477.

[38] Н. Н. Яненко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин, О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах, ДАН **128**:5 (1959), 903—905.

[39] И. В. Фрязинов, Об экономичных разностных схемах для двумерного уравнения теплопроводности со смешанными производными, ЖВМ и МФ **16**:4 (1976), 908—921.

[40] И. В. Фрязинов, Экономичные аддитивные схемы с уравнениями на графах, ч. IV. Об общем подходе к построению экономичных схем, Препринт ИПМ АН СССР, № 80 (1973).

[41] И. В. Фрязинов, О схеме переменных направлений для уравнения теплопроводности со смешанными производными, Числ. методы мех. сплошн. среды, ВЦ СО АН 5:4 (1974), 110—115.

Поступило в редакцию 20 июля 1976 г.