

ЭФФЕКТ МЕТАСТАБИЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ *

Член-корреспондент АН СССР А.А. САМАРСКИЙ,
Н.В. ЗМИТРЕНКО, С.П. КУРДЮМОВ, А.П. МИХАЙЛОВ

1. При теплопроводности, зависящей от температуры, распространение тепла может происходить с конечной скоростью [1], [2]. В настоящей работе показано, что при нелинейной теплопроводности в среде без объемных источников и стоков возможна локализация тепла в пространстве в течение конечного промежутка времени. Ранее явление локализации тепла связывалось [3], [4] с действием объемных стоков тепла. Найден класс граничных режимов (S - и LS -режимов), действие которых порождает метастабильную локализацию тепла; при этом область, в которой температура отлична от нуля, не меняется в течение некоторого промежутка времени. Внутри области температура может возрасти до сколь угодно больших значений. На примере задачи Коши показано, что свойством метастабильной локализации обладают также определенного вида начальные распределения температур. Приведены численные и аналитические решения, иллюстрирующие эффект метастабильной локализации тепла в одномерном, двумерном и трехмерном случае. Рассмотрен процесс нагрева полностью ионизованной плазмы лазерным излучением в S -режиме.

2. В полупространстве $0 \leq r < +\infty$ для значений $t \in (\infty, 0)$ (см. [5], [6]) ищется решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

с коэффициентом теплопроводности $k(T) = k_0 T^\sigma$, где $\sigma > 0$.

При $r = 0$ задан граничный режим

$$T(0, t) = T_0(-t)^n, \quad n < 0, \quad T_0 = \text{const} > 0, \quad (2)$$

а при $t = \infty$ начальные данные

$$T(r, -\infty) = 0. \quad (2')$$

Задача (1), (2), (2') автомодельна и имеет решение вида $T(r, t) = T_0(-t)^n f(\xi)$, где безразмерная переменная

* ДАН СССР, 1975, т. 233, № 6, с. 1344-1347.

$\xi = r/(k_0 T_0^\sigma (-t)^{1+n\sigma})^{1/2}$. Если $n < -1/\sigma$, то тепло распространяется в виде волны, имеющей конечную скорость. Если $n = -1/\sigma$, то поступающее тепло локализовано в ограниченной области пространства (S -режим). При $n > -1/\sigma$ эффективная глубина прогретой области сокращается с течением времени (LS -режим).

3. При $n = -1/\sigma$ задача (1), (2), (2') имеет решение в виде остановившейся волны (S -режим) ¹:

$$T(r, t) = \begin{cases} T_0(-t)^{-1/\sigma} (1 - r/r_\phi)^{2/\sigma} & \text{при } r \leq r_\phi, \\ 0 & \text{при } r > r_\phi. \end{cases} \quad (3)$$

где r_ϕ - глубина прогрева, определяемая свойствами вещества (θ, σ) и константой T_0 граничного режима по формуле

$$r_\phi = (2k_0 T_0^\sigma (\sigma + 2)/\sigma)^{1/2}. \quad (4)$$

Задача (1), (2) была решена также разностным методом. Результаты расчета приводятся на рис. 1. В качестве начального профиля выбрано аналитическое решение (3) в момент $\theta = 1,25 \cdot 10^{-2}$. Если начальные данные нулевые, то, как показывают расчеты, волна сначала выходит на глубину r_ϕ , а затем останавливается.

4. В случае $n > -1/\sigma$ существует решение в виде волны с сокращающейся эффективной глубиной проникновения тепла: LS -режим. Величину $r_{зф}$ определим как расстояние от границы $r = 0$ до точки, в которой температура равна половине температуры на границе. На рис. 3 приведены результаты решения уравнения (1) с условием (2) при $n = 0,25$. Расчет начат в момент $\theta = 0,25$ с нулевыми начальными данными. Крестиками показаны значения $r_{зф}(t)$ для различных моментов времени. Так как начальные данные неавтомодельны, то волна сначала продвигается от границы в вещество, и $r_{зф}$ увеличивается. Начиная с момента $t = 1,05 \cdot 10^{-2}$, фронт волны останавливается, а решение вблизи $r = 0$ приближается к автомодельному ($r_{зф}$ начинает уменьшаться). Если процесс начинается в момент $t = \infty$, то задача автомодельна и при $n > -1/\sigma$ ее решением является волна, фронт которой уходит в бесконечность. Нарушение автомодельности, состоящее в появлении остановившегося фронта, связано с тем, что реализация процесса

¹Впервые внимание на остановку фронта было обращено в работе [7], хотя решения в разделяющихся переменных для квазилинейного параболического уравнения известны давно [8],[9].

проводится с конечного момента $t = \theta$. При этом всегда существует граничный S -режим, мажорирующий

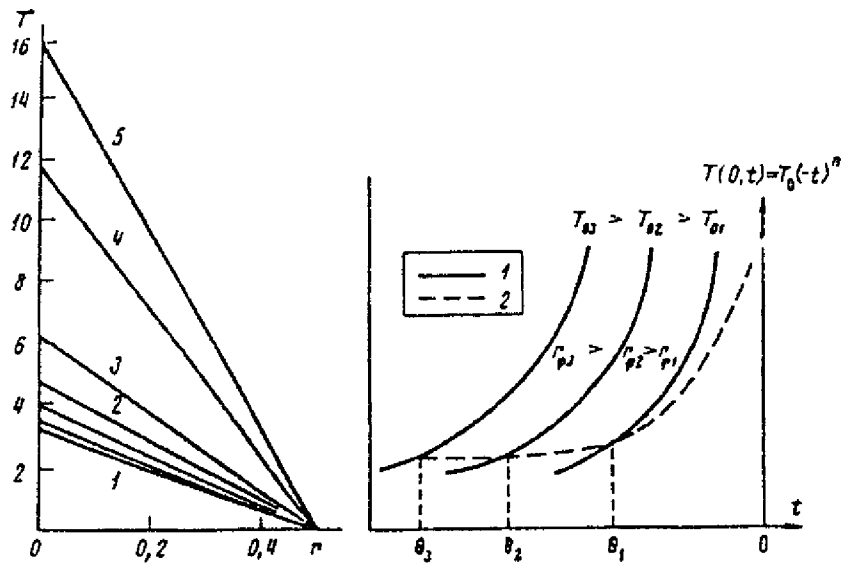


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Параметры: $\sigma=2$; $\mu=-0,5$; $k_0=0,5$; $T_0=0,354$; $r_0=0,5$. $t=-1,25 \cdot 10^{-2}$ (1); $-5,3 \cdot 10^{-3}$ (2); $-2,9 \cdot 10^{-3}$ (3); $-9 \cdot 10^{-4}$ (4); $-5 \cdot 10^{-4}$ (5)

Рис. 2. Поле S -режимов. 1 — S -режимы, 2 — мажорируемый LS^2 -режим

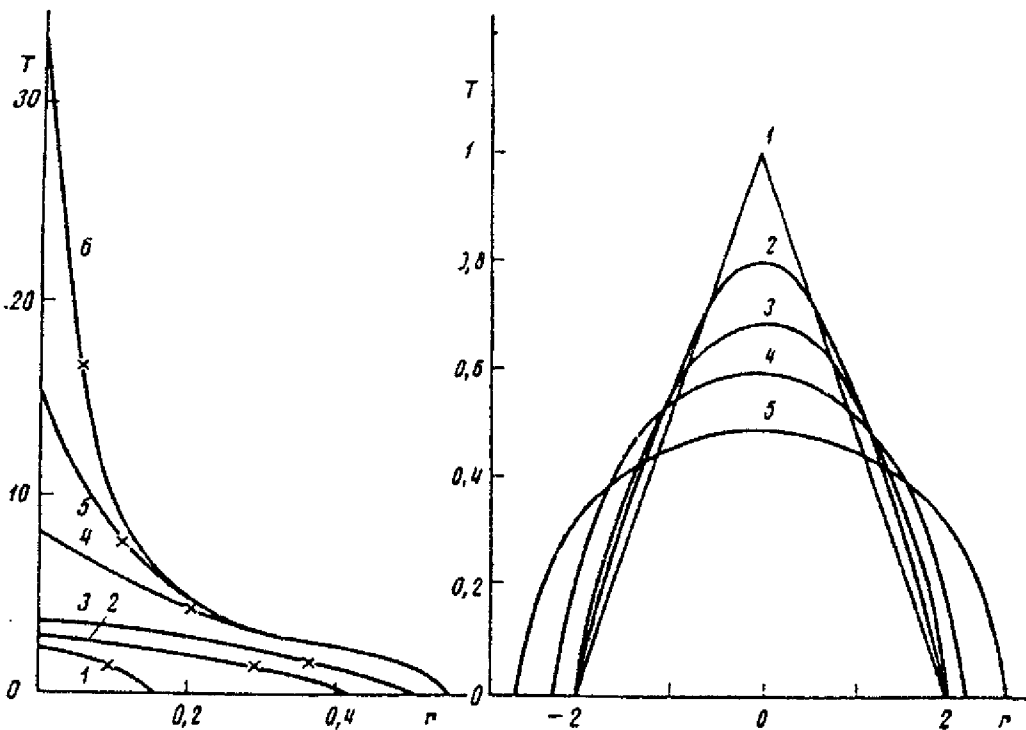


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3. Параметры: $\sigma=2$; $\mu=-0,25$; $k_0=0,5$; $T_0=1,06$. $t=-1,02 \cdot 10^{-1}$ (1); $-3,1 \cdot 10^{-2}$ (2); $-1,05 \cdot 10^{-2}$ (3); $-3 \cdot 10^{-4}$ (4); $-2,4 \cdot 10^{-5}$ (5); $-1 \cdot 10^{-6}$ (6)

Рис. 4. Параметры: $\sigma=2$, $k_0=1$, $r_0=2$, $A_0=1$, $\theta=-1$. $t=-1$ (1); $-0,73$ (2); $-0,09$ (3); $1,27$ (4); 5 (5)

рассматриваемый граничный LS -режим от момента $t = \theta$ до $t = 0$ (см. рис. 2). Из теорем сравнения [10] следует, что LS -режим не может привести к проникновению тепла на глубину, большую r_ϕ , определяемую мажорирующим S -режимом и, следовательно, в LS -режиме имеет место локализация тепла. Сказанное справедливо также для всего класса решений, мажорируемых по граничному условию и начальным данным S -режимом (аналитическим решением (3)).

5. В частности, из вида (3) следует, что решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$T(r, \theta) = \begin{cases} A_0(1 - |r|/r_0)^{2/\sigma} & \text{при } |r| \leq r_0, \\ 0 & \text{при } |r| > r_0, \end{cases} \quad (5)$$

локализовано в области $|r| \leq r_0$ в течение времени $\theta \leq t < 0$, где

$$\theta = -r_0^2 \sigma / (2k_0(\sigma + 2)A_0^\sigma). \quad (6)$$

Для среды с заданными k_0 и σ распределение (5) является предельным в классе начальных распределений, обладающих свойством локализации тепла. Действительно, из теорем сравнения следует, что произвольное липшиц-непрерывное начальное распределение, заданное на отрезке $[-R, R]$, локализовано, если оно мажорируется функцией (5) с некоторой A_0 и $r_0 = R$. Время локализации оценивается по (6) снизу. На рис. 4 приведены результаты расчета задачи (1), (5). До момента $t = 0$ происходит перестройка профиля, при $t > 0$ начинается распространение тепла.

6. В двумерном и трехмерном случаях также имеет место локализация тепла. В качестве примера рассмотрим решение уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

в области $x_i > 0$ для значений $t \in (-\infty, 0)$ с граничными условиями

$$x_j = 0 : T(x_i, t) = \begin{cases} T_0(-t)^{-1/\sigma} (1 - r_j/r_\phi)^{2/\sigma} & \text{при } r \leq r_\phi, \\ 0 & \text{при } |r| > r_\phi, \end{cases} \quad (8)$$

$$r_j = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i x_i - \alpha_j x_j), \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1; \quad j = 1, 2, 3,$$

и начальным условием

$$T(x_i, -\infty) = 0. \quad (9)$$

Решение задачи (7)-(9) получается методом разделения переменных (S -режим) и имеет вид (3), где $r = \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i$. Область локализации тепла представляет собой пирамиду с вершинами в точках $(0,0,0)$, $(0,0,r_\phi/\alpha_3)$, $(0,r_\phi/\alpha_2,0)$, $(r_\phi/\alpha_1,0,0)$. Аналогично получается двумерный S -режим. Областью локализации является треугольник. Беря за основу решение задачи (7)-(9) легко указать класс граничных режимов и начальных распределений для задачи Коши, при которых осуществляется локализация тепла. На многомерный случай переносятся все представления, развитые в п.п. 2-5 для одномерного.

7. Приведем оценки некоторых параметров, необходимых для разогрева полностью ионизованной плазмы с $\sigma = 5/2$ лазерным излучением в S -режиме. Предполагается, что лазерное излучение поглощается на границе, вещество неподвижно, излучение плазмы несущественно (см. оценки в [11]). Для нагрева дейтериево-тритиевой плазмы плотностью $n = 5 \cdot 10^{20}$ частиц в 1 см^3 до температуры $T \simeq 10^7 \text{ }^\circ\text{К}$ за время $\theta \simeq 5 \cdot 10^{-9}$ сек в S -режиме требуется, чтобы к концу процесса максимальный поток лазерного излучения составлял $W_m \simeq 10^{14} \text{ Вт/см}^2$, энергия на единицу площади $E \simeq 10^3 \text{ Дж/см}^2$; при этом глубина прогрева $r_\phi \simeq 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}$; температура $T \simeq 10^7 \text{ }^\circ\text{К}$ удерживается в течение $\varepsilon \simeq 5 \cdot 10^{-12}$ сек. Чтобы обеспечить одномерность задачи, достаточно взять плоский слой с площадью $s \simeq (10r_\phi)^2$. На его нагревание надо затратить энергию $E_0 \sim 510 \text{ Дж}$. В результате реакций выделится $\sim 10^5$ нейтронов. Чтобы получить температуру $T \simeq 3 \cdot 10^7 (10^8) \text{ }^\circ\text{К}$, требуется предельный поток $W_m \simeq 10^{15} (10^{16}) \text{ Вт/см}^2$ и энергия $\sim 10^3 (10^5) \text{ Дж}$ соответственно; при этом выделится $\sim 10^9 (10^{12})$ нейтронов. Газодинамикой в указанных условиях можно пренебречь. Если требуется выполнение критерия Лоусона, то газодинамика существенна. Можно отказаться от условия $s \sim (10r_\phi)^2$, обеспечивая одномерность другими способами [12],[13] или осуществляя S -режим в трехмерной геометрии. Тогда $s \sim r_\phi^2$, оценки требуемой энергии снижаются в несколько сот раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец, Сб., посвящ. 70-летию акад. А.Ф. Иоффе, Изд. АН СССР, 1950, стр. 61.
2. Г.И. Баренблатт, ПММ, т. 16, № 1, 67 (1952).
3. Л.К. Мартинсон, К.Б. Павлов, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 12, № 4, 1048 (1972).
4. А.С. Калашников, там же, т. 14, № 4, 891 (1974).
5. Н.В. Змитренко, С. П. Курдюмов, Препринты Ин-та прикладной математики АН СССР, № 16, 1973; № 19, 1974; ДАН, т. 218, № 6, 1306 (1974); ДАН, т. 219, № 3, 578 (1974).
6. С.П. Курдюмов, Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, № 18, 1975.
7. А.А. Самарский, И.М. Соболев, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 3, № 4, 102 (1963).
8. Л.С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, М.– Л., ГИТТЛ, 1947.
9. Г. И. Баренблатт, ПММ, т.20, № 6, 783 (1956).
10. О.А. Олейник, А.С. Калашников, Чжоу Юй-линь, Изв. АН СССР, т. 22, № 5, 667 (1958).
11. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, ЖЭТФ, т. 46, 171 (1964).
12. Ж. Бобэн, Д. Коломба, Г. Тонон, В сб.: Лазерный термоядерный синтез, М., Атомиздат, 1975.
13. E. P. Velihov, S.I. Anisimov et al., Rep. On the V Intern. Conf. On Plazma Phys. And Control Nucl. Fusion Research, Tokio, 11-15 November, 1974.