Труды Международного Конгресса Математиков
Ванкувер, 1974

# Теория Устойчивости Разностных Схем и Итерационные Методы*

А. А. Самарский

Доклад посвящен устойчивости разностных схем с несамосопряженными операторами и сходимости итерационных процессов для операторного уравнения первого рода $Au = f$. Отправным пунктом является предложенная автором концепция устойчивости, изложение и развитие которой дано в книгах [1] и [2]. Нам понадобятся основные исходные посылки теория.

**1. Двухслойная разностная схема.** Разностная схема трактуется как операторно-разностное уравнение в линейном номированном пространстве $H = H_h$, зависящем от параметра $h$—вектора с нормой $|h| > 0$. Двухслойная схема записывается в канонической форме

$$B(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = \varphi_n, \qquad n = 0, 1, \cdots, \text{ задан } y_0 \in H \tag{1}$$

где $A$ и $B$—линейные операторы, заданные в $H$, $y_n = y(t_n) \in H$—искомая, $\varphi_n = \varphi(t_n) \in H$—заданная абстрактные функции дискретного аргумента $t_n = n\tau$, $A$, $B$, $y_n$, $\varphi_n$ зависят от параметров $\tau$ и, $h$, $A$ и $B$ могут зависеть от $t_n$. Существует оператор $B^{-1}$. Пространство $H$ может быть как действительным, так и комплексным. Исходное семейство схем (1) задано, если заданы операторы $A$ и $B$. В этом семействе ищутся классы устойчивых схем. Если $H$—конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(y, v)$ и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, то необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (1) имеют вид операторных неравенств между $A$ и $B$ (см. [1], [2]).

**2. Устойчивость по начальным данным.** Напомним определение устойчивости двухслойной схемы

*Not presented in person.

(2) $\quad B(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$, задан $y_0 \in H$.

Для простоты считаем, что $A$ и $B$ не зависят от $n$. Пусть $D: H \to H$ линейный оператор, $D^* = D > 0$, $H_D$—энергетическое пространство, состоящее из элементов $y$, $v \in H$ со скалярным произаедением $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Схема (1) устойчива по начальным данным в $H_D$, если для решения задачи (2) при любых $y_0 \in H$ имеем:

(3) $\quad (Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqq (Dy_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$

Схема (1) $\rho$-устойчива, если для (2) имеет место оценка

(4) $\quad (Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqq \rho(Dy_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \rho = e^{c_0\tau},$

где $c_0 = \mathrm{Const}$ не зависит от $\tau$ и $h$.

**3. Необходимые и достаточиые условия устойчивости.** Укажем некоторые необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (2) по начальным данным в $H_D$, предполагая, что либо один из операторов $A$ и $B$, либо оба оператора являются несамосопряженными:

(5) $\quad B_0 = \mathrm{Re}\, B \geqq \frac{1}{2}\tau A, \quad$ если $A^* = A > 0$, $D = A$,

(6) $\quad \mathrm{Re}\, A^{-1} \geqq \frac{1}{2}\tau B^{-1}, \quad$ если $B^* = B > 0$, $D = B$,

(7) $\quad D(\mathrm{Re}\, A^{-1})D + (\sigma_0 - \frac{1}{2})\tau D \geqq 0, \quad$ если $B = D + \sigma\tau A$, $D = D^* > 0$,

где $\sigma = \sigma_0 + i\sigma_1$—число, $\sigma_0 = \mathrm{Re}\,\sigma$, $B_0 = \mathrm{Re}\, B = \frac{1}{2}(B + B^*)$. Эти условия достаточны для устойчивости по правой части схемы (1) (при соответствующем выборе нормы для $\varphi_n$). Укажем еще один результат.

Явная схема $(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = 0$, где $A$—кососимметрический оператор, $A^* = -A$, и $A^{-1}$ существует—неустойчива при любом $D = D^* > 0$. В [1], [2] имеются много примеров, показывающих, что условие (5) удобно для проверки на практике. Условня (6), (7) проверить труднее, если $A^* \neq A$. Теоремы (6), (7) с успехом применяются к иесамосопряженным системам уравнений. В этом случае $A$ и $B$ матрицы-операторы; их порядок равен порядку системы (см. [3]).

**4. Трехслойные схемы с несамосопряженными операторами.** Изложим некоторые результаты для трехслойной схемы

(8) $\quad By_{\mathring{t}} + \tau^2 Ry_{\bar{t}t} + Ay = 0, \quad t = n\tau, n = 1, 2, \cdots$, заданы $y^0, y^1 \in H$,

где $A$, $B$, $R$—лииейные операторы, заданные в $H$,

$$y = y^n = y(t_n), \quad y_{\mathring{t}} = (y^{n+1} - y^{n-1})/2\tau,$$
$$y_{\bar{t}t} = (y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1})/\tau^2, \quad y^0 = y(0).$$

Решением задачи (8) в момент $t_n = n\tau$ называется вектор $\mathbf{y}_n = \{y^n, y^{n+1}\} \in H^2$, $H^2 = H \oplus H$. Устойчивость по начальным данным схемы (8) означает, что $(D\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \leqq (D\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n)$ при любых $\mathbf{y}_0 = \{y^0, y^1\} \in H^2$, где $D = D^* > 0$ — линейный оператор, заданный в $H^2$.

Приведем в виде таблицы некоторые теоремы.

| Исходное семейство | Необходимое и достаточное условие устойчивости |
|---|---|
| (9) $B_0 > 0$, $A^* = A > 0$, $R^* = R$ | $R \geqq \frac{1}{4}A$ |
| (10) $B = E$, $A^* = -A$, $R^* = -R$, $AR = RA\,(Ex = x)$ | $E + \tau^2 A(A - 4R) \geqq 0$ |

Представляют интерес следующие частные случаи

| Схема | $A^* = A$ | $A^* = -A$ |
|---|---|---|
| $y_{\mathring{t}} + Ay = 0$ | Абсолютно неустойчива | Устойчива при $\tau\|A\| \leqq 1$ |
| $y_{\bar{t}t} + Ay = 0$ | Устойчива при $A > 0$, $(\tau^2/4)\|A\| \leqq 1$ | Абсолютно неустойчива |

*Пример* 1. Схема для уравнения Шредингера $\sqrt{-1}\, y_{\mathring{t}} + \sigma Ay^{n+1} + (1-2\sigma)Ay^n + \sigma Ay^{n-1} = 0$, $Ay = -y_{\bar{x}x} = -(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2$, $y_i = y(x_i)$, $x = ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N$, $y_0 = y_N = 0$, $\sigma$—действительное число—устойчива при $\sigma \geqq \frac{1}{4}(1 - 1/\tau^2\|A\|^2)$ или $\sigma \geqq \frac{1}{4}(1 - h^4/16\tau^2)$. В частности, явная схема устойчива при $\tau \leqq \frac{1}{4}h^2$.

*Пример* 2. Схема $y_{\mathring{t}} + \tau^2 y_{\bar{t}t\bar{x}}/h = y_{\bar{x}x}$, $x = ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N$, $y_0 = y_N = 0$ устойчива при $\tau \leqq 0{,}5h^2$.

**5. Асимптотическая устойчивость.** Общее определение устойчивости не всегда обеспечивает нужные качественные свойства схемы. Так, схемы для параболических и гиперболических уравнений должны обладать разными свойствами. Для параболических уравнений характерно затухание при $t \to \infty$ (выход на регулярный режим) влияния начальных данных. Естественно требовать, чтобы и схема обладала этим свойством. Будем говорить, что схема (2) асимптотически устойчива в $H_D$, если существует такая постоянная $\delta > 0$, не зависящая от $\tau$ и $h$, что $\|y_n\| \leqq e^{-\delta t_n}\|y_0\|$ при любых $t_n = n\tau$. Если схема (2) $\rho$-устойчива с постоянной $c_0 = -\delta < 0$, то она асимптотически устойчива. Как показывает пример схемы с весами $(y_{n+1} - y_n)/\tau + A(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n) = 0$, где $A = A^* > 0$, требование асимптотической устойчивости может приводить к дополнительным ограничениям на шаг $\tau$. Достаточное условие асимптотической устойчивости имеет вид $\tau\delta/(1 + \sigma\tau\delta) + \tau\Delta/(1 + \sigma\tau\Delta) \leqq 2$ где $\delta$ и $\Delta$ наименьшее и наибольшее собственные значения оператора $A$. Отсюда следует, что симметричная схема ($\sigma = 0{,}5$), абсолютно устойчивая в обычном смысле (3), асимптотически устойчива при $\tau \leqq \tau_0$, $\tau_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$. В случае уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ на отрезке $0 \leqq x \leqq 1$ и $u(0, t) = u(1, t) = 0$ имеем $Ay = -y_{\bar{x}x}$ и $\tau_0 \approx h/\pi$.

Заметим, что схема (2) с $B = (E + \sigma\tau A_0/2)^2$, $A = A_0 + \sigma^2\tau A_0^2/4$, где $A_0^* = A_0 > 0$, $\sigma = 2 - \sqrt{2}$, асимптотически устойчива при любых $\tau$.

Параболические разностные схемы изучались в [5], [6]. В [6] показано, что условие параболичности схемы (2) имеет вид

$$B \geqq \frac{1+\varepsilon}{2}\tau A, \qquad \varepsilon = \mathrm{Const} > 0.$$

**6. Итерационные схемы.** Методы общей теории устойчивости разностных схем позволяют построить единую теорию итерационных методов решения линейного операторного уравнения $Au = f$, где $A\colon H \to H$, $f \in H$, $H$— гильбертово пространство, $A$- -вообще говоря, несамосопряженный оператор. Итерационная схема, по аналогии с п.1, записывается в каноническом виде

$$(11)\qquad B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \qquad \forall y_0 \in H,$$

где $y_k$--итерация номера $k$, $\tau_k$--параметр, $B\colon H \to H$--линейный оператор; он имеет обратный $B^{-1}$ и может зависеть от $k$. Здесь, для простоты, считаем, что $B$ не зависит от $k$. Пусть в $H$ задан линейный оператор $D = D^* > 0$. Задача теории состоит в получении оценок $\|y_n - u\|_D \leqq q_n \|y_0 - u\|_D$. Схема (11) сходится, если $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, так что $q_n < \varepsilon$ при $n \geqq n_0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Надо найти $\min q_n$ ($\min n_0(\varepsilon)$) путем выбора $\{\tau_k\}$ и $B$. Зададим исходное семейство схем (11) условиями

$$(12)\qquad (DB^{-1}A)^* = DB^{-1}A, \qquad \gamma_1 D \leq DB^{-1}A \leqq \gamma_2 D, \qquad \gamma_2 \geqq \gamma_1 > 0.$$

Минимум $q_n$ достигается, если $\{\tau_k\}$ есть чебышевский набор параметров: $\tau_k = \tau_0/(1 + \rho_0\mu_k)$, $\tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, $\rho_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi)$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$, $\mu_k \in \mathfrak{M}_n\{\operatorname{Cos}((2i - 1)/2n)\pi, i = 1, 2, \cdots, n\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, где $\mathfrak{M}_n$—упорядоченная последовательность, при которой схема (11) вычислительно устойчива. Устойчивые наборы $\{\tau_k\}$ даны в [7], [1], [8], [9]. При этом $n \geqq n_0(\varepsilon) = \ln(2/\varepsilon)/2\sqrt{\xi}$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$. Если $n = 1$, то $\tau_k = \mathrm{Const} = \tau_0$ и мы получаем неявную схему простой итерации; в этом случае $n_0(\varepsilon) = \ln(1/\varepsilon)/2\xi$. Вычислительная устойчивость схемы (11), т.е. устойчивость относительно возмущения всех входных данных: $f$, $A$, $B$ и постоянных $\gamma_1$ и $\gamma_2$ исследована в [10].

**7. Попеременно-треугольный метод (ПТМ).** Важным является вопрос о выборе $B$. Предложенный автором [1] ПТМ определяется заданием

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \qquad R_2^* = R_1, \qquad R_1 + R_2 = R = R^* > 0,$$

что соответствует представлению симметричной матрицы $R$ в виде суммы нижней и верхней треугольных матриц, причем $c_1 R \leqq A \leqq c_2 R$, $c_2 \geqq c_1 > 0$. Параметр $\omega$ выбирается из условия минимума числа итераций. В случае модельной задачи Дирихле для $p$-мерного уравнения Лапласа ($p \geqq 3$) в параллелепипеде ($0 \leqq x_\alpha \leqq 1$, $\alpha = 1, 2, \cdots, p$) на сетке $\omega_h$ с шагами $h_1 = h_2 = \cdots = h_p = h$ ПТМ с устойчивым чебышевскнм набором $\{\tau_k\}$ требует $n_0(\varepsilon) \approx 0,28 \ln(2/\varepsilon)/\sqrt{h}$ итераций. Хотя для метода переменных направлений (МПН) с циклическим набором параметров $\{\tau_k\}$ имеем $n_0(\varepsilon) = O(\ln(1/h)\ln(1/\varepsilon))$, однако, на реальных сетках при $p \geqq 3$ для ПТМ с чебышевским набором $\{\tau_k\}$ надо в 3-4 раза меньше итераций, чем для МПН [11]. Кроме того, МПН применим только в случае прямоугольных областей, тогда как для ПТМ таких ограничений нет. ПТМ применим для разностных схем, соответствующих эллиптическим уравнениям и системам общего вида. В этом случае—$R$—разностный оператор Лапласа (в случае уравнений второго порядка).

## Литература

1. А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, "Наука", Москва, 1971.

2. А. А. Самарский и А. В. Гулин, *Устойчивость разностных схем*, "Наука", Москва, 1973.

3. А. В. Гулин и А. А. Самарский, *Об устойчивости разностных схем с несамосопряженными операторами*, Доклады АН СССР **206** (1972), 1280–1283.

4. А. В. Гулин, *Об устойчивости трехслойных разностных схем с несамосопряженными операторами*, Доклады АН СССР **210** (1973), 513–516.

5. В. Б. Андреев, *Об устойчивости по начальным данным разностных схем для параболических уравнений*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **11** (1971).

6. Ю. И. Мокин, *Двухслойные параболические и слабо параболические разностные схемы*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **14** (1974).

7. В. И. Лебедев и С. А. Финогенов, *О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **11** (1971), 425 438.

8. Е. С. Николаев и А. А. Самарский, *Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **12** (1972), 960–973.

9. В. И. Лебедев и С. А. Финогенов, *Решение проблемы упорядочивания параметров в чебышевских итерационных методах*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **13** (1973), 18–33.

10. Е. С. Николаев и А. А. Самарский, *О вычислительной устойчивости двухслойных и трехслойных итерационных схем*, Журн. вычисл. мат. и мат. физ. **12** (1972), 1197–1207.

11. ___, *Методы численного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона любого числа измерений*, Доклады АН СССР **206** (1972), 815–818.

Институт Прикладной Математики АН СССР
Москва, СССР