

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Самарский

Институт прикладной математики АН СССР, Москва, СССР

1. В настоящее время, в связи с появлением быстродействующих ЭВМ и разработкой численных методов, наряду с традиционными теоретическими и экспериментальными методами исследования большое значение приобретает численный эксперимент (часто говорят — математическое моделирование). Если раньше физик при теоретическом исследовании сложного явления вынужден был ограничиваться качественным, размерностным анализом, изучением предельных случаев, которые описываются уравнениями, решаемыми аналитически (уровень физического приближения в значительной степени определялся имеющимся в распоряжении ученого аппаратом аналитического исследования), то теперь положение в корне меняется.

Рассматривается достаточно полное физическое приближение (модель), охватывающее основные эффекты. Ему соответствует некоторая математическая задача, для которой строится вычислительный алгоритм, позволяющий найти ее численное решение на ЭВМ.

Варьируя различные параметры задачи, мы можем провести детальное исследование физического процесса в рамках принятой модели, выявить основные закономерности процесса, оценить влияние различных факторов и т. д. Далее возможен переход к новой физической модели, учет новых эффектов, которые в первом приближении не учитывались и т. д., и оценка границ применимости первого приближения.

Численный эксперимент может с успехом заменить некоторые сложные, длительные и дорогостоящие физические эксперименты.

В настоящее время становится реальностью создание крупных комплексов программ для численного исследования сложных физических процессов, что, в известном смысле, эквивалентно созданию крупных экспериментальных установок.

Заметим, что планирование физических экспериментов фактически невозможно без учета математической обработки на ЭВМ предполагаемых экспериментальных данных.

Конечно, численный эксперимент не заменяет полностью, а лишь дополняет другие способы исследования. Успех численного анализа задачи невозможен без четкой физической и математической постановки, без знания физических параметров (и степени их достоверности), без применения всех традиционных методов для предварительного изучения задачи. Экспериментальные факты, размерностный анализ, автомодельные решения, точные решения в частных случаях, асимптотические оценки — все средства, дающие какую-либо информацию о решаемой задаче и качественной стороне изучаемого явления, должны дополнять численный эксперимент и зачастую предшествовать ему. Кроме того, точные или автомодельные решения необходимы как тесты для проверки численной методики.

2. Физика низкотемпературной плазмы является одной из актуальных областей применения численного эксперимента. Задача о движении плазмы в электрическом и магнитном полях тесно связана с решением проблемы МГД — преобразования энергии, созданием плазменных двигателей, мощных источников излучения, плазмохимией и рядом других важных технических проблем.

Для описания процессов в низкотемпературной плазме мы будем пользоваться магнитогидродинамическим приближением с учетом теплопроводности, вязкости, конечной проводимости, переноса излучения, фазовых переходов и гетерогенности среды. Соответствующая система дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений является нелинейной и её решение, в общем случае, возможно лишь численно. Для проведения расчетов конкретных задач необходимо знание таких характеристик вещества, как уравнения состояния, коэффициенты электропроводности и теплопроводности и др., в широком диапазоне изменения температуры и плотности. О соответствующих методах расчета этих характеристик сказано в докладе Н. Н. Калиткина. Отметим лишь существенно нелинейный характер проводимости как функции температуры и плотности.

В настоящее время развитие численных экспериментов в низкотемпературной плазме происходит фактически по двум направлениям:

- 1) решение одномерных нестационарных задач, учитывающих весь сложный комплекс физических процессов и позволяющих оценить влияние различных факторов и выявить основные физические закономерности;
- 2) решение двумерных задач для более простых физических моделей с целью выяснения вопросов об устойчивости, о влиянии краевых эффектов и др.

Основным методом численного решения задач магнитной гидродинамики является метод конечных разностей. Хотя разностные методики и меняются в зависимости от задачи, однако, имеются общие принципы построения разностных методов (схем), которые строго обоснованы для линейных задач и подтверждаются при помощи численных расчетов в случае нелинейных задач.

3. За последние годы теория разностных методов решения задач математической физики получила существенное развитие.

Остановимся коротко на состоянии теории разностных схем. Более полные сведения можно найти в книге автора [1], в которой имеется также обширная библиография.

Рассмотрим два класса задач:

- 1) нестационарные задачи (теплопроводности, диффузии, колебаний), приводящие к уравнениям второго порядка параболического и гиперболического типов

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad (1)$$

где Lu — эллиптический оператор, например,

$$Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u),$$

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad x = (x_1, \dots, x_p)$$

p — число измерений, $(K_{\alpha\beta})$ — положительно-определенная матрица;

2) стационарные задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа

$$Lu = -f(x), \quad (2)$$

где L — один из указанных выше операторов.

Метод конечных разностей, как известно [1], состоит в следующем. В областях изменения переменных $x \in G$ и $t \in [0, T]$ вводится сетка $\omega_h = \{x_{(i)} \in G\}$ с шагами h_1, h_2, \dots, h_p по x_1, x_2, \dots, x_p и сетка $\omega_\tau = \{t_j, j=0, 1, \dots\}$ с шагом τ . Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются в узлах сетки разностными отношениями. В результате вместо дифференциального уравнения мы получаем систему алгебраических (разностных) уравнений, её порядок равен числу узлов сетки. Последовательность таких систем уравнений для всевозможных сеток называется схемой.

Написание разностных схем является трудной задачей. При этом возникает много теоретических вопросов, исследование которых и составляет предмет теории разностных схем. Укажу лишь некоторые из них:

1) Разностная схема должна приближать решение исходной задачи с заданной точностью.

2) Разностная схема должна быть устойчивой, т. е. решение системы разностных уравнений должно непрерывно зависеть от входных данных задачи (от начальных данных, от правых частей уравнений, от коэффициентов уравнений), причем эта зависимость должна быть равномерной относительно шагов сетки.

3) Разностная схема должна быть экономичной, т. е. для решения системы разностных уравнений должно затрагиваться минимальное число арифметических и логических действий. Иными словами время решения задачи на ЭВМ должно быть минимальным (настолько, насколько это возможно). Заметим, что критерий минимальности числа арифметических действий не является абсолютным — речь обычно идет о минимуме числа действий по порядку относительно числа узлов сетки, например, для нестационарных задач экономичность означает, что число действий для определения решения при переходе от момента $t=t_j$ к моменту $t=t_{j+1}$ («со слоя j на слой $j+1$ ») пропорционально числу узлов сетки ω_h .

Специфика работы на ЭВМ требует, чтобы одни и те же вычислительные алгоритмы (программы) можно было использовать для решения не одной задачи, а для возможно более широкого класса задач (требование универсальности алгоритма). Часто встречаются задачи, приводящие к уравнениям с сильно меняющимися и даже разрывными коэффициентами (например, теплопроводность или диффузия в неоднородной среде). Для решения таких задач разработаны однородные разностные схемы (схемы сквозного счета), которые не предусматривают явного выделения точек разрыва коэффициентов и позволяют вести вычисления во всей области по одним и тем же формулам [1].

В газодинамике, как известно, применяются методы сквозного счета ударных волн, основанные на введении в уравнения квазивязкости, обладающей свойством «размазывания» ударных волн.

Заметим, что однородные разностные схемы, прочно вошедшие в вычислительную практику, естественно получаются из закона сохранения для элементарных ячеек сетки (при помощи интегро-интерполяционного метода). Такие схемы обладают важным свойством консервативности — они выражают законы сохранения на сетке.

Требование однородности накладывает сильные ограничения на структуру схемы. Для сходимости однородной схемы в классе разрывных коэффициентов необходимо, чтобы схема была консервативной.

Основной априорной характеристикой точности схемы является погрешность аппроксимации, определяемая как невязка, возникающая при подстановке в разностное уравнение решения U дифференциального уравнения вместо решения y разностного уравнения.

Принципиальным является следующий результат, установленный в последние годы: погрешность аппроксимации следует оценивать не в точке или в равномерной метрике, а в интегральной или негативной норме [1]. Имеет место утверждение: если схема устойчива и аппроксимирует некоторое дифференциальное уравнение, то она сходится, т. е. решение y разностной задачи сходится (при стремлении шагов сетки к нулю) к решению дифференциального уравнения.

Таким образом, изучение точности разностной схемы сводится к изучению аппроксимации и устойчивости.

Основной проблемой является изучение устойчивости разностных схем.

4. В настоящее время для широкого класса разностных схем, соответствующих нестационарным задачам математической физики, получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Они весьма удобны для проверки.

Рассмотрим, например, двухслойную разностную схему

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где $y^j = y(t_j)$, $\varphi^j = \varphi(t_j)$ — функции, заданные на сетке ω_h , A и B — линейные разностные операторы, действующие на y как функцию точки $x_{(i)} \in \omega_h$. Если (1) — скалярное произведение в пространстве Ω^0 функций, заданных на сетке ω_h и обращающихся в нуль на её границе, и A — самосопряженный положительный оператор, то достаточное условие устойчивости схемы (1) имеет вид $B \geq 0,5\tau A$ или $(By, y) \geq 0,5\tau (Ay, y)$ для всех $y \in \Omega^0$.

Имея классы устойчивых схем (например, двухслойные или трехслойные схемы), можно в этих классах искать такие схемы, которые удовлетворяют дополнительным требованиям точности заданного порядка и экономичности.

Метод построения устойчивых схем заданного качества или метод регуляризации (см. [1], гл. VI, VII) применим для уравнений и систем уравнений параболического и гиперболического типов.

5. Любой итерационный метод решения системы уравнений

$$Au = f,$$

получающихся, например, при разностной аппроксимации уравнения Пуассона, сводится к решению нестационарной задачи на установление. Этот факт очевиден, так как известно, например, что решение уравнения

теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x)$ со стационарными (не зависящими от t) правой частью и краевыми условиями при $t \rightarrow \infty$ стремится (при любых начальных данных) к решению уравнения Пуассона $\Delta u + f(x) = 0$. Любой одношаговый итерационный метод решения уравнения может быть записан в виде двухслойной схемы

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где B_k — некоторый линейный оператор, k — номер итерации.

Доказательство сходимости итераций сводится к изучению устойчивости двухслойной схемы (4), так что теория итерационных методов является частью общей теории устойчивости разностных схем.

В настоящее время имеется большое число эффективных итерационных методов решения стационарных задач математической физики.

Приведем некоторые результаты для операторного уравнения 1-го рода $Au = f$, считая, что A — линейный оператор, заданный на линейном конечномерном пространстве со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

1) Пусть $A = A_1 + A_2 + \dots + A_p$, где A_1, A_2, \dots, A_p — самосопряженные положительные и попарно перестановочные операторы, $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$, $\alpha \neq \beta$.

Тогда метод переменных направлений [1] позволяет получить решение уравнения с точностью $\varepsilon > 0$ за

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

итераций при специальном выборе параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$. Здесь $\eta = \delta/\Delta$, δ — нижняя, а Δ — верхняя границы спектра операторов A_1, \dots, A_p (для простоты предполагаем, что эти границы одинаковы для всех A_1, \dots, A_p).

Для $p=2$ оптимальным является выбор параметров «по Жордану», при $p > 2$ применяется «циклический набор параметров» $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$.

Применительно к уравнению Пуассона указанный результат означает, что

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где h — шаг сетки, если только область изменения $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ есть прямоугольник, ибо перестановочность соответствующих разностных операторов $A_\alpha y = -y_{x_\alpha x_\alpha}$ и $A_\beta y = -y_{x_\beta x_\beta}$ имеет место только в этом случае.

В настоящее время получены методы с той же скоростью сходимости для разностных задач Дирихле в случае уравнения Пуассона в криволинейных системах координат (r, φ) , (r, θ) и (r, z) .

2) Если не выполнены условия попарной перестановочности операторов A_α и A_β , то удастся получить лишь итерационные методы вида (4) с числом итераций

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Эти схемы позволяют решать разностные эллиптические задачи в области сложной формы с числом итераций

$$\eta_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

При этом используется, с одной стороны, идея переменных направлений n , с другой стороны, устойчивый набор чебышевских параметров $\{\tau_k\}$.

В последние годы довольно часто стали пользоваться (в основном, американские авторы) прямыми методами решения разностных эллиптических уравнений. Лучшие из этих методов могут оказаться выгоднее итерационных при многократном решении одного и того же уравнения Пуассона с различными правыми частями. Однако область при этом должна быть прямоугольной.

6. В настоящее время наиболее полно исследовались теоретически и испытаны на практике разностные методы решения уравнений (линейных и квазилинейных) и систем уравнений параболического типа.

Укажу прежде всего одномерное квазилинейное уравнение теплопроводности

$$(c_x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

с краевыми условиями первого, второго и третьего рода, а также с условием типа сосредоточенной теплоемкости. Разработан метод сквозного счета задачи о фазовых переходах (задачи Стефана), основанный на размазывании энтальпии.

Этот метод применим в случае нескольких измерений при наличии не одного, а нескольких фронтов фазового перехода.

Для многомерных задач предложено, в настоящее время много экономичных схем. Все схемы фактически основаны на одной и той же алгоритмической идее переменных направлений: решение многомерной задачи находится путем последовательного решения одномерных алгебраических задач.

Наиболее общим и эффективным оказался метод суммарной аппроксимации, в основе которого лежит новое понятие схемы — аддитивной схемы, как системы p промежуточных схем, каждая из которых не аппроксимирует исходную задачу, однако, сумма $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p$ погрешностей аппроксимации ψ_α стремится к нулю при стремлении шагов сетки к нулю. Таким образом погрешностью аппроксимации аддитивной схемы является сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p.$$

Основным является вопрос о получении экономичных аддитивных схем. Для этого может быть использован следующий эвристический прием.

Пусть в прямоугольнике $0 \leq x_1 \leq l_1$, $0 \leq x_2 \leq l_2$ требуется решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2)u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (5)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$, Γ — граница прямоугольника. Пусть надо найти $u(x, t)$ при $t = t_0 > 0$. Решаем сначала одномерную задачу (по направлению x_1)

$$\frac{\partial V_{(1)}}{\partial t} = L_1 v_{(1)} \quad \text{при } 0 < t < t_0, \quad v_{(1)}|_\Gamma = 0, \quad v_{(1)}(x, 0) = u_0(x) \quad (6)$$

и находим $v_{(1)}(x, t_0)$, после чего решаем одномерное уравнение теплопроводности по направлению x_2

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} = L_2 v_{(2)} \text{ при } 0 < t < t_0, \quad v_{(2)}|_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

с начальным условием

$$v_{(2)}(x, 0) = v_{(1)}(x).$$

Эта теорема верна и в случае, когда

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x_\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Описанный выше метод решения задачи (5) путем последовательного решения одномерных задач (6) и (7) (задачи $L_1 \rightarrow L_2$) допускает простую физическую интерпретацию. Речь идет о следующей модели процесса теплопроводности. На первом этапе «выключаются» теплопроводность по направлению x_2 (вводятся адiabатические перегородки по направлению x_2), т. е. рассматривается задача (6) о распространении тепла вдоль x_1 ; тогда при $t=t_0$ мы получим распределение температуры $v_{(1)}(x, t_0)$. Начиная отсчет времени с $t=0$ и принимая $v_{(1)}(x, t_0)$ за начальную температуру, выключим теплопроводность по направлению x_1 и рассмотрим задачу (7) о распространении тепла вдоль x_2 ; тогда в момент $t=t_0$ мы получим температуру $v_{(2)}(x, t_0)$, которая совпадает с истинным значением $u(x, t_0)$.

Согласно этой модели, реальный физический процесс теплопроводности растягивается во времени и происходит в течение промежутка времени, равного $2t_0$, а не t_0 , как это имеет место для двумерного процесса теплопроводности.

Каждую из одномерных задач (6) и (7) можно решать каким-либо подходящим методом (аналитическим, разностным, при помощи их комбинации, методом прямых и т. д.).

Можно привести еще один пример редукции многомерной задачи к цепочке одномерных. Рассмотрим, например, задачу Коши для уравнения переноса (см. [2])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2) u, \quad L_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad L_2 u = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = \mu(x) = \mu(x_1, x_2).$$

Ее решение $u(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2 - t)$. Процесс переноса можно реализовать в два этапа — сначала вдоль x_1 в течение времени $t = t_0$,

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} = L_1 v_{(1)}, \quad v_{(1)}(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq t < t_0,$$

затем — вдоль x_2 в течение того же промежутка времени

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} = L_2 v_{(2)}, \quad v < t \leq t_0, \quad v_{(2)}(x, 0) = v_{(1)}(x, t_0).$$

Отсюда видно, что $v_{(1)}(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2)$, $v_{(2)}(x, t) = v_{(1)}(x_1, x_2 - t; t_0) = \mu(x_1 - t_0, x_2 - t)$, и, следовательно,

$$v_{(2)}(x, t_0) = u(x, t_0). \quad (8)$$

В общем случае, когда L_1 и L_2 имеют переменные коэффициенты и область изменения $x = (x_1, x_2)$ имеет сложную форму, равенство (8) не имеет места. При этом поступаем следующим образом. Вводим на отрез-

ке $0 \leq t \leq t_0$ сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau\}$ с шагом τ и на каждом интервале $t_j \leq t \leq t_{j+2}$ последовательно решаем задачи (6) — (7). Тогда вместо (8) справедлива оценка

$$v_{(2)}(x, t_0) = u(x, t_0) + O(\tau). \quad (9)$$

Для простоты мы рассмотрели случай однородных краевых условий и однородного уравнения. Оценка (9) справедлива и в случае неоднородных уравнений и краевых условий; при этом $f_1 + f_2 = f$, где f_1 и f_2 — правые части в (6) и (7), а f — правая часть уравнения (5).

Укажу еще один метод разбиения (расщепления) многомерной задачи на последовательность одномерных задач. Он широко используется на практике. Пусть дано уравнение

$$Pu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u - f(x, t) = 0, \quad x \in G, \quad 0 < t \leq t_0; \quad (10)$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad k_\alpha(x, t) > 0;$$

$x = (x_1, \dots, x_p)$ — точка p -мерной области G ($p = 2, 3, \dots$). На границе Γ области G заданы краевые условия

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad (11)$$

а при $t = 0$ — начальное значение

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (12)$$

Обозначим

$$P_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p$ выбраны так, что

$$\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

Тогда, очевидно, $Pu = \sum_{\alpha=1}^p P_\alpha u$.

На отрезке $0 \leq t \leq t_0$ вводим сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau\}$ и кроме того, каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p равных частей $\Delta_\alpha = \left\{ t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\tau\alpha}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p} \right) \tau \right\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. На интервалах Δ_α будем решать уравнения $P_\alpha v_{(\alpha)} = 0$ или

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha(x, t) \quad \text{при } t \in \Delta_\alpha \quad (13)$$

с начальными данными $v_{(\alpha)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}})$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, $j = 0, 1, \dots$, граничными условиями $v_{(\alpha)} = \mu$ на соответствующих частях Γ_α границы Γ области G (Γ_α состоит из точек пересечения прямых, параллельных оси Ox_α , с границей Γ). Полагая $\alpha = 1$ и $v_{(1)}(x, t_j) = v(x, t_j)$, находим $v_{(1)}(x, t_{j+1/p})$ и т. д. пока не определим $v(x, t_{j+1}) = v_{(p)}(x, t_{j+1})$. Оказывается, что и в этом случае справедлива оценка $v(x, t_j) - u(x, t_j) = O(\tau)$ для всех $j = 1, 2, \dots$, если $v(x, 0) = u_0(x)$.

Этому способу сведения задачи (10) — (12) к цепочке задач (13) соответствует другая физическая модель: на каждом этапе коэффициент теплоемкости уменьшается в p раз, поэтому длительность цепочки одномерных процессов теплопроводности такая же, как и многомерного. Заметим, что в случае, когда $k_\alpha=1$, $\mu=0$, $f=0$ и G — p -мерный параллелепипед, обе модели совпадают и $v(x, t_{j+1})=u(x, t_{j+1})$.

Для численного решения каждой из одномерных задач (6), (7) или (13) имеются эффективные экономичные схемы. Поэтому, заменяя, например, (6) и (7) соответствующими схемами, получаем экономичный алгоритм решения двумерной задачи (5). Такой локально-одномерный метод оказался пригодным для решения уравнения теплопроводности в областях сложной формы. Никаких принципиальных трудностей при переходе от двух к трем измерениям и к квазилинейному уравнению теплопроводности не возникает.

Для уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t)$$

может быть построена следующая локально-одномерная модель (Д. Г. Гордескани, А. А. Самарский);

$$\frac{\partial^2 v_{(\alpha)}}{\partial t^2} = L_\alpha v_{(\alpha)}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Все уравнения решаются с одними и теми же начальными условиями

$$v_{(\alpha)}^j = u^j, \quad \left(\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} \right)^j = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^j, \quad v_{(\alpha)}(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x)$$

и граничными условиями $u|_\Gamma = \mu$. Зная $v_{(\alpha)}^{j+1}$, находим

$$v^{j+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p v_{(\alpha)}^{j+1}.$$

Имеет место оценка $v^j - u^j = O(\tau^2)$ для всех $j=0, 1, \dots$

Заменяя каждое из уравнений номера α трехслойной схемой с весами, получаем экономичную локально-одномерную схему.

8. Совершенно очевидно, что многомерные задачи, такие как, например, задачи физики плазмы можно решать практически лишь на не очень мелких сетках (например, число узлов ≈ 100 по каждому из направлений является, по-существу, предельным в случае трехмерных задач даже для ЭВМ будущих поколений, особенно, если учесть процессы переноса излучения). Кроме того, надо иметь в виду необходимость решать большое число вариантов в численном эксперименте, поэтому сетка не должна быть очень мелкой. Проблема состоит в построении таких схем, которые обладали бы оптимальными свойствами на реальных сетках, а не при стремлении шагов сетки к нулю. При ее решении недостаточно исследование асимптотических свойств схемы и порядка ее точности. К тому же для многих нелинейных задач и такого исследования нет. Необходимо использовать и аргументы качественного характера: разностная схема должна правильно моделировать в пространстве сеточных

функций основные свойства дифференциального уравнения. Одним из качественных требований является консервативность разностной схемы.

Для определенности будем говорить о задачах механики сплошной среды и магнитной гидродинамики, описываемых уравнениями в частных производных. Любая разностная схема дает математическое описание дискретной модели среды. Естественно требовать, чтобы дискретная модель правильно отражала основные свойства сплошной среды, такие как законы сохранения (количества движения, массы, энергии и т. д.). Разностные схемы, которые выражают законы сохранения на сетке, называются консервативными.

Выше было указано, что консервативность необходима для сходимости однородных схем в случае уравнений (1) и (2) с разрывными коэффициентами и, тем самым, необходима для задач газодинамики и магнитной гидродинамики.

Подводя итоги, отметим три метода получения разностных схем заданного качества:

- 1) интегро-интерполяционный метод получения консервативных схем,
- 2) метод регуляризации в классе устойчивых схем,
- 3) метод суммарной аппроксимации.

Эти методы применимы не только для линейных, но и для нелинейных задач.

9. Не следует думать, что принципы построения разностных схем, о которых говорилось выше, представляют некую завершенную систему требований.

Задачи, встающие перед вычислительной математикой, становятся все сложнее. Прежние алгоритмы не всегда могут быть эффективно использованы для их решения. Поэтому неизбежно приходится вводить новые требования, формулировать новые принципы, приводящие порой к сужению уже известных классов разностных схем. Эту мысль можно проиллюстрировать на примере принципа полной консервативности, который был выдвинут в связи с решением магнитогидродинамической задачи о сильноточном излучающем импульсном разряде в низкотемпературной плотной плазме.

Мощная батарея конденсаторов разряжается через столб плазмы, образующейся в результате электрического взрыва тонкой металлической проволоочки. Возникающее сложное магнитогидродинамическое течение характеризуется резкими изменениями параметров разряда во времени и пространстве (быстрые многократные пинчевания плазменного столба, возникновение резко выраженных высокотемпературных зон Т-слоя и т. д.). Для аккуратного расчета этой задачи прежние численные методы оказались неэффективными.

Для простоты поясним существо дела на примере системы уравнений газовой динамики. Эта система представляет собой выражение трех законов сохранения — импульса, массы и энергии, и в лагранжевых массовых координатах для одномерного нестационарного случая имеет вид;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon + 0,5v^2) = - \frac{\partial}{\partial x} (pv), \quad (15)$$

где t — время, r — эйлерова координата, ρ — плотность, $x(dx = \rho dr)$ — лагранжевая массовая координата, p — давление, ε — внутренняя энергия, v — продольная компонента скорости.

Уравнение энергии (15), выражающее закон сохранения энергии, может быть переписано в недивергентном виде

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial x} \quad (16)$$

или

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (17)$$

причем (16) и (17) имеют непосредственный физический смысл. Именно, выражения (16) и (17) указывают, что изменение внутренней энергии в системе обусловлено работой сжатия. Заметим, что уравнения (16), (17), (15) эквивалентны в том смысле, что с помощью остальных уравнений (14) сводятся друг к другу.

При численном решении методом конечных разностей система дифференциальных уравнений аппроксимируется некоторой разностной схемой, непрерывная среда заменяется некоторой дискретной моделью. При этом разностное уравнение энергии можно строить на основе любого из эквивалентных видов (15) — (17).

Можно показать, что указанное свойство эквивалентности в разностном виде в общем случае места не имеет. Если в схеме использовано недивергентное разностное уравнение типа (16) или (17) (например, известная схема «крест»), то в такой схеме будет нарушен закон сохранения полной энергии. Так, при расчете задачи о сильноточном разряде по таким схемам получался следующий физически абсурдный результат: к концу процесса из системы в виде света выходила энергия, превышающая начальный запас энергии в батарее конденсаторов.

При использовании произвольной консервативной схемы закон сохранения энергии, естественно, выполнен. Однако, в этом случае в схеме не будут выполнены разностные аналоги уравнений (16) и (17). В результате окажется нарушенным баланс внутренней энергии. Такой дефект схемы не менее опасен, чем нарушение закона сохранения энергии, особенно в задачах, где имеются функции, сильно зависящие от температуры, такие как коэффициенты электропроводности, теплопроводности и т. д. Например, при расчете упомянутой выше задачи о сильноточном разряде, указанный выше недостаток консервативных схем приводил к тому, что температура отдельных масс плазмы падала на стадии сжатия в присутствии джоулева нагрева.

Наличие в схеме энергетических дисбалансов можно трактовать как присутствие некоторых источников энергии чисто разностной природы, связанных с «рассогласованностью» отдельных разностных уравнений схемы. Дисбалансы зависят от характера решения: на гладких функциях они малы, однако на решениях, сильно меняющихся во времени и пространстве, дисбалансные члены могут достигать значительной величины, сравнимой с полной энергией системы.

Дисбалансы энергии в схеме определяются также и временным шагом разностной сетки τ , так для чисто неявной схемы он имеет порядок $O(\tau)$. В принципе, бесконечно измельчая шаг, можно устранить описанные дефекты. Однако, если ставить проблему достаточно аккуратного расчета сильно меняющихся во времени и пространстве процессов на конечных сетках, то приходится искать новые подходы к конструированию разностных схем.

Так был выдвинут принцип полной консервативности, который применительно к системе газодинамики гласит: разностная схема должна быть такова, чтобы для нее также выполнялось свойство эквивалентности

различных форм уравнения энергии, справедливое в дифференциальном случае.

В общем случае это означает, что в разностной схеме, помимо основных законов сохранения, должны также соблюдаться некоторые дополнительные соотношения, необходимость выполнения которых диктуется физическими соображениями.

Естественно, что полностью консервативные схемы являются сужением класса обычных консервативных схем. Такие схемы были построены как для уравнений газодинамики, так и для магнитной гидродинамики. С их помощью была решена, в частности, упомянутая выше задача о сильноточном разряде.

10. Рассмотрим некоторые характерные двумерные задачи, возникающие при изучении динамики низкотемпературной плазмы.

Рассмотрим сначала задачу о нахождении распределения электрических полей и токов в плазме с анизотропной проводимостью (с учетом токов Холла) при малых значениях магнитного числа Рейнольдса.

В этом случае для напряженности электрического поля \mathbf{E} и плотности тока \mathbf{J} имеет место уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{J} = 0$ и закон Ома

$$\mathbf{J} + \mathbf{J} \times \beta = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right),$$

где σ — проводимость, $\beta = \frac{e\mathbf{H}}{mcv}$ параметр Холла, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, v — частота столкновений носителей тока, остальные обозначения общеприняты. Ограничимся рассмотрением двумерного случая, когда $j_z = 0$ и все функции зависят только от x, y . Пусть $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Введем вектор-потенциал $\phi = (0, 0, \phi)$ и положим $\mathbf{J} = \text{rot } \phi$, так что

$$j_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

В результате для ϕ получим несамосопряженное эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = f, \quad (18)$$

$$\text{где } k = 1/\sigma, \quad r = \beta/\sigma, \quad f = \text{div } \mathbf{v}H = \frac{\partial}{\partial x} (v_x H) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y H).$$

Чаще всего встречаются краевые условия двух типов:

а) если участок границы является идеально секционированным электродом, через который задается j_n , то $\phi = \psi(s)$ — заданная функция длины дуги s : условие $\phi = \text{const}$ означает «непротекание» тока через идеальный диэлектрик;

б) если участок границы является идеально проводящим электродом, то тангенциальная составляющая электрического поля $E_s = 0$, что эквивалентно условию «косой производной»,

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} - r \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

В общем случае на части границы задается условие первого рода, а на части границы — косая производная.

Для получения однородной разностной схемы второго порядка точности был применен вариационно-разностный метод; рассматривалась билинейная форма $Q[\psi, \varphi]$ для (18); она заменялась разностным аналогом $Q_h[\psi, \varphi]$. Разностные уравнения получились из условия минимума $Q_h[\psi, \varphi]$.

Для решения системы разностных уравнений были использованы итерационные методы переменных направлений.

11. Следующая задача связана с явлением ионизационной неустойчивости, теоретически предсказанным Е. П. Велиховым. Цель численного эксперимента — изучение влияния нелинейного процесса электронной теплопроводности на развитие ионизационной неустойчивости, выяснение топологической структуры развитой неустойчивости и влияния граничных условий (явления контракции тока между конечными электродами и др.).

Использовалась известная модель неизотермической равновесной плазмы с пренебрежимо малой температурой тяжелой компоненты.

Мы не будем выписывать систему нелинейных уравнений. Отметим лишь, что указанное выше уравнение для ψ является одним из уравнений системы. Второе уравнение есть уравнение баланса энергии электронов с учетом нелинейной электронной теплопроводности.

В целом получается нестационарная квазилинейная двумерная задача. Для ее решения использовался локально-одномерный метод. При этом в каждый момент времени решается эллиптическая задача для определения ψ методом итераций.

Область, занятая плазмой, представляет собой прямоугольник ABCD. Горизонтальные участки AB и CD являются электродами идеально секционированными ($j_y = -1$) или идеально проводящими ($E_x = 0$). Задан полный ток через электроды. На вертикальных диэлектрических стенках AD и CB полагалось $j_x = 0$. На всей границе области ABCD задавалась температура. Начальное однородное состояние плазмы возмущалось путем изменения концентрации n (или температуры T) на величину Δn (или ΔT).

На рисунках приведены характерные моменты эволюции возмущений, внесенных на первоначально однородный стационарный фон.

Отметим некоторые следствия анализа проведенных расчетов.

Во-первых, принятая физическая модель отражает основные моменты динамики явления, известные из эксперимента: образование страт и установление квазистационарной неоднородной структуры распределения электронной концентрации и плотности тока на стадии развитой неустойчивости.

Установлено, что развитие неустойчивости последовательно проходит две качественно различные стадии.

На первом этапе происходит интенсивное образование страт с повышенной концентрацией электронов (рис. 1), в основе которого лежит взаимодействие нелинейных процессов джоулева нагрева и потери энергии электронов при столкновениях с тяжелыми частицами. Образование страт сопровождается снижением эффективной проводимости плазмы σ_{eff} и ее эффективного параметра Холла β_{eff} .

Начало второй стадии характеризуется появлением пробоев и протеканий тока вдоль «перемычек» между стратами. Таким образом на стадии развитой неустойчивости характерной оказывается топология «токовых струй» (рис. 2). Это обстоятельство препятствует дальнейшей контракции тока в стратах и, следовательно, снижению σ_{eff} и β_{eff} .

Варьирование граничных условий в расчетах показало, что динамика формирования страт существенно зависит от этого фактора. Так, между

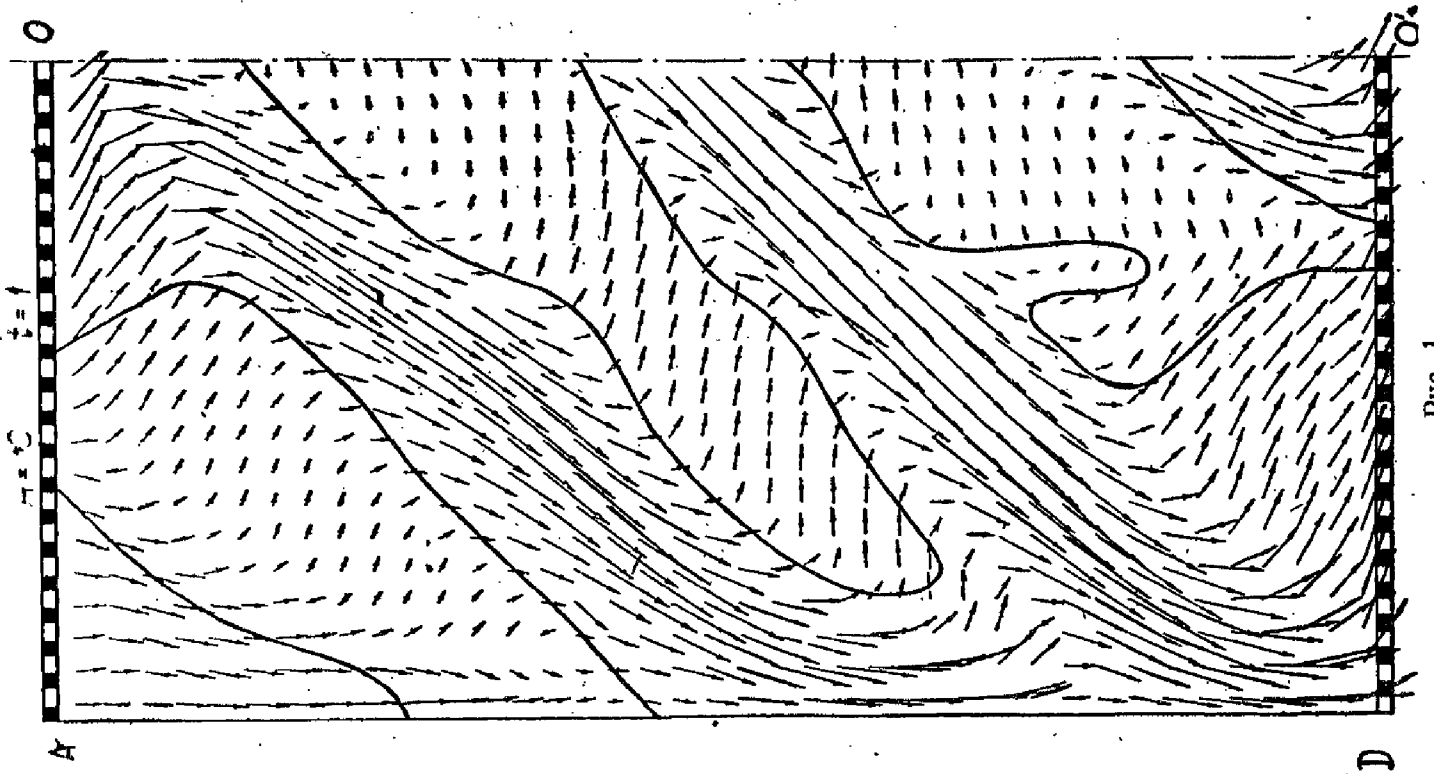


Рис. 1.

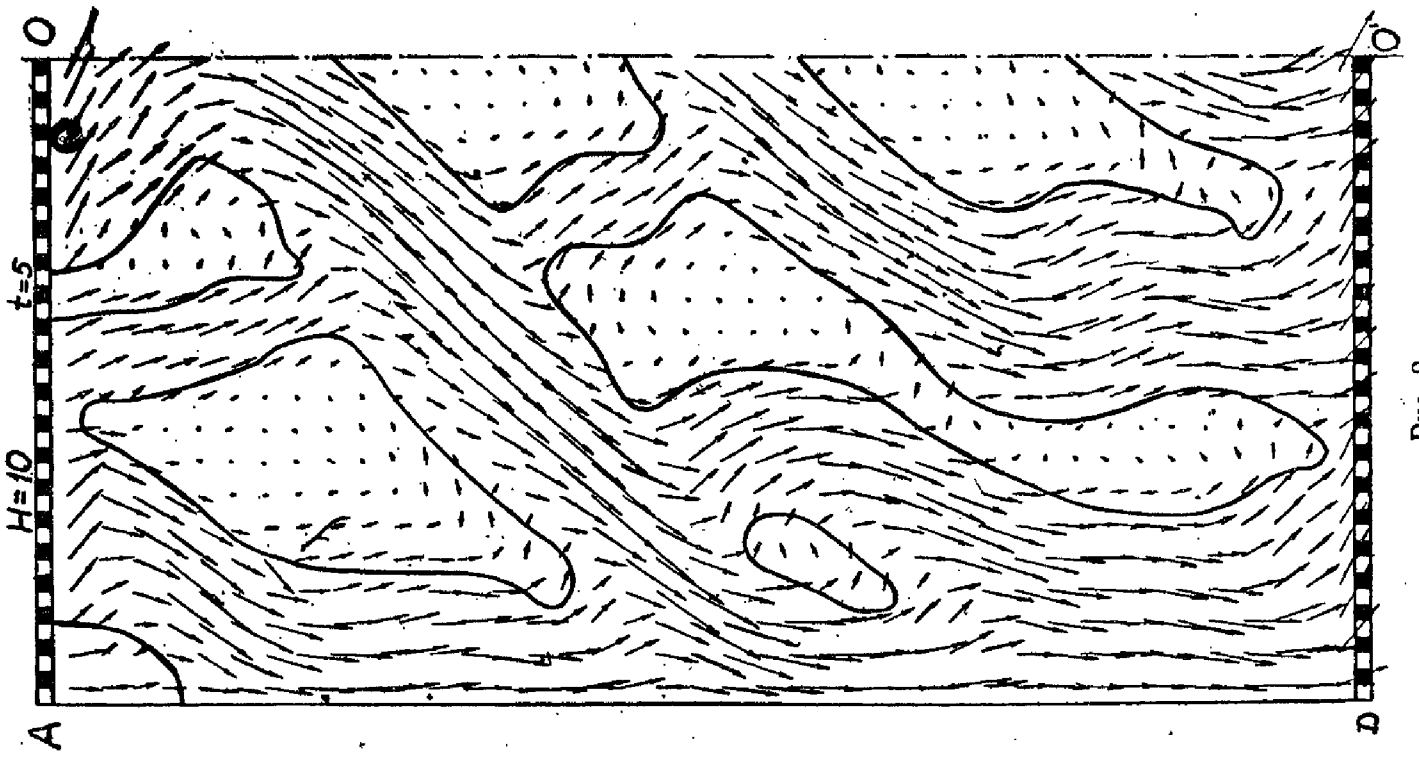


Рис. 2.

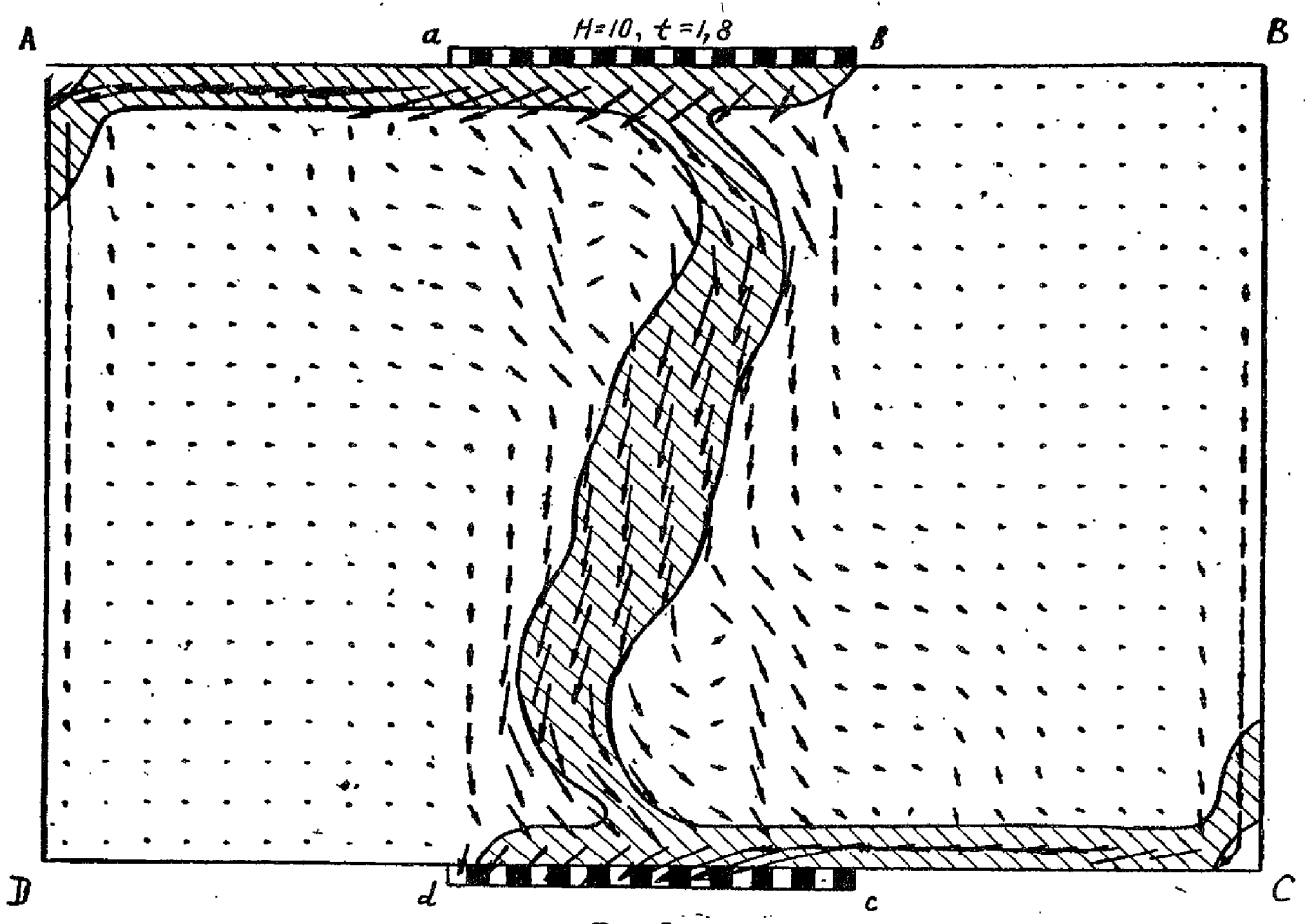


Рис. 3.

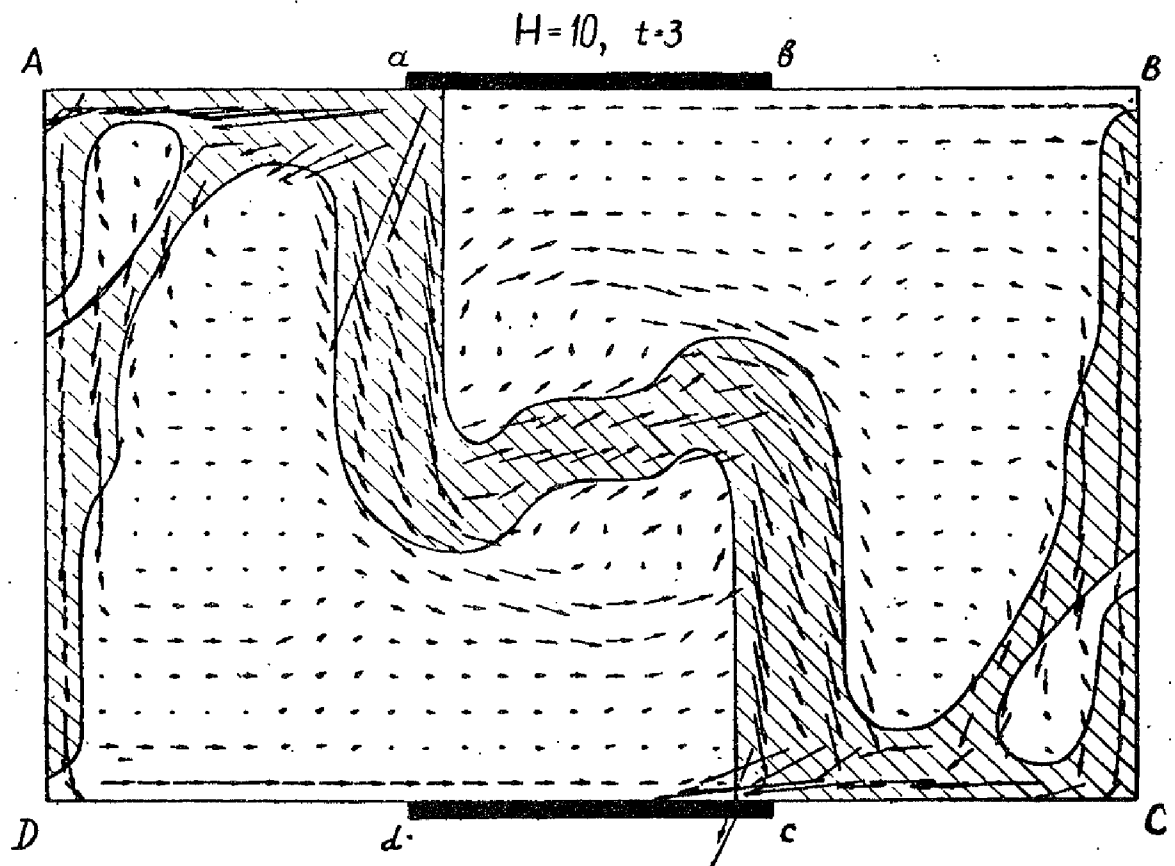
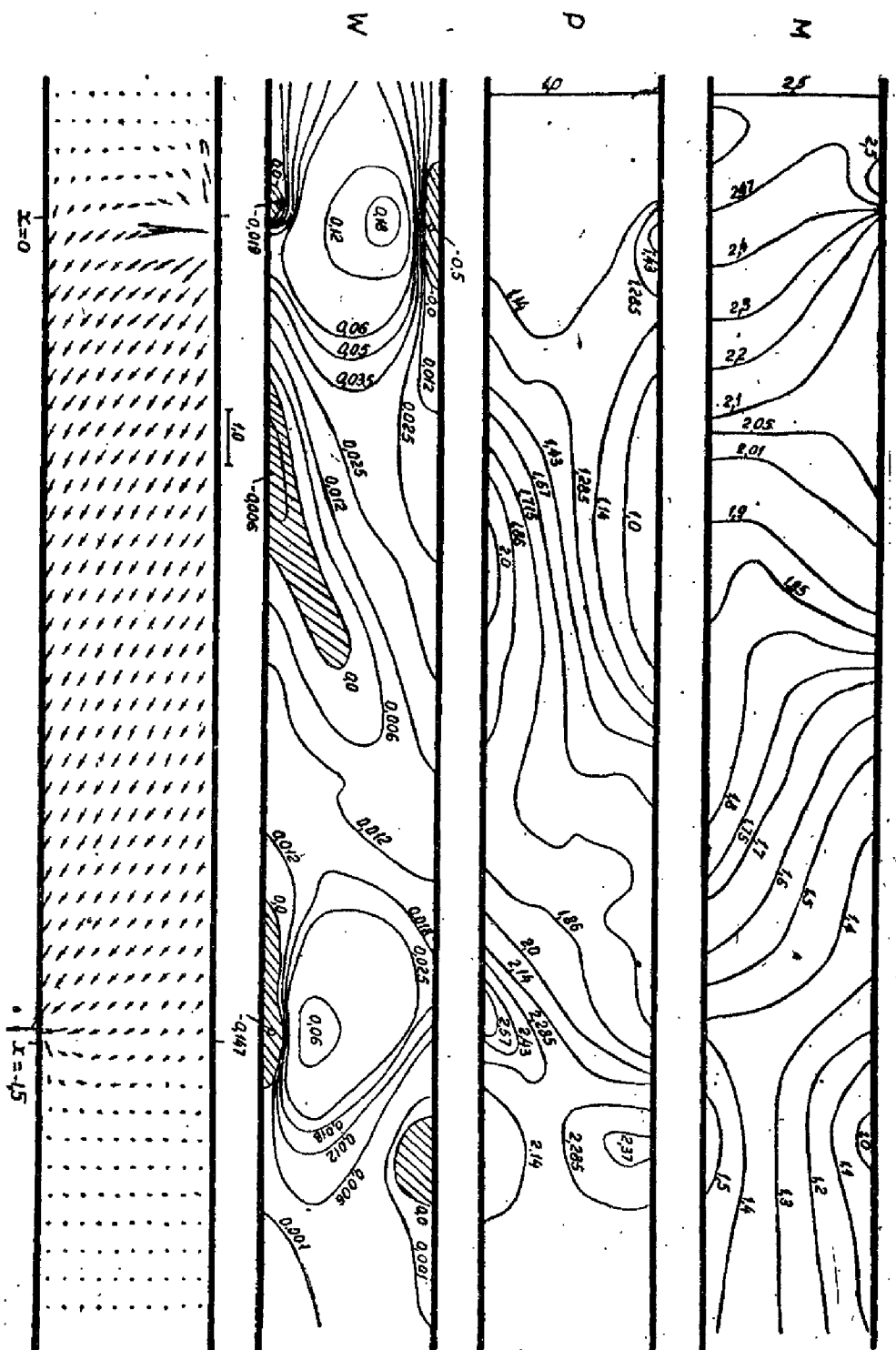


Рис. 4.



PAGE 8.

В отличие от основной массы работ, использующих аналитические методы в приближении $S \ll 1$, применение численных методов позволяет исследовать влияние концевых эффектов и эффекта Холла при $S \sim 1$.

1. При входе потока в резко нарастающее магнитное поле (рис. 6) торможение происходит в волне сжатия в локализованной зоне $0 < X < d$, узкой по сравнению с шириной канала d .

При входе потока в плавно нарастающее магнитное поле ($\alpha \approx \xi \sim d$) зона волны сжатия распространяется вверх по потоку, а у стенок появляются зоны разрежения.

С повышением S степень торможения растет и начиная с некоторого $S = S_{кр}$, стационарное течение становится невозможным. Как показали расчеты, при этом происходит перестройка течения в результате движения вверх по потоку ударной волны, зарождающейся в зоне сжатия.

9. Выход сверхзвукового потока из магнитного поля при $S \sim 1$ также сопровождается торможением и нагревом при взаимодействии потока с токовым вихрем (рис. 7). Однако это взаимодействие носит качественно иной характер, нежели в рассмотренном выше случае «входа». А именно, течение в зоне «выхода» всегда гладкое и переход через скорость звука происходит непрерывным образом. Существует критическое значение $S = S_{кр}$, превышение которого приводит к раздвоению токового вихря на два и один из них распространяется вверх по потоку, оставляя за собой дозвуковое течение.

3. Характерно, что плавное изменение магнитного поля уменьшает торможение потока, но не улучшает его однородность в сечении.

4. Влияние эффекта Холла на течение в электроночной зоне канала становится заметным, начиная с $\Omega \sim 1$. При этом (рис. 8) поток отклоняется к катоду и может «отражаться» от него под действием нарастающего поперечного градиента давления. Этот процесс далее может повторяться по длине канала. В результате распределение параметров по пространству и вдоль электродов носит немонотонный характер, что приводит к существенно двумерному локальному энергосъему.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., Наука, 1971.
2. В. Я. Гольдин, Г. В. Данилова, Н. Н. Калиткин, Численные методы решения задач матем. физики, М., Наука, стр. 190—193, 1966.
3. Ю. П. Попов, А. А. Самарский, ЖВМ и МФ, 9, вып. 4, 1969.
4. Ю. П. Попов, А. А. Самарский, ЖВМ и МФ, 10, вып. 4, 1970.
5. Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский, ЖВМ и МФ, 10, вып. 6, 1970.
6. Е. П. Велихов, Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский, ДАН СССР, 184, вып. 3, 1969.
7. Е. П. Велихов, Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский, Доклад на Пятом международном симпозиуме по МГД преобразованию энергии, Мюнхен, т. 3, стр. 307, 1971.
8. А. В. Губарев, Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский, ДАН СССР, 192, вып. 3, 1970.
9. А. В. Губарев, Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский, Доклад на Пятом международном симпозиуме по МГД преобразованию энергии, Мюнхен, т. 2, стр. 159, 1971.