ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.С. Николаев, А.А. Самарский

МЕТОД РИЧАРДСОНА, УСТОЙЧИВЫЙ ПРИ ЛЮБОМ ЧИСЛЕ ИТЕРАЦИЙ

Препринт № 23 за 1972г

Москва

Для итерационного метода Ричардсона решения операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространотве построено упорядочение набора итерационных параметров, для которого метод становится численно устойчивым. Число параметров произвольно. Приводится АЛГОЛ-программа построения этого набора. Библ. 10 назв.

Ключевые слова: итерационный метод, устойчивость.

Оглавление

Введение

В настоящей работе рассматривается итерационный метод Ричардсона решения операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве.

Мы рассматриваем класс уравнений, для которого прямые методы обращения оператора являются неэффективными. Примерами таких задач могут служить большие системы алгебраических уравнений, возникающие в линейной алгебре, разностные схемы, аппроксимирующие краевые задачи для стационарных уравнений математической физики.

Специфика последних задач выражается в большой размерности матрицы (порядка нескольких тысяч), редкой заполненности ненулевыми элементами и плохой обусловленности. В настоящее время такие задачи решаются в основном итерационными методами.

Среди широко известных и часто применяемых итерационных методов можно указать процесс Ричардсона [1]-[6] с Чебышевским набором параметров. Он обладает высокой теоретической скоростью сходимости, однако, для задач с плохо обусловленными операторами на практике была выявлена его численная неустойчивость [3]-[6].

Детальное исследование причин неустойчивости метода, проведенное в последнее время В.И.Лебедевым и С.А.Финогеновым в [7], показало, что она связана с порядком использования итерационных параметров и что предлагавшиеся ранее [3]-[4] способы упорядочения параметров не устраняют численную неустойчивость, а лишь уменьшают ее. Дальнейшие исследования показали, что существует такой порядок в наборе итерационных параметров, для которого метод становится численно устойчивым.

Этот порядок был построен и обоснован в [7] и на основе другой методике исследования в [8] для случая, когда число параметров есть степень $2: n=2^p$.

В данной работе предложен набор параметров, при котором метод Ричардсона устойчив в случае произвольного числа итераций n. При построении такого "устойчивого набора параметров" используется метод упорядочения параметров для $n=2^p$, изложенный в [8].

Для исследования устойчивости метода применялся численный эксперимент. В заключении приводится АЛГОЛ - программа построения параметров, которая использовалась при реализации метода на практике.

Так как основные характеристики рассматриваемого метода не зависят от конкретной структуры оператора задачи, а определяются лишь его функциональными свойствами, то мы будем рассматривать этот метод для абстрактного операторного уравнения в гильбертовом пространстве.

§ I. Итерационный метод Ричардсона.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{A} u = f$$

где $\mathcal{A}$ – квадратная матрица, u – искомый, f – заданный векторы.

При теоретических исследованиях целесообразно трактовать систему алгебраических уравнений как операторное уравнение I-го рода

$$A u = f \tag{I.I}$$

с линейным оператором A, заданным в вещественном гильбертовом пространстве H, $A : H \longrightarrow H$

В качестве примера можно рассматривать разностные уравнения, получающиеся при разностной аппроксимации краевых задач для эллиптических уравнений; разностный эллиптический оператор трактуется как линейный оператор в соответствующем пространстве сеточных функций.

Для приближенного решения уравнения (I.I) применяется неявная двухслойная итерационная схема

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{I.2}$$

с произвольным начальным приближением $y_0 \in H$

Предполагается, что оператор B легко обратим и удовлетворяет условиям

$$B = B^* \geqslant \beta E, \quad \beta > 0 \tag{I.3}$$

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_2 > \gamma_1 > 0 \tag{I.4}$$

где γ_1 и γ_2 – постоянные энергетической эквивалентности операторов A и B. Неравенство (I.4) понимается в том смысле, что для любого $x \in H$

$$\gamma_1 (Bx, x) \le (Ax, x) \le \gamma_2 (Bx, x),$$

где (x, y) - скалярное произведение в H.

Изучение сходимости итерационного процесса (I.2) сводится к оценке при $k \to \infty$ решения $z_k = y_k - u$ однородного уравнения

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + A z_k = 0, \quad k=0,1,\ldots, \quad z_0 = y_0 - u \qquad (I.5)$$

Неявная схема (I.5) эквивалентна явной (см. [8])

$$x_{k+1} = S_{k+1} x_k, \quad S_k = E - \tau_k C, \quad x_0 - \text{задано} \qquad (I.6)$$

где $x_k = A^{1/2} y_k$, $C = C_1 = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$ или

$x_k = B^{1/2} y_k$, $C = C_2 = B^{-1/2} A B^{-1/2}$

Оператор $S_{k+1}(C)$ называется оператором перехода со слоя k на слой $k+1$.

В силу условий (I.3) и (I.4) оператор C - самосопряженный с границами γ_1 и γ_2 :

$$C = C^*, \quad \gamma_1 E \le C \le \gamma_2 E \qquad (I.7)$$

Пользуясь рекуррентной формулой (I.6), находим

$$x_n = T_{n,0}\, x_0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$T_{k,j} = \prod_{i=j+1}^{k} S_i = \prod_{i=j+1}^{k} (E - \tau_i C), \quad T_{k,k} \equiv E \qquad (I.8)$$

Оператор $T_{k,j}(C)$ называется разрешающим оператором со слоя j на слой k. Разрешающий оператор $T_{n,0}(C)$ есть операторный полином степени n и норма его оценивается следующим образом [9] :

$$\| T_{n,0}(C) \| \le \max_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} | T_{n,0}(t) |$$

Параметры $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$ итерационного процесса (I.2) находятся из условия минимума $\| T_{n,0}(C) \|$ или

$$\min_{\{\tau_k\}} \max_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} | T_{n,0}(t) |$$

Решение этой задачи[x)] имеет вид [8]:

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad \mu_k \in \mathfrak{M}_n = \left\{ -\cos\beta_i, \ \beta_i = \frac{2i-1}{2n}\pi, \ i = 1, 2, \dots n \right\} \qquad (I.9)$$

где $\mathfrak{M}_n$ – множество нулей полинома Чебышева n – ой степени, расположенных в порядке возрастания индекса i,

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Здесь мы фиксируем порядок расположения элементов множества $\mathfrak{M}_n$, не определяя пока правила выбора μ_k из этого множества.

При таком наборе итерационных параметров $\{\tau_k\}$ для нормы разрешающего оператора $T_{n,0}$ справедлива оценка

$$\| T_{n,0} \| \le q_n .$$

где

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}$$

Для решения задачи (I.6) из (I.8) получим оценку

$$\| x_n \| \le q_n \| x_0 \|$$

которой соответствует следующая априорная оценка для решения задачи (I.5)

$$\| z_n \|_D \le q_n \| z_0 \|_D, \quad D = A \text{ или } B \qquad (I.10)$$

x) Полиномиальная минимизация $| P_n(x) |$ на отрезке $[a, b]$ была дана еще В.Марковым в 1892 году.

Здесь $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ – норма в энергетическом пространстве $H_{\mathcal{D}}$, определяемая следующим образом: $\|x\|_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}x, x)^{1/2}$, для $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* > 0$.

Из (I.10) следует, что через n итераций начальная погрешность $\|z_0\|_{\mathcal{D}}$ уменьшится в $\frac{1}{q_n}$ раз. Требование $q_n \le \varepsilon$ будет выполнено, если число итераций $n \geq n(\varepsilon, \xi)$, где

$$n(\varepsilon, \xi) = \frac{\ln 0.5\varepsilon}{\ln \rho_1} \approx \frac{|\ln 0.5\varepsilon|}{2\sqrt{\xi}}$$

Схему (I.2) с указанной в (I.9) последовательностью параметров τ_k называют неявным итерационным методом Ричардсона с чебышевскими параметрами.

2. При изучении сходимости метода (I.2) мы предполагали, что вычислительный процесс является идеальным, то есть счет ведется с бесконечным числом знаков. Однако, в реальном вычислительном процессе мы можем оперировать с величинами ограниченными, не превосходящими границу максимально возможного для представления в ЭВМ числа, и кроме того, процесс округления результатов арифметических операций вносит в решение y_k некоторые погрешности на каждом этапе вычислений.

При реализации метода Ричардсона для больших n и $\frac{1}{\xi}$ (плохо обусловленный оператор) была отмечена как потеря окончательной точности из-за ошибок округления, так и останов процесса вследствии катастрофического роста промежуточных решений.

Полученная выше оценка (I.10) фактически выражает устойчивость схемы (I.2) по начальным данным в том смысле, что итерационное решение y_n после выполнения всех итераций устойчиво по отношению к возмущению начального приближения y_0.

Для реального процесса необходимо исследовать устойчивость по начальным данным при переходе от y_0 к y_k для любого

$k=1,2,\ldots,n$ и тем самым иметь возможность оценить рост промежуточных решений, а также исследовать устойчивость по правой части, что позволяет учесть влияние погрешностей округления.

Поясним это утверждение. Можно считать, что введение погрешностей округления эквивалентно возмущению входных данных задачи – начального приближения, правой части уравнений и операторов задачи A и B.

Пренебрегая для простоты возмущением операторов A и B, реальное решение $\tilde{y}_k$ можно рассматривать как точное решение следующей задачи

$$B\,\frac{\tilde{y}_{k+1}-\tilde{y}_k}{\tau_{k+1}} + A\tilde{y}_k = \tilde{f}_{k+1} + \frac{1}{\tau_{k+1}}\tilde{w}_{k+1},\quad k=0,1,\ldots \tag{I.11}$$

$\tilde{y}_0$ – задано.

Очевидно, что для получения необходимых оценок достаточно исследовать устойчивость следующей явной схемы

$$x_{k+1} = S_{k+1}x_k + \tau_{k+1}\varphi_{k+1} + \psi_{k+1} \qquad x_0 \text{ – задано} \tag{I.12}$$

где $S_k = E - \tau_k C$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $\psi_k = B^{-1/2}\tilde{w}_k$.

Если нужно оценить рост промежуточных решений, то

$$x_k = B^{1/2}\tilde{y}_k,\qquad \varphi_k = B^{-1/2}\tilde{f}_k,$$

и если нужно оценить погрешность решения, то

$$x_k = B^{1/2}(\tilde{y}_k - u),\qquad \varphi_k = B^{-1/2}(\tilde{f}_k - f)$$

Пользуясь рекуррентной формулой (I.12), находим

$$x_k = T_{k,0}x_0 + \sum_{j=1}^{k}\tau_j T_{k,j}\varphi_j + \sum_{j=1}^{k}T_{k,j}\psi_j$$

$$\|x_k\| \le \|T_{k,0}\|\,\|x_0\| + \sum_{j=1}^{k}\tau_j\|T_{k,j}\|\,\|\varphi\| + \sum_{j=1}^{k}\|T_{k,j}\|\,\|\psi\|$$

где $\|\varphi\| = \max\limits_{1\le j\le k}\|\varphi_j\|$, $\|\psi\| = \max\limits_{1\le j\le k}\|\psi_j\|$

Будем говорить, что итерационный метод Ричардсона устойчив ("набор параметров $\{\tau_k\}$ устойчив"), если существуют положительные C_1, C_2, C_3, зависящие, быть может, от γ_1, γ_2, но независящие от n, такие, что равномерно по $k \le n$ справедливы оценки

$$\|T_{k,0}\| \le C_1, \quad \sum_{j=1}^{k} \tau_j \|T_{k,j}\| \le C_2, \quad \sum_{j=1}^{k} \|T_{k,j}\| \le C_3$$

Для устойчивого набора параметров при любом k имеет место оценка решения задачи (I.I2)

$$\|x_k\| \le C_1 \|x_0\| + C_2 \|\varphi\| + C_3 \|\psi\|,$$

которой соответствуют следующие априорные оценки для задачи (I.II)

$$\|\tilde{y}_k\|_B \le C_1 \|\tilde{y}_0\|_B + C_2 \max_{1\le j\le k} \|\tilde{f}_j\|_{B^{-1}} + C_3 \max_{1\le j\le k} \|\tilde{w}_j\|_{B^{-1}}$$

$$\|\tilde{y}_n - u\|_B \le C_1 \|\tilde{y}_0 - u\|_B + C_2 \max_{1\le j\le k} \|\tilde{f}_j - f\|_{B^{-1}} + C_3 \max_{1\le j\le k} \|\tilde{w}_j\|_{B^{-1}}$$

Из этих оценок следует вычислительная устойчивость метода.

Данное выше определение устойчивости является общим для всех двухслойных итерационных схем вида (I.2).

Исследуем устойчивость набора параметров $\{\tau_k\}$ метода Ричардсона.

Пусть μ_k в (I.9) есть k-ый элемент множества $\mathfrak{M}_n$. В работах [7], [8] построено для случая $n = 2^p$ переупорядочение множества $\mathfrak{M}_n$ такое, что порождаемый этим множеством набор параметров $\{\tau_k\}$ является устойчивым.

Применяя развитый в [8] метод оценок норм операторов, нами получены для $n = 2^p$ следующие оценки ($m = j\cdot 2^k$, $k > 0$, j - нечетное).

$$\|T_{m,0}\| < \frac{1}{\xi}, \quad \sum_{i=1}^{m} \tau_i \|T_{m,i}\| \le \frac{1}{\gamma_1}\left[1 + (1-\delta_{1,j})\frac{1}{\xi^2}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|T_{m,i}\| \le \frac{1}{\xi} \left[1 + (1-\delta_{1,j}) \frac{1}{\xi^2} \right]$$

Здесь $\delta_{1,j}$ – символ Кронекера. Важно подчеркнуть, что оценки равномерны по m. Они являются можорантными, независящими от n. Более точные оценки включают в себя зависимость от m.

Для $m=2^p$ справедливы более точные оценки

$$\|T_{2^p,0}\| \le q_{2^p} < 1, \quad \sum_{i=1}^{2^p} \tau_i \|T_{2^p,i}\| \le \frac{1-q_{2^p}}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_1} \quad (I.13)$$

$$\sum_{i=1}^{2^p} \|T_{2^p,i}\| \le \frac{4}{3\sqrt{\xi}} \quad (I.14)$$

Доказано, что для набора параметров из [7], [8] оценки (I.13) неулучшаемы и (I.14) точна по порядку малости ξ (ср. с леммой 6 из [7]). Также доказано, что для любого n, в частности и для $n=2^p$, нельзя получить более точной, чем (I.13) оценки, как бы мы не упорядочивали множество $\mathfrak{M}_n$.

Мы отметим оценки (I.13), (I.14) как основные характеристики устойчивого набора параметров $\{\tau_k\}$ для случая $n=2^p$.

§ 2. Построение "устойчивого набора параметров" для любого числа итераций.

I. Рассмотрим сначала случай $n=2^p$, $p>0$. Обозначим через $M_1(\beta)$ множество, состоящее из одного элемента:

$$M_1(\beta)=\{-\cos\beta\}$$

Тогда множество $\mathfrak{M}_{2^p}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{M}_{2^p}=\bigcup_{i=1}^{2^p} M_1(\beta_i)=M_1(\beta_1)\cup M_1(\beta_2)\cup\ldots\cup M_1(\beta_{2^p}) \quad (2.I)$$

где $\beta_i=\frac{2i-1}{2^{p+1}}\pi$

Под объединением множеств мы понимаем здесь упорядоченную сумму элементов этих множеств в том порядке, в каком эти множества объединяются.

Заметим, что справедливо следующее равенство

$$\beta_{2^p-i+1}=\pi-\beta_i, \qquad i=1,2,3,\ldots 2^{p-1}$$

Поэтому в (2.I) для каждого β_i $(i=1,2,3,\ldots 2^{p-1})$ найдется соответствующее ему β_{2^p-i+1}

Переупорядочим теперь $\mathfrak{M}_{2^p}$, объединяя $M_1(\beta_i)$ и $M_1(\pi-\beta_i)$. Тогда получим

$$\mathfrak{M}_{2^p}=\bigcup_{i=1}^{2^{p-1}} M_2(\beta_i) \quad (2.2)$$

где $M_2(\beta)=M_1(\beta)\cup M_1(\pi-\beta)$

есть блок из двух элементов

$$M(\beta)=\{-\cos\beta,\ \cos\beta\}$$

Далее заметим, что

$$\beta_{2^{p-1}-i+1}=\frac{\pi}{2}-\beta_i, \quad i=1,2,\ldots 2^{p-2}$$

и переупорядочим $\mathfrak{M}_{2^p}$, описанное формулой (2.2), объединяя

$M_2(\beta)$ и $M_2(\frac{\pi}{2}-\beta)$. Получим

$$\mathfrak{M}_{2^p} = \bigcup_{i=1}^{2^{p-2}} M_4(\beta_i)$$

где

$$M_4(\beta) = M_2(\beta) \cup M_2(\tfrac{\pi}{2}-\beta) = \{-\cos\beta, \cos\beta, -\sin\beta, \sin\beta\}$$

есть блок из 4 элементов.

Замечая, что вообще

$$\beta_{2^{p-k}-i+1} = \frac{\pi}{2^k} - \beta_i \ , \qquad i=1,2,\dots 2^{p-k-1}$$

для $k=0,1,\dots p-1$, продолжим процесс последовательного переупорядочения множества $\mathfrak{M}_{2^p}$.

Тогда в конце получим

$$\mathfrak{M}_{2^p} = M_{2^p}(\beta_1) \ , \qquad \beta_1 = \frac{\pi}{2^{p+1}} \tag{2.3}$$

и множество $M_{2^p}(\beta)$ строится по рекуррентным формулам

$$\begin{gathered} M_{2^k}(\beta) = M_{2^{k-1}}(\beta) \cup M_{2^{k-1}}(\tfrac{\pi}{2^{k-1}} - \beta) \\ M_1(\beta) = \{-\cos\beta\} \end{gathered} \tag{2.4}$$

Упорядочение множества $\mathfrak{M}_{2^p}$ по формуле (2.3) построено в работе [8] и на основе другого подхода в [7]. Оценки устойчивости набора параметров $\{\tau_k\}$, приведенные в п.2 § I для $n=2^p$, соответствуют описанному упорядочению множества $\mathfrak{M}_{2^p}$ по формуле (2.3).

Основной принцип построения множества $\mathfrak{M}_{2^p}$ состоит в выделении блоков $M_{2^k}(\beta)$ и последовательном их укрупнении, причем каждый блок содержит все более мелкие блоки. На этом же принципе базируется и построение устойчивого набора параметров для произвольного числа итераций n.

2. Пусть n – произвольное число целое. Представим его в виде разложения в сумму по степеням 2 с целыми показателями k_i :

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_t} \ , \quad k_j \le k_{j-1} - 1 \ , \quad j = 2,3,\dots t, \quad k_t \ge 0$$

Здесь t – целый индекс. Введем следующие величины

$$n_j = \sum_{i=1}^{j} 2^{k_i - k_j}, \qquad \delta_j = \frac{n_j}{n} 2^{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots t \tag{2.5}$$

и положим $k_{t+1} = -1$. Отметим, что все n_j – нечетные числа.

При упорядочении множества $\mathfrak{M}_n$ будем исходить из минимального

$$\beta = \beta_1 = \frac{\pi}{2n}$$

Образуем следующую сумму множеств

$$M_n(\beta) = \bigcup_{i=1}^{t} M_{2^{k_i}}(n_i\beta) = M_{2^{k_1}}(n_1\beta) \cup M_{2^{k_2}}(n_2\beta) \cup \dots \tag{2.6}$$

$$\cup \dots \cup M_{2^{k_t}}(n_t\beta),$$

где множество $M_{2^k}(\beta)$ определяется рекуррентным образом:

$$M_1(\beta) = \{-\cos\beta\}$$

$$M_{2^k}(\beta) = M_{2^{k-1}}(\beta) \cup M_{2^{k-1}}\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\delta_j - \beta\right) \tag{2.7}$$

для k, удовлетворяющего условиям

$$k_{j+1} + 2 \le k \le k_j + 1, \qquad j = 1, 2, \dots t$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_n = M_n(\beta_1) \tag{2.8}$$

Формула (2.8) задает порядок расположения элементов в множестве $\mathfrak{M}_n$. Тогда устойчивый набор параметров $\{\tau_k\}$ метода Ричардсона строится по формуле (1.9), где μ_k есть k-ый элемент множества $\mathfrak{M}_n$.

Заметим, что упорядочение $\mathfrak{M}_n$ согласно (2.8) является обобщением на случай произвольного n построений, описываемых формулами (2.3), (2.4) для $n = 2^p$.

Действительно, если $n=2^p$, то $t=1$, $k_1=p$, $n_1=1$, $\delta_1=1$ и формула (2.6) переходит в

$$M_n(\beta)=M_{2^p}(\beta)$$

и рекуррентные состношения (2.7), определяющие $M_{2^p}(\beta)$, переходят в формулы (2.4).

Построение множества $\mathfrak{M}_n$ непосредственно по формулам (2.6)-(2.8) неудобно на практике, и мы используем их лишь для компактного описания упорядочения $\mathfrak{M}_n$ и получения оценок устойчивости.

Мы изложим сейчас легко реализуемый алгоритм упорядочения множества $\mathfrak{M}_n$ в соответствии с (2.4).

Пусть θ_m - множества из m целочисленных элементов

$$\theta_m=\{\theta_m(1),\ \theta_m(2),\ \dots\ \theta_m(m)\}$$

Положим $n_{t+1}=2n+1$. Пусть $j=1$. По формулам (2.9), (2.10) строим множества

$$\theta_{n_j}=\{\theta_{n_j}(n_j)=n_j,\ \ \theta_{n_j}(i)=\theta_{n_j-1}(i),\ \ i=1,2,\dots n_j-1\} \quad (2.9)$$

$$\theta_{2m}=\{\theta_{2m}(2i)=4m-\theta_m(i),\ \theta_{2m}(2i-1)=\theta_m(i),\ i=1,2,\dots m\} \quad (2.10)$$

$$m=n_j,\ 2n_j,\ 4n_j,\ \dots\ \left[\frac{n_{j+1}-1}{4}\right],$$

$[a]$ - целая часть a.

Если $j=t$, то необходимое множество θ_n уже построено, иначе полагаем

$$m=\frac{n_{j+1}-1}{2}$$

и строим множества

$$\theta_{2m}=\{\theta_{2m}(2i)=(4m+2)-\theta_m(i),$$
$$\theta_{2m}(2i-1)=\theta_m(i),\ \ i=1,2,\dots\ m\} \quad (2.11)$$

Затем j увеличивается на I и процесс повторяется, начиная с формулы (2.9), в результате будет построено множества θ_n.

Тогда

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ -\cos\beta_i, \ \beta_i = \frac{\pi}{2n}\theta_n(i), \ i=1,2,\dots n \right\}$$

и параметры τ_k находятся по следующей формуле

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1-\rho_0\cos\beta_k}, \ \beta_k = \frac{\pi}{2n}\theta_n(k); \ \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \ \rho_0 = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1} \quad (2.12)$$

Для случая $n=2^p$ формулы (2.9)-(2.II) принимают более простой вид

$$\theta_1 = \{ \theta_1(1) = 1 \}$$

$$\theta_{2m} = \{ \theta_{2m}(2i) = 4m - \theta_m(i), \ \theta_{2m}(2i-1) = \theta_m(i), \ i=1,2,\dots m \}$$

$$m = 1, 2, 4, \dots 2^k, \dots 2^{p-1}$$

Приведем некоторые примеры

$n=8$ $\quad \theta_8 = \{$I, I5, 7, 9, 3, I3, 5, II$\}$

$n=9$ $\quad \theta_9 = \{$I, I7, 7, II, 3, I5, 5, I3, 9$\}$

$n=12$ $\quad \theta_{12} = \{$I, 23, II, I3, 5, I9, 7, I7, 3, 2I, 9, I5$\}$

$n=16$ $\quad \theta_{16} = \{$I, 3I, I5, I7, 7, 25, 9, 23, 3, 29, I3, I9, 5, 27, II, 2I$\}$

$n=18$ $\quad \theta_{18} = \{$I, 35, I7, I9, 7, 29, II, 25, 3, 33, I5, 2I, 5, 3I, I3, 23, 9, 27$\}$

3. Исследование характера итерационного метода очевидно может быть проведено на простейшей модели, так как характер процесса определяется лишь основными функциональными свойствами операторов в гильбертовом пространстве.

Для изучения устойчивости метода Ричардсона с последовательностью параметров $\{\tau_k\}$, построенной в соответствии с упорядочением множества $\mathfrak{M}_n$ по формуле (2.8), проводился численный эксперимент на модельной задаче.

Эксперименты подтвердили, что при использовании предлагавшихся ранее способов упорядочения параметров $\{\tau_k\}$ (см. [I] – [6])метод Ричардсона является численно неустойчивым. Рассматривались различные последовательности параметров, получающиеся из блоков в 4, 8, ... 2^K параметров, при общем числе итераций $n > 2^K$. При этом выяснялся вопрос о том, при каком значении $n = n(K)$ в зависимости от K произойдет потеря точности из-за ошибок округления и наступит аварийный останов (авост) машины вследствие роста промежуточных решений.

Оказалось, что с увеличением $K = 2, 3, \ldots$ растет и число и, при котором происходит потеря скончательной точности, и n авост, при котором происходит останов.

Для произвольного n были получены характерные оценки для метода, то есть определялись величины

$$\|T_{n,0}\|, \quad \sum_{j=1}^{n} \tau_j \|T_{n,j}\|, \quad \sum_{j=1}^{n} \|T_{n,j}\|$$

и было проведено сравнение с известными для случая $n = 2^p$ теоретическими оценками (I.13), (I.14).

Оказалось, что они остаются справедливыми для модельной задачи и в случае, когда n - произвольное число.

Промежуточные решения при этом были ограничены по модулю константой, не зависящей от n, и точность после выполнения n итераций не превосходила теоретически ожидаемую:

$$\|y_n - u\|_D \leq q_n \|y_0 - u\|$$

В наших экспериментах $n \leq 1024$, $\xi \approx 10^{-4} - 10^{-5}$. Более подробное описание экспериментов приведено в [10] .

Использовать набор параметров $\{\tau_k\}$, предложенный в [7], [8] для $n=2^p$, не всегда удобно, так как это может привести для больших $n(\varepsilon, \xi)$ к значительному величению объема работы. Набор параметров, описанный здесь, позволяет применять устойчивый итерационный процесс Ричардсона для любого числа итераций n .

4. Приведем в заключении программу на языке АЛГОЛ, реализующую алгоритм построения набора параметров $\{\tau_k\}$ для произвольного n по формулам (2.I2), (2.9)-(2.II).

Программа оформлена как процедура *PARAMETR* с входными параметрами *G1* , *G2* , *N* , задающими γ_1 , γ_2 и число необходимых итераций n . Выходными значениями являются *EPS* , *TAU* , дающие значение q_n (*EPS* $= q_n$) и массив параметров $\{\tau_k\}$.

Фактический параметр, соответотвующий *EPS* , должен быть описан как действительная переменная; фактический параметр, соотвеотвующий *TAU* – как действительный массив размерности *[1:N]*

```
PROCEDURE PARAMETR (G1, G2, N, EPS, TAU);
VALUE G1, G2, N; REAL G1, G2, INTEGER N;

BEGIN INTEGER ARRAY NU[0:LN(N)/LN(2)+1];
INTEGER I0, I1, I2, I3, I4, I5, T; SWITCH W:=A2, A1;

I1:=N; FOR T:=1,T+1 WHILE I1≠0 DO BEGIN
I0:=I2:=I1; I1:=I1-1;

FOR I3:=I0÷2 WHILE I0=I3+I3 DO BEGIN
I0:=I3; I1:=I1+I1-I2 END; NU[T]:=I0 END;
NU[0]:=N+N-1;
```

```
A1:  T:=T-1; I1:=NU[T]; TAU[I1]:=I1; I0:=1;
     I2:=(NU[T-1]-1)÷4; I3:=4×I1;

L1:  IF I1≤I2 THEN GOTO L2; IF T=1 THEN GOTO L3;
     I3:=I3+2; I0:=2;

L2:  FOR I5:=I1 STEP -1 UNTIL 1 DO BEGIN
     I4:=TAU[I5]; TAU[I5+I5]:=I3-I4;
     TAU[I5+I5-1]:=I4 END; GOTO W[I0];

A2:  I3:=I3+I3; I1:=I1+I1; GOTO L1;

L3:  G2:=2/(G1+G2); G1:=1-G1×G2;
     EPS:=3.14159265359/(N+N);

     FOR I0:=1 STEP 1 UNTIL N DO
     TAU[I0]:=G2/(1-G1×COS(EPS×TAU[I0]));

     G1:=SQRT((1-G1)/(1+G1)); G1:=((1-G1)/(1+G1))↑N;
     EPS:=(G1+G1)/(1+G1×G1) END;
```

Тест: G1 = 1.0, G2 = 16.0, N = 9.

EPS = 0.020 153 345 2

TAU = (0.897 712 926, 0.062 948 278, 0.168 496 286,
0.090 373 829, 0.498 800 516, 0.066 688 049,
0.271 806 127, 0.075 069 963, 0.117 647 059)

Тест просчитан для машины БЭСМ-6.

Цитированная литература

1. М.К.Гавурин. Применение полиномов наилучшего приближения для улучшения сходимости итерационных процессов. Успехи матем. наук, 1950, 5, № 3, стр. 156-160.
2. М.Ш.Бирман. Об одном варианте метода последовательных приближений. Вестн. ЛГУ, 1952, 9, стр. 69-76.
3. D. Young. On Richardson's method for solving linear system with positive diffinite matrics. J. Math and Phys, 1954, 32, № 4, стр 243 - 255.
4. В.Вазов, Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., изд-во ин.лит.1963.
5. В.К.Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Физматгиз, 1960.
6. Д.К.Фадеев, В.Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз. 1963.
7. В.И.Лебедев, С.А.Финогенов. О порядке выбора итерационных параметров в Чебышевском циклическом итерационном методе. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1971, 11, № 2, стр.425-438.
8. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем. Наука, 1971.
9. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциальный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз. 1959.
10. Е.С.Николаев, А.А.Самарский. Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона. Ж.вычисл.матем. и матем. физ., 1972, 12, № 4 (в печати).