Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 6

УДК 518:517.944/.947

МАТЕМАТИКА

А. В. ГУЛИН, член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), A и B — линейные операторы, действующие в H, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, $y_n = y(t_n) \in H$ — функции со значениями в H. Рассмотрим двухслойную разностную схему [3]

$$B\,\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, y_0 \quad \text{задано}, \tag{1}$$

в которой A и B не зависят от n, B^{-1} существует.

Зададим самосопряженный положительный оператор D $((Dx, x) > 0$ для всех $0 \neq x \in H)$ и образуем пространство H_D, состоящее из элементов $y, v, \ldots \in H$ со скалярным произведением $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Схема (1) называется устойчивой в пространстве H_D, если при любых $y_n \in H$ для решения y_{n+1} задачи (1) выполняется неравенство

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_n\|_D, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

В [1, 2] были получены необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (1) в пространствах H_A и H_B в предположении, что хотя бы один из операторов (A или B) является самосопряженным и положительным. Условия устойчивости формулировались в виде неравенств между A и B. Так, если $A^* = A > 0$, то необходимое и достаточное условие устойчивости в H_A имеет вид

$$B_0 \geqslant 0{,}5\,\tau A, \quad B_0 = 0{,}5(B + B^*). \tag{3}$$

В настоящей работе рассматриваются разностные схемы, в которых оба оператора (A и B) являются несамосопряженными.

2. Теорема 1. *Пусть операторы A и B связаны тождеством*

$$B = D + \sigma\tau A, \tag{4}$$

где σ — число, D — самосопряженный положительный оператор.

Тогда, если A^{-1} существует, то необходимым и достаточным условием устойчивости в H_D схемы (1) является условие

$$A_0 + (\sigma_0 - 0{,}5)\tau A^* D^{-1} A \geqslant 0, \quad A_0 = 0{,}5(A + A^*), \quad \sigma_0 = \operatorname{Re}\sigma. \tag{5}$$

Доказательство. Применяя к схеме (1) оператор DA^{-1}, запишем ее в виде

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = 0, \quad y_t = \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}, \quad \tilde{A} = D, \quad \tilde{B} = DA^{-1}B.$$

Условия (3) приводят к неравенству $(DA^{-1}B)_0 \geqslant 0{,}5\,\tau D$, откуда, учитывая (4), получаем

$$D(A^{-1})_0 D + (\sigma_0 - 0{,}5)\tau D \geqslant 0,$$

что эквивалентно (5).

Пример 1. На сетке $\omega_h = \{0, x_1, \ldots, x_N\}$ с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$ дана схема

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a_i\left(\sigma\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h_i} + (1-\sigma)\frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h_i}\right) = 0, \quad y_0^n = 0, \qquad (6)$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$, $n = 0, 1, \ldots$, σ — числовой параметр, $a_i > 0$. Пространство H состоит из действительных функций $y, v, \ldots$, заданных на сетке $\omega_h^+ = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ и снабжено скалярным произведением $(y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i$. Вводя операторы A и B:

$$(Ay)_1 = y_1, \quad (Ay)_i = y_i - y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, N,$$

$$(By)_i = \frac{h_i}{a_i} y_i + \sigma\tau (Ay)_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

запишем (6) в виде (1). Тождество (4) выполнено с $(Dy)_i = h_i y_i / a_i$, а условие устойчивости (5) приводит к неравенству $0{,}5 + (\sigma - 0{,}5)\tau a_i / h_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. При этом справедлива оценка (2), где $\|y\|_D^2 = \sum_{i=1}^{N} h_i y_i^2 / a_i$.

Пример 2. На равномерной сетке $\omega_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ дана схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (7)$$

$$u_N^n = v_0^n = 0.$$

Введем сетку $\omega_h^- = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ и пространство H_1 функций, заданных на ω_h^-, со скалярным произведением $[y, v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h$. Аналогично, H_2 — пространство функций $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$, заданных на $\omega_h^+ = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ со скалярным произведением $(y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h$. Определим операторы $L: H_1 \to H_2$, $L^*: H_2 \to H_1$ следующим образом:

$$(Ly)_i = (y_i - y_{i-1}) / h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (Ly)_N = -y_{N-1} / h,$$

$$(L^*v)_0 = v_1 / h, \quad (L^*v)_i = -(v_{i+1} - v_i) / h, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Эти операторы сопряжены в том смысле, что $(Ly, v] = [y, L^*v)$. Пусть H — прямая сумма пространств H_1 и H_2, $y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\} \in H$, $v = \{v^{(1)}, v^{(2)}\} \in H$. Определим в H скалярное произведение $(y, v) = [y^{(1)}, v^{(1)}) + (y^{(2)}, v^{(2)}]$ и зададим операторы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L^* \\ -L & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\tau L & E \end{pmatrix},$$

где E — единичный оператор. Тогда схему (7) можно записать в виде (1), где $y = \{u, v\} \in H$. Условие (4) выполнено с $\sigma = 0{,}5$ и

$$D = 0{,}5(B + B^*) = \begin{pmatrix} E & -0{,}5\tau L^* \\ -0{,}5\tau L & E \end{pmatrix}.$$

При этом $(Du, u) = [u, u) - \tau(v, Lu] + (v, v]$ и оператор D положителен, если $\tau < h$. Так как A — кососимметричный оператор, то условие устойчивости (5) выполняется со знаком равенства. Следовательно, схема (7) устойчива при $\tau < h$.

3. Рассмотрим факторизованные схемы для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{i} \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \qquad (8)$$

в кубе $0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, с нулевыми граничными условиями. Введем пространство H функций $y(x_j)$, $v(x_j)$, ..., заданных на кубической сетке

$$\omega_h = \{x_j = (j_1 h, \ldots, j_\alpha h, \ldots, j_p h), j_\alpha = 0, 1, \ldots, N\}$$

и равных нулю на ее границе. В H определим скалярное произведение $(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) \bar{v}(x) h^p$. Зададим в H операторы A_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$: $-h^2 A_\alpha y(x_j) = y(j_1 h, \ldots, (j_\alpha + 1)h, \ldots, j_p h) - 2y(x_j) + y(j_1 h, \ldots, (j_\alpha - 1)h, \ldots, j_p h)$.

Операторы A_α являются положительно определенными и попарно перестановочными.

Пример 3. Исключение промежуточных значений из локально-одномерной схемы ([3]), построенной для (8), приводит к факторизованной схеме

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E - i\tau A_\alpha) y_{n+1} = y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (9)$$

которую можно записать в виде (1) с

$$B = \prod_{\alpha=1}^{p} (E - i\tau A_\alpha), \quad A = (B - E)/\tau.$$

Условие (4) выполнено с $D = E$, $\sigma = 1$. Неравенство (5) принимает вид $B^* B \geqslant E$ и выполняется при любых τ и h. Схема (9) абсолютно устойчива в H.

Следующий пример показывает, что условие $D > 0$ в теореме 1 не является необходимым для устойчивости.

Пример 4. Аналогом схемы Писмена — Рекфорда для уравнения (8) при $p = 2$ является схема

$$(E - 0{,}5i\tau A_1)(E - 0{,}5i\tau A_2) y_{n+1} = (E + 0{,}5i\tau A_1)(E + 0{,}5i\tau A_2) y_n, \qquad (10)$$

для которой $A = -i(A_1 + A_2)$, $B = (E - 0{,}5i\tau A_1)(E - 0{,}5i\tau A_2)$. Тождество (4) выполнено с $\sigma = 0{,}5$ и $D = E - (\tau^2/4) A_1 A_2$. Оператор D положителен лишь при $\tau < 0{,}5h^2$. Вместе с тем схема (10) абсолютно устойчива в H. Действительно, записывая (10) в виде $y_{n+1} = S y_n$, получаем $S^* S = E$, т. е. $\|y_{n+1}\| = \|y_n\|$.

4. Имеются схемы, неустойчивые в смысле (2) при любом операторе $D^* = D > 0$. Покажем, что не существует оператора $D^* = D > 0$ такого, что схема:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad A^* = -A, \quad A^{-1} \text{ существует}, \qquad (11)$$

была бы устойчивой в H_D. Применим к (11) оператор D и воспользуемся теоремой 1. Условие (4) выполнено с $\sigma = 0$, а неравенство (5) принимает вид

$$DA - AD \geqslant \tau A^* D A. \qquad (12)$$

Так как $D > 0$ и A^{-1} существует, то в правой части (12) находится положительный оператор. Вместе с тем левая часть (12) представляет собой коммутатор двух операторов и не может быть положительной (след $DA - AD$ равен нулю, см. ([4]), задача 473).

5. Расширим определение устойчивости. Именно, вместо (2) будем требовать

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \rho \|y_n\|_D, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

с какой-либо постоянной ρ (такой, что ρ^n ограничено при всех n). Требование (13) с $D = E$ для схемы (11) эквивалентно выполнению неравенства

$$(\rho^2 - 1)E \geqslant \tau^2 A^* A$$

или $\tau^2\|A\|^2 \leqslant \rho^2 - 1$. Это условие выполнено, если

$$\tau\|A\|^2 \leqslant c_0^2, \qquad c_0 = \mathrm{const}, \tag{14}$$

и $\rho = 1 + 0{,}5c_0^2\tau$.

Аналогично доказывается, что схема $(y_{n+1} - y_n)/\tau + A(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n) = 0$, $A^* = -A$, где σ — действительный параметр, абсолютно устойчива в H с постоянной $\rho = 1$ при $\sigma \geqslant 0{,}5$ и устойчива в H при условии (14) с постоянной $\rho = 1 + (0{,}5 - \sigma)c_0^2\tau$, если $\sigma < 0{,}5$.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [2] А. В. Гулин, А. А. Самарский, ДАН, 181, № 5, 1042 (1968). [3] А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1971. [4] Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, М.— Л., 1952.