Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 517.949.21 — МАТЕМАТИКА

Е. С. НИКОЛАЕВ, член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ЛЮБОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

Предлагается новая разностная схема повышенного порядка точности $O(|h|^4)$ для уравнения Пуассона в p-мерном параллелепипеде, обладающая свойством сильной эллиптичности при любом $p \geqslant 2$. Для ее решения применяются итерационные методы переменных направлений и попеременно-треугольный с чебышевским и циклическим наборами параметров. Сравнение с предлагавшимися ранее [1-5] методами показывает, что рассмотренные здесь методы позволяют существенно уменьшить число итераций, необходимых для достижения заданной точности.

1. Для уравнения Пуассона в p-мерном параллелепипеде $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)\colon 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ рассматривается задача Дирихле

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u = f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = g(x), \quad L_\alpha u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \qquad (1)$$

Пусть $\overline{\omega}_h$ — прямоугольная сетка в $\overline{G}$, $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$ — шаг сетки, $\gamma = \{x_i \in \Gamma\}$ — граница $\overline{\omega}_h$. Пусть $A_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$,— разностная аппроксимация на ω_h оператора L_α, $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$ (обозначения см. [1]).

Для аппроксимации задачи (1) рассмотрим разностную схему

$$A'y = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod_{\beta\neq\alpha}^{1\div p} (E - \varkappa_\beta A_\beta) A_\alpha y = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_\gamma = g(x), \qquad (2)$$

где

$$\varphi = f - \sum_{\alpha=1}^{p} \varkappa_\alpha A_\alpha f.$$

Схема (2) аппроксимирует задачу (1) при $\varkappa_\alpha = h_\alpha^2 / 12$, $\alpha = 1, \ldots, p$ с погрешностью $O(|h|^4)$, $|h|^2 = h_1^2 + \ldots + h_p^2$. При $p = 2$ она переходит в известную (см., например, [1, 5, 8]). При $\varkappa_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, схема (2) имеет обычный порядок аппроксимации $O(|h|^2)$.

Теорема 1. *Разностная схема* (2) *при* $\varkappa_\alpha = h_\alpha^2 / 12$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, *эллиптична при любом* $p \geqslant 2$ *и сходится в норме сеточных пространств* L_2 *и* W_2^1 *со скоростью* $O(|h|^4)$. *При* $p \leqslant 3$ *схема сходится с той же скоростью в равномерной метрике.*

2. Для решения задачи (2) предлагается следующий итерационный процесс переменных направлений:

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E + (\omega_{k+1} - \varkappa_\alpha) A_\alpha) \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau_{k+1}} + A'v_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (3)$$

с произвольным v_0 и параметрами $\{\tau_k\}$, $\{\omega_k\}$. Для нахождения v_{k+1} можно воспользоваться, например, алгоритмом ([1]):

$$(E+(\omega_{k+1}-\varkappa_1)A_1)w_{(1)}+A'v_k=\varphi,$$

$$(E+(\omega_{k+1}-\varkappa_\alpha)A_\alpha)w_{(\alpha)}=w_{(\alpha-1)},\quad w_{(\alpha)}|_{\gamma_\alpha}=0,\quad \alpha=2,3,\ldots,p,$$

$$v_{k+1}=v_k+\tau_{k+1}w_{(p)}.$$

Задачу построения набора итерационных параметров $\{\omega_k\}$ и $\{\tau_k\}$ для схемы (3) сведем к нахождению параметров следующего итерационного процесса:

$$\widetilde{B}_{k+1}\frac{v_{k+1}-v_k}{\tau_{k+1}}+\widetilde{A}v_k=\widetilde{\varphi},\quad \widetilde{B}_k=\prod_{\alpha=1}^{p}(E+\omega_k\widetilde{A}_\alpha),\quad \widetilde{A}=\sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha, \tag{4}$$

где $\widetilde{A}_\alpha$ — самосопряженные попарно перестановочные операторы с границами $\tilde{a}_\alpha=a_\alpha/(1-\varkappa_\alpha a_\alpha)$, $\tilde{b}_\alpha=b_\alpha/(1-\varkappa_\alpha b_\alpha)$ $(a_\alpha=4h_\alpha^{-2}\sin^2(\pi h_\alpha/2l_\alpha)$, $b_\alpha=4h_\alpha^{-2}\cos^2(\pi h_\alpha/2l_\alpha))$.

Итерационный процесс (3) является обобщением метода, предложенного в ([7], [8]) для $p=2$. Схема (4) есть аналог итерационного процесса для разностной задачи (2) второго порядка точности.

3. Переходим к обоснованию метода. Схема (2) трактуется как операторное уравнение в пространстве H сеточных функций, заданных на ω_h, со скалярным произведением $(u,v)=\sum_{x\in\omega_h}u(x)v(x)h_1\ldots h_p$.

Тогда операторы A_α обладают следующими свойствами ([7]):

I. A_α — положительные, самосопряженные в H операторы с границами a_α и b_α, так что $a_\alpha E\leqslant A_\alpha\leqslant b_\alpha E$, где a_α и b_α определены выше.

II. A_α попарно перестановочны для $\alpha=1,2,\ldots,p$.

III. Операторы $\widetilde{A}_\alpha=(E-\varkappa_\alpha A_\alpha)^{-1}A_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, самосопряжены в H, попарно перестановочны и имеют границы $\tilde{a}_\alpha$ и $\tilde{b}_\alpha$.

Из свойств I—III следует эквивалентность (3) схеме (4) с

$$\widetilde{\varphi}=\prod_{\alpha=1}^{p}(E-\varkappa_\alpha A_\alpha)^{-1}\varphi.$$

4. Для схемы (4) предлагаются два набора параметров: 1) метод переменных направлений с чебышевским набором параметров $\{\tau_k\}$ (п.н.ч.).

Пусть $\omega_k=\omega$ и $\tilde{\gamma}_1\widetilde{B}\leqslant\widetilde{A}\leqslant\tilde{\gamma}_2\widetilde{B}$, $\tilde{\gamma}_1>0$. Тогда

$$\tau_k=\tau_0/(1+\rho_0\mu_k),\quad \mu_k\in\mathfrak{M}_n=\left\{\cos\frac{2i-1}{2n}\pi,\quad i=1,2,\ldots,n\right\},$$
$$k=1,2,\ldots n, \tag{5}$$

$$\tau_0=2/(\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2),\quad \rho_0=(1-\tilde{\xi})/(1+\tilde{\xi}),\quad \tilde{\xi}=\tilde{\gamma}_1/\tilde{\gamma}_2.$$

Порядок использования параметров μ_k и, следовательно, τ_k, при котором метод численно устойчив, указан для любого n в ([10], [11]).

Найдем $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ для схемы (4) и оптимальное значение ω. Пусть $\tilde{a}_0=\min_\alpha\tilde{a}_\alpha$; $\tilde{b}_0=\max\tilde{b}_\alpha$, $\eta=\tilde{a}_0/\tilde{b}_0$, $j=[p/(1-\eta)-\tilde{\eta}^{1/p}/(1-\tilde{\eta}^{1/p})]$, где $[c]$ — целая часть c. По аналогии с ([2])

$$\omega = (1 - \tilde{\eta}^{1/p}) / (\tilde{\eta}^{1/p} - \tilde{\eta}), \quad \tilde{\gamma}_1 = p\tilde{b}_0 (1 + \omega \tilde{b}_0)^{-p},$$
$$\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_1 \left(1 - \frac{j}{p}(1 - \tilde{\eta})\right) \tilde{\eta}^{-j/p}.$$

Чтобы уменьшить норму начальной погрешности $z_0 = v_0 - y$ в пространстве H в $1/\varepsilon$ раз, достаточно $n \geqslant n(\varepsilon)$ итераций:

$$n(\varepsilon) = \ln 0{,}5\, \varepsilon \cdot (\ln \rho_1)^{-1}, \quad \rho_1 = (1 - \sqrt{\xi}) / (1 + \sqrt{\xi}). \tag{6}$$

Замечание. Если $p = 3$, то $j = 2$ и $n = O\left(h^{-2/3} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right)$, для $p = 4$ и $\tilde{\eta} \leqslant 0{,}187$ $j = 3$ и $n = O\left(h^{-3/4} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right)$, где $h = \min\limits_{\alpha} h_\alpha$.

2) Метод переменных направлений с циклическим набором параметров $\{\tau_k\}$ (п.н.ц.). Предлагается улучшенный по сравнению с ([1, 5]) набор параметров: $\omega_k = \sigma\tau_k$, $\tau_1 = mp(\sigma\tilde{a}q)^{-1}$, $\tau_{j+1} = q\tau_j$, $j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, где m, $\sigma > 0$, $0 < q < 1$,— постоянные, подлежащие определению, $\tilde{a} = \tilde{a}_1 + \ldots + \tilde{a}_p$, $\tilde{b} = \tilde{b}_1 + \ldots + \tilde{b}_p$, $\tilde{\eta} = \tilde{a}/\tilde{b}$ и n_0 — целое число, удовлетворяющее оценкам $\ln q^2\tilde{\eta} \cdot (\ln q)^{-1} \leqslant n_0 < \ln q^3\tilde{\eta} \cdot (\ln q)^{-1}$.

После выполнения одного цикла из n_0 итераций справедлива оценка $\|v_{n_0} - y\| \leqslant \rho(\sigma, m, q) \|v_0 - y\|$. Для уменьшения нормы начальной погрешности в $1/\varepsilon$ раз достаточно выполнить k_0 циклов, где $k_0 = \ln \varepsilon / \ln \rho$. При этом общее число итераций $n = n_0 k_0$ удовлетворяет оценкам ($\nu_0 = \ln^{-1} q \ln^{-1} \rho$)

$$\nu_0 \ln q^2\tilde{\eta} \cdot \ln \varepsilon \leqslant n_0 < \nu_0 \ln q^3\tilde{\eta} \cdot \ln \varepsilon.$$

Из условия минимизации ν_0 находятся σ, m, q: $p = 3$, $\sigma = 0{,}5625$, $m = 0{,}082347$, $q = 0{,}16489$, $\rho = 0{,}12986$, $\nu_0 = 0{,}2716$; $p = 4$, $\sigma = 0{,}5365$, $m = 0{,}062721$, $q = 0{,}18816$, $\rho = 0{,}12599$, $\nu_0 = 0{,}2890$.

Замечание. Для метода п.н.ц.

$$n(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad h = \min_{\alpha} h_\alpha.$$

5. Для решения задачи (2) предлагается попеременно-треугольный итерационный процесс ([9]) с чебышевским набором параметров (п.т.ч.):

$$B \frac{v_{k+1} - v_k}{\tau_{k+1}} + A' v_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$
$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_1 y = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{-1} y_{\bar{x}_\alpha}, \quad R_2 y = -\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{-1} y_{x_\alpha}, \tag{7}$$

так что $R_1 = R_2^*$, $R_1 + R_2 = A$ и $B = B^*$. Параметры τ_k выбираются согласно (5), где $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ заменены на указанные ниже постоянные γ_1 и γ_2: $\gamma_1 = c_1 \mathring{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2 \mathring{\gamma}_2$, $\mathring{\gamma}_1 = a/2(1 + \sqrt{\eta})$, $\mathring{\gamma}_2 = a/4\sqrt{\eta}$, $a = a_1 + \ldots + a_p$, $\eta = a\left(4 \sum\limits_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^{-2}\right)^{-1}$, $c_1 = (1 - \varkappa_0 b_0)^{p-1}$, $c_2 = (1 - \varkappa_0 a_0)^{p-1}$, где $\varkappa_0 a_0 = \min\limits_{\alpha} \varkappa_\alpha a_\alpha$, $\varkappa_0 b_0 = \max\limits_{\alpha} \varkappa_\alpha b_\alpha$.

Оптимальное значение $\omega = 2\sqrt{\eta} / a$. Число итераций $n(\varepsilon)$ дается формулой (6).

Замечание. Для метода п.т.ч. для любого p $n(\varepsilon) = O\left(h^{-1/2} \ln \frac{2}{\varepsilon}\right)$.

6. Построенные итерационные методы, как мы видели, имеют различные асимптотические оценки числа итераций $n(\varepsilon)$. Ниже проводится их сравнение на реальных сетках ($h_\alpha = h$, $N_\alpha = N$, $l_\alpha = 1$, $\alpha = 1, \ldots, p$) для $\varepsilon = 10^{-6}$ и некоторых значений N при $p = 3$ для задачи (2) второго

порядка точности ($\varkappa_\alpha = 0$). В скобках даны значения $n(\varepsilon)$ для схемы 4-го порядка точности ($\varkappa_\alpha = h_\alpha^2/12$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$):

N	10	20	30	50	60	80
П. н. ц.	35 (35)	35 (42)	42 (42)	42 (49)	49 (49)	49 (49)
П. н. ч.	14 (16)	23 (26)	30 (34)	42 (48)	48 (55)	58 (66)
П. т. ч.	13 (20)	19 (28)	23 (34)	29 (44)	32 (48)	37 (56)

Видно, что для схемы 2-го порядка точности для реальных значений N попеременно-треугольный метод (п.т.ч.) является наилучшим; он требует в 1,5—2 раза меньше итераций, чем метод п.н.ц., и в 2,5—3 раза, чем циклические методы из ([1], [5]). Для расчета одного итерационного шага метод п.т.ч. требует примерно в 1,25 раз меньше арифметических операций, чем методы п.н.ц. и п.н.ч.

Для схемы повышенного порядка точности $O(|h|^4)$ метод п.н.ч. является лучшим для малых значений N ($N < 40$), метод п.т.ч. — для $40 < N < 60$ и циклический метод п.н.ц. — для $N > 60$. Расчеты показывают, что при $p = 4$ для $N < 40$ лучшим является метод п.н.ч для $N > 40$ — метод п.н.ц. Предлагаемый здесь циклический метод п.н.ц. при $p = 3$ требует для схемы $O(|h|^4)$ в 5—6 раз меньше итераций, чем циклические методы из ([1], [5]).

В заключение отметим, что схема (2) может быть обобщена на случай третьей краевой задачи в p-мерном параллелепипеде (для $p = 2$, см. ([12])).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 21 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, В. Б. Андреев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 4, № 6 (1964). [2] J. Guittet, J. Math. Anal. Appl., 17, № 2 (1967). [3] G. Fairweather, A. R. Gourlay, A. R. Mitchell, Numer. Math., 10, № 1 (1967). [4] A. Hadjidimos, J. Inst. Math. Appl., 6, № 3 (1970). [5] A. Hadjidimos, Comp. J., 14, № 2 (1971). [6] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 143, № 1 (1962). [7] А. А. Самарский, ДАН, 179, № 3 (1968). [8] A. R. Mitchell, G. Fairweather, Numer. Math., 6, № 4 (1964). [9] А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, «Наука», 1971. [10] Е. С. Николаев, А. А. Самарский, Журн. вычислит. математ. и матем. физ., 12, № 4 (1972). [11] В. И. Лебедев, С. А. Финогенов, В сборн. Вычислительные методы линейной алгебры, Новосибирск, 1972. [12] И. В. Фрязинов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 2 (1971).