УДК 517.864

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ИНТЕГРАЛОВ

А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ, А. А. АРСЕНЬЕВ

(Москва)

Предложен метод асимптотической оценки интегралов с ядром типа δ-функции.

В работах [1-3] при решении задачи об отыскании асимптотики определенных интегралов с ядром типа δ-функции встретилась специфическая трудность, которая состоит в том, что почленное интегрирование асимптотического выражения для подынтегральной функции приводит к формально бесконечным коэффициентам асимптотики интеграла. Такая ситуация характерна для многих асимптотических задач.

Для преодоления указанной трудности в [1-3] был разработан специальный метод асимптотической оценки интегралов. Предложенный метод опирается на выведенные в [1-3] рекуррентные соотношения и применим во многих других задачах, в связи с чем представляется целесообразным дать независимое изложение этого метода.

§ 1. Асимптотика интегралов по конечному промежутку

Сначала мы рассмотрим задачу о вычислении асимптотики при $h \to 0$ интеграла

$$I(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \omega\left(\frac{x}{h}\right) f(x)\,dx. \tag{1}$$

Будем предполагать, что ядро $\omega(x)$ и функция $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. Функция $\omega(x)$ интегрируема на любом конечном интервале и при $x \to \infty$ имеет асимптотику

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n(x)}{x^n} + \bar{\omega}_m(x), \qquad 1 \leqslant m \leqslant N,$$

где $x^m \bar{\omega}_m(x) \to 0$ при $x \to \infty$,

$$\int_a^\infty |x^{m-1}\bar{\omega}_m(x)|\,dx < \infty, \qquad a > 0.$$

Функции $q_n(x)$ будем предполагать интегрируемыми на каждом конечном интервале.

Условие 2. Функция $f(x)$ имеет N правых производных в точке $x = 0$, ограничена и интегрируема на интервале $[0, 1]$.

Для каждого m, $0 \leqslant m < N$, мы определим функции

$$F_{m+1}(x) = \frac{F_m(x) - F_m(0)}{x}, \qquad F_0(x) = f(x),$$

$$\omega_{m+1}(x) = x\omega_m(x) - q_{m+1}(x), \qquad \omega_0(x) = \omega(x), \tag{2}$$

$$I_m(h) = \frac{1}{h}\int_0^1 \omega_m\left(\frac{x}{h}\right) F_m(x)\,dx,$$

$$C_m(h)=\int_0^1 q_{m+1}\left(\frac{x}{h}\right)F_{m+1}(x)\,dx,$$

(2)

$$B_m(h)=\frac{1}{h}\int_0^1 \omega_m\left(\frac{x}{h}\right)dx.$$

Условия 1 и 2 обеспечивают корректность определений (2), причем справедливы формулы

$$F_m(0)=\frac{f^{(m)}(0)}{m!},\qquad F_m(x)=\frac{1}{x^m}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right],$$

(3)

$$\omega_m(x)=x^m\overline{\omega}_m(x).$$

Лемма 1. *Справедлива оценка*

(4) $$|hI_m(h)|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0,\qquad 0\leqslant m<N.$$

Доказательство. В силу условия 1,

$$x^m\overline{\omega}_m(x)=\omega_m(x)\to 0,\qquad x\to\infty,$$

поэтому

$$\frac{1}{x}\int_0^x|\omega_m(t)|\,dt\to 0,\qquad x\to\infty,$$

и

$$|hI_m(h)|=\left|\int_0^1\omega_m\left(\frac{x}{h}\right)F_m(x)\,dx\right|\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|F_m(x)|\,h\int_0^{1/h}|\omega_m(t)|\,dt\to 0,\qquad h\to 0.$$

Теорема 1. *Справедлива рекуррентная формула*

(5) $$I_m(h)=F_m(0)B_m(h)+C_m(h)+hI_{m+1}(h),\qquad 0\leqslant m<N,\qquad h>0.$$

В самом деле,

$$I_m(h)=\frac{1}{h}\int_0^1\omega_m\left(\frac{x}{h}\right)F_m(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_0^1\omega_m\left(\frac{x}{h}\right)[xF_{m+1}(x)+F_m(0)]\,dx=$$

$$=F_m(0)B_m(h)+\frac{1}{h}\int_0^1\frac{\omega_{m+1}(x/h)+q_{m+1}(x/h)}{(x/h)}xF_{m+1}(x)\,dx=$$

$$=F_m(0)B_m(h)+\int_0^1\omega_{m+1}\left(\frac{x}{h}\right)F_{m+1}(x)\,dx+$$

$$+\int_0^1 q_{m+1}\left(\frac{x}{h}\right)F_{m+1}(x)\,dx=F_m(0)B_m(h)+C_m(h)+hI_{m+1}(h).$$

Итак, равенство (5) доказано. Из (4) и (5) вытекает

Теорема 2. *Если выполнены условия 1 и 2, то справедлива асимптотическая оценка*

$$I(h)=\sum_{m=0}^{N-1}[F_m(0)B_m(h)+C_m(h)]\,h^m+h^{N-1}\rho(h),\qquad \rho(h)\to 0,\qquad h\to 0. \tag{6}$$

В предлагаемом методе вычисления асимптотики интегралов формула (6) является основной. Она позволяет свести задачу о вычислении асимптотики интеграла (1) к вычислению асимптотики интегралов $B_m(h)$ и $C_m(h)$. Отметим, что интеграл $B_m(h)$ зависит только от ядра $\omega(x)$, а интеграл $C_m(h)$ — только от одного коэффициента $q_{m+1}(x)$ и функции $f(x)$.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда все коэффициенты $q_m(x)$ постоянны:

$$q_m(x)\equiv q_m=\text{const}.$$

Тогда

$$C_m(h)=q_{m+1}\int_0^1 F_{m+1}(x)\,dx,$$

а асимптотика интегралов $B_m(h)$ считается так:

$$B_m(h)=\int_0^{1/h}\omega_m(t)\,dt=\int_0^1\omega_m(t)\,dt+\int_1^{1/h}\left[\omega_m(t)-\frac{q_{m+1}}{t}\right]dt-q_{m+1}\ln h=$$

$$=\int_0^1\omega_m(t)\,dt+\int_1^{\infty}\left(\omega_m(t)-\frac{q_{m+1}}{t}\right)dt-q_{m+1}\ln h+\int_{\infty}^{1/h}\left(\frac{q_{m+2}}{t^2}+\ldots\right)dt.$$

Так как

$$\left|\int_{\infty}^{1/h}t^m\overline{\omega}_N(t)\,dt\right|\leqslant h^{N-1-m}\int_{\infty}^{1/h}|t^{N-1}\overline{\omega}_N(t)|\,dt=h^{N-1-m}\rho(h),$$

то

$$B_m(h)=\int_0^1\omega_m(t)\,dt+\int_1^{\infty}\left(\omega_m(t)-\frac{q_{m+1}}{t}\right)dt- \tag{7}$$

$$-q_{m+1}\ln h+q_{m+2}h+\frac{1}{2}q_{m+3}h^2+\ldots+h^{N-1-m}\rho(h),\qquad h\to 0.$$

Подставив формулу (7) в (5), получим следующую теорему.

Теорема 3. *Если функции $\omega(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям 1 и 2, причем все коэффициенты $q_m(x)$ постоянны, то интеграл (1) при $h\to 0$ имеет следующую асимптотику:*

$$I(h)=\sum_{m=0}^{N-1}\left[-q_{m+1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\ln h+\left(\int_0^1\omega_m(x)\,dx+\right.\right. \tag{8}$$

$$\left.+\int_1^{\infty}\left(\omega_m(x)-\frac{q_{m+1}}{x}\right)dx\right)\frac{f^{(m)}(0)}{m!}+q_{m+1}\left(\int_0^1F_{m+1}(x)\,dx-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!\,(m-k)}\right)\right]h^m+h^{N-1}\rho(h),\qquad \rho(h)\to 0,\qquad h\to 0.$$

Формула (8) впервые была получена в [1-2].

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда

$$q_m(x) = \beta_m + \sum_{k=1}^{k_m} \beta_{k,m} x^{-\alpha_{k,m}}, \qquad 0 < \alpha_{k,m} < 1.$$

В этом случае

$$C_m(h) = \beta_{m+1} \int_0^1 F_{m+1}(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k_{m+1}} \beta_{k,m+1} h^{\alpha_{k,m+1}} \int_0^1 \frac{F_{m+1}(x)}{x^{\alpha_{k,m}}}\,dx,$$

а асимптотика интеграла $B_m(h)$ легко вычисляется из равенства

$$B_m(h) = \int_0^1 \omega_m(x)\,dx + \int_1^\infty \left(\omega_m(x) - \frac{\beta_{m+1}}{x} \right) dx - \beta_{m+1} \ln h +$$

$$+ \int_\infty^{1/h} \left(\frac{q_{m+1} - \beta_{m+1}}{x} + \frac{q_{m+2}}{x^2} + \ldots \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \omega_m(x)\,dx + \int_1^\infty \left(\omega_m(x) - \frac{\beta_{m+1}}{x} \right) dx - \beta_{m+1} \ln h +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_m} \frac{\beta_{k,m+1}}{\alpha_{k,m+1}} h^{\alpha_{k,m+1}} + \beta_{m+2} h + \ldots .$$

Общая формула для последнего случая получается довольно громоздкой, и мы не будем ее выписывать.

Особо отметим случай, когда $q_1 = \mathrm{const}$ и функция $f(x)$ лишь непрерывна справа. Тогда рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют утверждать, что

$$I(h) = \left[-q_1 \ln h + \int_0^1 \omega(x)\,dx + \int_1^\infty \left(\omega(x) - \frac{q_1}{x} \right) dx \right] f(+0) + o(1).$$

§ 2. Асимптотика интегралов по бесконечному промежутку

1. Общий случай. Рассмотрим теперь интегралы вида

$$I(h) = \frac{1}{h} \int_0^\infty \omega\left(\frac{x}{h} \right) f(x)\,dx. \tag{9}$$

Предположим, что функция $\omega(x)$ удовлетворяет прежним ограничениям, а функция $f(x)$ дополнительно удовлетворяет следующему условию.

Условие 3. Функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке, ограничена на $[0, \infty)$, и при любом $h > 0$ конечны интегралы

$$\left| \int_1^\infty q_{m+1}\left(\frac{x}{h} \right) \frac{f(x)}{x^m}\,dx \right| < \infty, \qquad 0 \leqslant m < N.$$

Справедлива

Теорема 4. *Если выполнены условия 1—3, то для интеграла* (9) *справедлива асимптотическая оценка*

$$I(h)=\sum_{m=0}^{N-1}\left[F_m(0)B_m(h)+C_m(h)+\int_1^\infty q_{m+1}\left(\frac{x}{h}\right)f(x)x^{-m}\,dx\right]h^m+ \tag{10}$$
$$+h^{N-1}\rho(h).$$

Доказательство. Интеграл (9) разобьем на два:

$$I(h)=\frac{1}{h}\int_0^1\omega\left(\frac{x}{h}\right)f(x)\,dx+\frac{1}{h}\int_1^\infty\omega\left(\frac{x}{h}\right)f(x)\,dx.$$

Во втором интеграле заменим ядро $\omega(x)$ его асимптотикой, а асимптотику первого интеграла найдем по формуле (6). Если все коэффициенты $q_m(x)$ постоянны (случай, рассмотренный в [1,2]), то из (8) и (10) мы получаем, что верна

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 3, *а* $f(x)$ *интегрируема и ограничена на* $[1,\infty)$, *то для интеграла* (9) *справедлива оценка*

$$I(h)=\sum_{m=0}^{N-1}\left[-\left(q_{m+1}\ln h+\int_0^1\omega_m(x)\,dx+\int_1^\infty\left(\omega_m(x)-\frac{q_{m+1}}{x}\right)dx\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{f^{(m)}(0)}{m!}+q_{m+1}P_m(f)\right]h^m+h^{N-1}\rho(h),\qquad \rho(h)\to 0,\qquad h\to 0, \tag{11}$$
$$P_m(f)=\int_0^1\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]x^{-m}\,dx+\int_1^\infty\frac{f(x)}{x^m}\,dx-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!(m-k)}.$$

Если функция $f(x)$ имеет N непрерывных производных на интервале $[0,\infty)$, причем

$$|x^N f^{(m)}(x)|\to 0,\qquad x\to\infty,\qquad 0\leqslant m<N,$$

то функционал $P_m(f)$ принимает вид

$$P_m(f)=\frac{1}{m!}\left[\int_0^1\frac{f^{(m)}(x)-f^{(m)}(0)}{x}\,dx+\int_1^\infty\frac{f^{(m)}(x)}{x}\,dx+f^{(m)}(0)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu}\right].$$

2. Специальный случай. Если при каждом m конечны интегралы

$$B_m^\circ=\int_0^\infty\omega_m(x)\,dx,$$

то для вычисления асимптотики интеграла (9) применим и другой метод. Положим

$$I_m^\circ(h)=\frac{1}{h}\int_0^\infty\omega_m\left(\frac{x}{h}\right)F_m(x)\,dx,\qquad C_m^\circ(h)=\int_0^\infty q_{m+1}\left(\frac{x}{h}\right)F_{m+1}(x)\,dx.$$

Нетрудно видеть, что введенные интегралы существуют и связаны рекуррентной формулой

$$I_m^*(h)=\frac{f^{(m)}(0)}{m!}B_m^*+C_m^*(h)+h\mathring{I}_{m+1}(h). \tag{12}$$

Для доказательства формулы (12) достаточно доказать сходимость при каждом m интеграла $I_m^*(h)$, так как тогда сама рекуррентная формула и сходимость интеграла $C_m^*(h)$ будут следствием рекуррентных соотношений между функциями $\omega_m(x)$, $q_m(x)$, $F_m(x)$. Однако в силу ограниченности функции $f(x)$ при каждом $h>0$ справедлива оценка

$$F_m(hx)=O(1/xh), \qquad x\to\infty, \tag{13}$$

а интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{|\omega_m(x)|}{x}\,dx$, $a>0$, сходится в силу условия 1. Теперь докажем, что

$$|hI_N^*(h)|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{14}$$

В самом деле, в силу (13) имеем

$$|hI_N^*(h)|=\left|h\int\limits_0^a F_N(ht)\omega_N(t)\,dt+\int\limits_a^\infty (htF_N(ht))\frac{\omega_N(t)}{t}\,dt\right|\leqslant \tag{14'}$$

$$\leqslant h\int\limits_0^a |F_N(ht)|\,|\omega_N(t)|\,dt+\max_{a\leqslant t<\infty} ht|F_N(ht)|\int\limits_a^\infty \frac{|\omega_N(t)|}{t}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c_1h\int\limits_0^a |\omega_N(t)|\,dt+c_2\int\limits_a^\infty \frac{|\omega_N(t)|}{t}\,dt, \quad c_1=\text{const}\geqslant 0, \quad c_2=\text{const}>0.$$

Выбирая сначала a достаточно большим, а потом h достаточно малым, мы сможем сделать правую часть (14′) меньше любого положительного ε. Из (12), (14) следует

Теорема 6. *Если выполнены условия* 1—3 *и интегралы*

$$\int\limits_0^\infty \omega_m(x)\,dx, \qquad m=0,1,\ldots,$$

конечны, то справедлива оценка

$$I(h)=\sum_{m=0}^{N-1}\left[\frac{f^{(m)}(0)}{m!}B_m^*+C_m^*(h)\right]h^m+h^{N-1}\rho(h), \quad \rho(h)\to 0 \text{ при } h\to 0. \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим интеграл $I(h)$, ядро которого при $x\to\infty$ имеет асимптотику

$$\omega(x)=\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\left(a_1+\frac{a_2}{x}+\ldots\right). \tag{16}$$

Здесь

$$q_m(x)=a_m\sqrt{x}\,e^{ix}, \qquad \omega_m(x)=a_{m+1}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right), \qquad x\to\infty,$$

и применима формула (15). Коэффициенты $C_m(h)$ в нашем случае даются интегралами

$$C_m(h)=a_{m+1}h^{-1/2}\int\limits_0^\infty e^{ix/h}\sqrt{x}\,F_{m+1}(x)\,dx,$$

асимптотику которых легко получить по известным формулам (см. [3], стр. 61) либо непосредственно из рекуррентного соотношения

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix/h}}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{ix/h}}{\sqrt{x}} [f(x) - f(0)]\,dx + f(0)\sqrt{(\pi i h)} =$$

$$= f(0)\sqrt{(\pi i h)} + ih \int_0^\infty \frac{e^{ix/h}}{\sqrt{x}} \left[f'(x) - \frac{1}{2}\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] dx.$$

Простые вычисления дают

$$C_m(h) = a_{m+1}\sqrt{(\pi i)} \left[f^{(m)}(0) + \sum_{k=1}^{N-m-1} \frac{0.5\cdot 1.5\ldots(k-0.5)}{k!} f^{(k+m)}(0)\,(ih)^k \right] + h^{N-m-0.5}\rho(h).$$

Подставляя эту формулу в (15), мы получаем (см. [4]) следующую теорему.

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям* 1—3 *и ядро* $\omega(x)$ *имеет асимптотику* (16), *то интеграл* (9) *имеет следующую асимптотику при* $h \to 0$:

$$I(h) = \sum_{m=0}^{N-1} D_m \frac{f^{(m)}(0)}{m!} h^m + h^{N-1}\rho(h), \qquad \rho(h)\to 0, \quad h \to 0,$$

$$D_m = \int_0^\infty \omega_m(x)\,dx + \sqrt{(\pi i)} \sum_{k+j=m} 0.5\cdot 1.5\ldots(k-0.5)\, i^k a_{j+1} + \sqrt{(\pi i)}\, a_{m+1}.$$

Применив эту формулу к ядру $\omega(x) = J_\nu(x)$, где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя ν-го порядка, мы получим асимптотику преобразования Ханкеля функции $f(x)$ при больших значениях аргумента $z = 1/h$:

$$\int_0^\infty J_\nu\left(\frac{x}{h}\right) f(x)\,dx = \sum_{m=0}^{N-1} Q_m(\nu) f^{(m)}(0) h^m + h^{N-1}\rho(h), \tag{17}$$

где полиномы $Q_m(\nu)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$Q_0(\nu) = 1, \qquad Q_m(\nu) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^{m+n+1}}{(m-n)!} Q_n(\nu)\, b_{n-m}^{(\nu)},$$

$$b_n^{(\nu)} = \begin{cases} (-1)^{p+1}\, n! & \text{при} \quad n = 2p+1, \\ n!\,\dfrac{1\cdot 3\ldots(n-1)}{2^p\, p!}\,\nu & \text{при} \quad n = 2p. \end{cases}$$

Приведем несколько первых полиномов $Q_m(\nu)$: $Q_0(\nu) = 1$, $Q_1(\nu) = \nu$, $Q_2(\nu) = {}^1/_2(\nu^2 - 1)$, $Q_3(\nu) = {}^1/_6(\nu^3 - 4\nu)$, $Q_4(\nu) = {}^1/_{24}(\nu^4 - 10\nu^2 + 9)$. Отметим, что при $\nu = 0$ формула (17) была получена в [5].

Методы [1—3] использовались также в работах [6, 7].

§ 3. Некоторые обобщения

1. Рассмотрим интегралы вида

$$I(h) = \frac{1}{h}\int_a^b \omega\left(\frac{x - x_0}{h}\right) f(x)\,dx, \qquad a < x_0 < b.$$

Заменой переменных этот интеграл приводится к сумме двух интегралов:

$$I(h)=\frac{x_0-a}{h}\int_0^1\omega\left(-\frac{(x_0-a)}{h}t\right)f(x_0+(a-x_0)t)\,dt+$$

$$+\frac{b-x_0}{h}\int_0^1\omega\left(\frac{b-x_0}{h}t\right)f(x_0+(b-x_0)t)\,dt.$$

Если точка x_0 фиксирована, то асимптотика каждого из этих двух интегралов может быть подсчитана по приведенным выше формулам. Если же точка x_0 близка к a или b, т. е. $x_0-a\sim h$ или $b-x_0\sim h$, то параметр $((x_0-a)/h)^{-1}$ или $((b-x_0)/h)^{-1}$ уже не будет малым, но тогда можно воспользоваться разложением функции $f(t)$ в окрестности x_0. Соответствующие равномерные по x_0 формулы были получены в [8].

2. Рассмотрим интеграл по многомерной области Ω:

$$I(h)=\frac{1}{h}\int_\Omega\omega\left(\frac{x-x_0}{h}\right)f(x)\,dx.$$

Помещая начало координат в точку x_0 и переходя к полярным координатам, мы получим

$$I(h)=\int d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}\left[\int_0^{r(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}\omega\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1};\frac{r}{h}\right)\times\right.$$
$$\left.\times f(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1};r)r^{n-1}\,dr\right];\tag{18}$$

асимптотику интеграла (18) можно получить интегрируя по $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ разложение внутреннего интеграла (в том случае, если точка x_0 лежит на границе, нужно воспользоваться формулами работы [9]).

Поступила в редакцию 30.03.1972

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. О разложении по параметру интегралов с ядром типа δ-функции. Научн. докл. Высш. школы. Сер. физ.-матем. наук, 1959, № 1, 54—61.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об асимптотическом разложении интегралов с медленно убывающим ядром. Научн. докл. Высш. школы. Сер. физ.-матем. наук, 1959, № 1, 62—69.
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром. Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 1, 26—29.
4. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
5. А. Н. Тихонов. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 5, 982—985.
6. Э. Я. Риекстыньш. Асимптотическое представление некоторых интегралов типа свертки. Латвийский матем. ежегодник, 1970, 8, 223—239.
7. Э. Я. Риекстыньш. Асимптотические разложения интегралов с ядрами, близкими к степенной или показательной функции. Латвийский матем. ежегодник, 1971, **10**.
8. А. Х. Рахматулина. О равномерном на отрезке разложении интегралов с убывающим ядром. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 1, 185—194.
9. А. А. Арсеньев. О преобразовании Фурье медленно убывающей функции. Докл. АН СССР, 1964, **154**, № 2, 251—253.