ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 12 Сентябрь 1972 Октябрь № 5

УДК 518:517.944/.947

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ

Е. С. НИКОЛАЕВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

Рассматривается задача о вычислительной устойчивости двухслойного и трехслойного итерационных процессов решения линейного операторного уравнения I рода $Au = f$ в гильбертовом пространстве.

Одной из задач теории итерационных процессов является получение количественных характеристик, позволяющих сравнивать различные по структуре методы. Наиболее часто при теоретических исследованиях используется критерий сравнения методов по числу итераций в предположении, что все вычисления проводятся точно.

Однако в реальном вычислительном методе процесс округления результатов арифметических операций вносит на каждом этапе вычислений некоторые погрешности в решение. Это обстоятельство приводит к необходимости сравнить итерационные методы по их вычислительной точности.

В настоящей работе эта характеристика рассматривается для двухслойного (простая итерация) и трехслойного (полуитерационного Чебышева и стационарного) итерационных процессов. Вычислительная устойчивость метода Ричардсона исследована в работах [1–3].

При исследовании предполагается, что введение погрешностей округления эквивалентно возмущению входных данных итерационной схемы. Этот подход, позволяющий свести задачу о вычислительной точности метода к изучению устойчивости по входным данным некоторой возмущенной задачи, применялся в [4] при рассмотрении абстрактной схемы двухслойного итерационного процесса.

Полученные оценки (теоремы 1, 3, 5) доказывают вычислительную устойчивость рассматриваемых итерационных схем. При этом показано, что коэффициенты в оценках зависят только от безразмерного параметра $\xi = \gamma_1/\gamma_2$, где γ_1 и γ_2 — границы спектра оператора A либо постоянные эквивалентности оператора A и второго оператора B итерационной схемы.

§ 1. Двухслойные итерационные схемы

1. Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H дано операторное уравнение I рода с линейным самосопряженным оператором A $(A : H \to H, A = A^* > 0)$

$$(1.1) \qquad Au = f,$$

где u — искомый, f — заданный элементы из H.

Пусть B — легко обратимый оператор, удовлетворяющий условиям

$$(1.2) \qquad B = B^* \geqslant \beta E, \quad \gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \quad \beta < 0,$$

где γ_1 и γ_2 — постоянные энергетической эквивалентности операторов A и B (см. [2], гл. VIII).

Для приближенного решения задачи (1.1) рассмотрим неявную двухслойную итерационную схему с постоянным параметром $\tau > 0$ и произвольным $y_0 \in H$:

$$(1.3) \qquad B(y_{k+1} - y_k) / \tau + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

В предположениях (1.2) оптимальное значение параметра есть [2]

$$(1.4) \qquad \tau = \tau_0 = 2 / (\gamma_1 + \gamma_2).$$

При этом справедливы оценки

$$(1.5) \qquad \|y_n - u\|_D \leqslant \rho_0^n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \text{ или } B,$$

где $\|\cdot\|_D$ — норма в энергетическом пространстве H_D определяется следующим образом: $\|x\|_D = (Dx, x)^{1/2}$ при $D = D^* > 0$, $\rho_0 = (1 - \xi) / (1 + \xi)$, $\xi = \gamma_1 / \gamma_2$. Для уменьшения нормы начальной погрешности $z_0 = y_0 - u$ в $H_A(H_B)$ в $1/\varepsilon$ раз достаточно выполнить $n \geqslant n(\varepsilon, \xi)$ итераций, где

$$n(\varepsilon, \xi) = \ln \varepsilon / \ln \rho_0 \approx \ln (1/\varepsilon) / 2\xi.$$

Схему (1.3), (1.4) называют неявным методом простой итерации. Кроме оценки (1.5), выражающей сходимость итерационного процесса, нетрудно получить оценки устойчивости схемы (1.3), (1.4) по правой части:

$$\|y_n\|_B \leqslant \rho_0^n \|y_0\|_B + [(1 - \rho_0^n) / \gamma_1] \|f\|_{B^{-1}},$$
$$\|y_n\|_A \leqslant \rho_0^n \|y_0\|_A + (1 + \rho_0^n) \|f\|_{A^{-1}}.$$

2. Из полученных выше оценок следует сходимость и устойчивость по правой части идеального вычислительного процесса. Для реального процесса необходимо исследовать устойчивость по входным данным некоторой возмущенной схемы, учитывающей погрешности округления.

Можно считать, что введение погрешностей округления эквивалентно возмущению начального приближения, правой части и операторов A и B итерационного процесса (1.3). Тогда реальное решение $\tilde{y}_k$ можно рассматривать как точное решение следующей задачи:

$$(1.6) \qquad \tilde{B}(\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k) / \tau + \tilde{A}\tilde{y}_k = \tilde{f}_{k+1} + \tilde{w}_{k+1} / \tau, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Предполагая, что схема (1.6) принадлежит к исходному семейству схем, т. е. выполнены условия (1.2), или

$$(1.7) \qquad \tilde{A} = \tilde{A}^* > 0, \quad \tilde{B} = \tilde{B}^* \geqslant \tilde{\beta} E, \quad \tilde{\beta} > 0,$$

исследуем ее устойчивость.

Мерой возмущения операторов A и B будем считать относительное изменение их энергии $(0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 < 1)$:

$$|((\widetilde{A}-A)x, x)| \leqslant \alpha_1(Ax, x), \qquad |((\widetilde{B}-B)x, x)| \leqslant \alpha_2(Bx, x). \tag{1.8}$$

Рассмотрим схему (1.6) с возмущенными входными данными, предполагая, что итерационный параметр τ определяется по формуле (1.4) через невозмущенные значения γ_1 и γ_2.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1.2), (1.7), (1.8) *и*

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / (1 - \alpha_2) \leqslant 0.5\xi,$$

то для схемы (1.6) *с параметром* (1.4) *справедлива оценка*

$$\|\widetilde{y}_n - u\|_{\widetilde{B}} \leqslant \widetilde{\rho}^n \|\widetilde{y}_0 - u\|_{\widetilde{B}} + (1-\widetilde{\rho}^n)[1/\widetilde{\gamma}_1 \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\widetilde{f}_j - f\|_{\widetilde{B}^{-1}} + \tag{1.9}$$
$$+ (1/\widetilde{\xi}) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\widetilde{w}_j\|_{\widetilde{B}^{-1}}] + [\alpha_1(1+\widetilde{\rho}^n)/\widetilde{\gamma}_1] \|f\|_{\widetilde{B}^{-1}},$$

где

$$\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1 - \alpha\gamma_2 \geqslant 0.5\gamma_1, \qquad \widetilde{\rho} = (1-\widetilde{\xi}) / (1+\widetilde{\xi}) \leqslant 0.5(1+\rho_0),$$
$$\widetilde{\xi} = (\xi - \alpha) / (1+\alpha) \geqslant \xi / 3 \text{ при } \alpha \leqslant 0.5\xi.$$

Следует подчеркнуть, что в оценке (1.9) коэффициент при возмущении $\widetilde{w}$ правой части не превосходит величины, пропорциональной $1/\xi$ («числа обусловленности итерационного процесса»).

Для доказательства теоремы рассмотрим задачу для погрешности $z_k = \widetilde{y}_k - u$ и перейдем к эквивалентной явной схеме, следуя [2]:

$$x_{k+1} - \varphi = \widetilde{S}(x_k - \varphi) + \tau\varphi_{k+1} + \psi_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$
$$x_0 \text{ — задано}, \qquad \widetilde{S} = E - \tau\widetilde{C}.$$

Здесь приняты обозначения

$$x_k = \widetilde{B}^{1/2} z_k, \qquad \widetilde{C} = \widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{A}\widetilde{B}^{-1/2}, \qquad \varphi_k = \widetilde{B}^{-1/2}(\widetilde{f}_k - f), \tag{1.10}$$
$$\psi_k = \widetilde{B}^{-1/2}\widetilde{w}_k, \qquad \varphi = \widetilde{B}^{1/2}\widetilde{A}^{-1}(A - \widetilde{A})u.$$

Решая относительно x_k разностное уравнение первого порядка, найдем

$$x_k - \varphi = \widetilde{S}^k(x_0 - \varphi) + \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{S}^j(\tau\varphi_{k-j} + \psi_{k-j}),$$

$$\|x_k\| \leqslant \|\widetilde{S}\|^k \|x_0\| + [(1 - \|\widetilde{S}\|^k)/(1 - \|\widetilde{S}\|)](\tau \max_{1\leqslant j\leqslant k} \|\varphi_j\| +$$
$$+ \max_{1\leqslant j\leqslant k} \|\psi_j\| + (1 + \|\widetilde{S}\|^k)\|\varphi\|.$$

Оценим сначала норму оператора $\widetilde{S}$.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то справедлива оценка*
$\|\widetilde{S}\| \leqslant \widetilde{\rho} < 1.$

Действительно, в силу (1.2), (1.7), (1.8) имеем

$$\widetilde{C} = \widetilde{C}^*, \qquad \gamma_1^* E \leqslant \widetilde{C} \leqslant \widetilde{\gamma}_2 E, \qquad \gamma_1^* = \gamma_1(1-\alpha_1) / (1+\alpha_2),$$
$$\widetilde{\gamma}_2 = \gamma_2(1+\alpha_1) / (1-\alpha_2) = \gamma_2(1+\alpha),$$

где $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / (1 - \alpha_2)$. Заметим, что $\tau_0\tilde{\gamma}_2 - 1 = \tilde{\rho} = \rho_0 + \alpha(1 + \rho_0)$. Введем постоянную $\tilde{\gamma}_1 \leqslant \gamma_1^*$, полагая

$$\tilde{\gamma}_1 = (1 - \tilde{\rho}) / \tau_0 = \gamma_1 - \alpha\gamma_2 \leqslant \gamma_1^*.$$

Тогда $\gamma_1^* + \tilde{\gamma}_2 \geqslant \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 = 2 / \tau_0$ и, следовательно,

$$\|\tilde{S}\| \leqslant \max_{\gamma_1^* \leqslant t \leqslant \tilde{\gamma}_2} |1 - \tau t| = \max(1 - \tau_0\gamma_1^*, \tau_0\tilde{\gamma}_2 - 1) = \tilde{\rho}.$$

Лемма доказана. Заметим, что если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то из леммы 1 следует

$$(1.11) \qquad \|S\| \leqslant \rho_0, \qquad S = E - \tau C, \qquad C = B^{-1/2}AB^{-1/2}.$$

Оценим теперь $\|\varphi\|$ через известные величины.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi = \tilde{B}^{1/2}\tilde{A}^{-1}(A - \tilde{A})$ *и, где и — решение задачи* (1.1). *Если выполнены условия* (1.2), (1.7), (1.8), *то* $\|\varphi\| \leqslant (\alpha_1 / \tilde{\gamma}_1)\|f\|_{\tilde{B}^{-1}}$.

Действительно,

$$\|\varphi\| = \|\tilde{B}^{1/2}\tilde{A}^{-1}(A - \tilde{A})A^{-1}f\| \leqslant \|\tilde{B}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})\tilde{B}^{1/2}\| \, \|\tilde{B}^{-1/2}f\|,$$

и поэтому достаточно оценить норму самосопряженного оператора

$$\tilde{B}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})\tilde{B}^{1/2}.$$

В силу предположений леммы верна цепочка неравенств

$$(1 - \alpha_1)A \leqslant \tilde{A} \leqslant (1 + \alpha_1)A,$$
$$(1 - \alpha_1)\tilde{A}^{-1} \leqslant A^{-1} \leqslant (1 + \alpha_1)\tilde{A}^{-1},$$
$$-\alpha_1\tilde{A}^{-1} \leqslant \tilde{A}^{-1} - A^{-1} \leqslant \alpha_1\tilde{A}^{-1},$$

или

$$|((\tilde{A}^{-1} - A^{-1})x, x)| \leqslant \alpha_1(\tilde{A}^{-1}x, x).$$

Отсюда получим

$$|(\tilde{B}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})\tilde{B}^{1/2}x, x)| \leqslant \alpha_1(\tilde{C}^{-1}x, x) \leqslant \alpha_1 / \tilde{\gamma}_1(x, x).$$

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 с учетом неравенства $1 - \tilde{\rho} \geqslant \tilde{\xi}$ следует утверждение теоремы.

Теорема 1 утверждает, что итерационный процесс (1.3), (1.4) численно устойчив и сохраняет теоретическую скорость сходимости, если возмущения правой части и операторов задачи есть величина порядка $o(\xi)$.

§ 2. Трехслойные итерационные схемы

1. Для приближенного решения задачи (1.1) рассмотрим неявную трехслойную итерационную схему стандартного типа [2]:

$$(2.1) \qquad By_{k+1} = \omega_{k+1}(B - \tau A)y_k + (1 - \omega_{k+1})y_{k-1} + \tau\omega_{k+1}f,$$
$$k = 1, 2, \ldots,$$

$$(2.2) \qquad By_1 = (B - \tau A)y_0 + \tau f$$

с произвольным $y_0 \in H$ и параметрами τ и $\{\omega_k\}$.

Сначала рассмотрим вычислительную устойчивость итерационного процесса (2.1), (2.2) с постоянными параметрами τ и ω (стационарный метод).

Считая, что A и B удовлетворяют условиям (1.2), положим (см. [2])

$$\tau=\tau_0=2/(\gamma_1+\gamma_2),\qquad \omega_k=\omega_\infty=1+\rho_1^2,$$
$$k=2,3,\ldots,\tag{2.3}$$
$$\rho_1=(1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi}),\qquad \xi=\gamma_1/\gamma_2.$$

Переходя от (2.1), (2.2) к эквивалентной явной схеме, получим

$$x_{k+1}=\omega_{k+1}Sx_k+(1-\omega_{k+1})x_{k-1}+\tau\omega_{k+1}\varphi,\tag{2.4}$$
$$k=1,2,\ldots,$$

$$x_1=Sx_0+\tau\varphi,\qquad S=E-\tau C,\qquad x_0 \text{ — задано},\tag{2.5}$$

где $x_k=A^{1/2}y_k$, $C=C_1=A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$, $\varphi=CA^{-1/2}f$, или $x_k=B^{1/2}y_k$, $C=C_2=$ $=B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $\varphi=B^{-1/2}f$.

Ниже нам потребуется явное представление решения задачи (2.4), (2.5). Пусть $\varphi=0$, x_j и x_{j+1} заданы. Тогда для решения (2.4) при $k\geqslant j$ справедливо представление

$$x_k=\rho_1^k\left[U_{k-j-1}\left(\frac{S}{\rho_0}\right)\left(\frac{x_{j+1}}{\rho_1^{j+1}}-\frac{S}{\rho_0}\frac{x_j}{\rho_1^j}\right)-T_{k-j}\left(\frac{S}{\rho_0}\right)\frac{x_j}{\rho_1^j}\right],\tag{2.6}$$

где $T_k(t)$ и $U_k(t)$ — полиномы Чебышева степени k первого и второго рода:

$$T_k(t)=\cos(k\arccos t),\qquad |t|\leqslant 1,\qquad \max_{|t|\leqslant 1}|T_k(t)|=1,$$
$$U_k(t)=\frac{\sin((k+1)\arccos t)}{\sin(\arccos t)},\qquad |t|\leqslant 1,\qquad \max_{|t|\leqslant 1}|U_k(t)|=k+1.$$

Полагая $j=0$ в (2.6) и учитывая (2.5), оценку $\|S\|\leqslant\rho_0$ и равенство $\rho_0=2\rho_1/(1+\rho_1^2)$, убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 2 (см. [5]). *Если выполнены условия* (1.2), *то итерационный процесс сходится и верна оценка*

$$\|y_n-u\|_D\leqslant\rho_1^n\left(1+\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}n\right)\|y_0-u\|_D,\qquad D=A\quad \text{или } B.$$

2. Задача о вычислительной устойчивости итерационной схемы (2.1), (2.2) ставится следующим образом: исследовать устойчивость по входным данным возмущенной схемы

$$\tilde B\tilde y_{k+1}=\omega_{k+1}(\tilde B-\tau\tilde A)\tilde y_k+(1-\omega_{k+1})\tilde y_{k-1}+\tau\omega_{k+1}\tilde f_{k+1}+\tilde w_{k+1},\tag{2.7}$$
$$\tilde B\tilde y_1=(\tilde B-\tau\tilde A)\tilde y_0+\tau\tilde f_1+\tilde w_1,\quad \tilde y_0 \text{ — задано}.$$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (1.2), (1.7), (1.8) *и*

$$\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/(1-\alpha_2)\leqslant 0.5\xi,$$

то для схемы (2.7), (2.3) *справедлива оценка*

$$\|\tilde{y}_n - u\|_{\tilde{B}} \leqslant \bar{\rho}_1^n \left(1 + \frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2} n\right) \|\tilde{y}_0 - u\|_{\tilde{B}} + (1 - \sqrt{(\alpha/\xi)})^{-2} \times$$
$$\times [(1/\gamma_1) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\tilde{f}_j - f\|_{\tilde{B}^{-1}} + (1/\xi) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\tilde{w}_j\|_{\tilde{B}^{-1}}] +$$
$$+ \frac{2\alpha_1}{\gamma_1} \left[1 + \bar{\rho}_1^n \left(1 + \frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2} n\right)\right] \|f\|_{\tilde{B}^{-1}},$$

где

$$\bar{\rho}_1 \leqslant \rho_1 + \sqrt{\alpha}(1+\rho_1) < 1.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим задачу для погрешности $z_k = \tilde{y}_k - u$ и перейдем к эквивалентной явной схеме

$$\begin{aligned} &x_{k+1} - \varphi = \omega_{k+1}\tilde{S}(x_k - \varphi) + (1-\omega_{k+1})(x_{k-1} - \varphi) + \\ &+ \tau\omega_{k+1}\varphi_{k+1} + \psi_{k+1}, \\ &x_1 - \varphi = \tilde{S}(x_0 - \varphi) + \tau\varphi_1 + \psi_1, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где x_k, $\tilde{S}$, φ_k, ψ_k, φ определены в (1.10).

Представим x_k в виде суммы $x_k = v_k + \bar{x}_k$, где $\bar{x}_k$ — решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{k+1} - \varphi = \omega_{k+1}\tilde{S}(\bar{x}_k - \varphi) + (1-\omega_{k+1})(\bar{x}_{k-1} - \varphi), \\ &k = 1, 2, \ldots, \\ &\bar{x}_1 - \varphi = \tilde{S}(\bar{x}_0 - \varphi), \qquad \bar{x}_0 = x_0. \end{aligned}$$

Используя (2.6), получим

$$\bar{x}_k - \varphi = \rho_1^k \left[\frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2} U_{k-1}\left(\frac{\tilde{S}}{\rho_0}\right)\frac{\tilde{S}}{\rho_0} + T_k\left(\frac{\tilde{S}}{\rho_0}\right)\right](x_0 - \varphi). \tag{2.9}$$

Для v_k получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &v_{k+1} = \omega_{k+1}\tilde{S}v_k + (1-\omega_{k+1})v_{k-1} + \tau\omega_{k+1}\varphi_{k+1} + \psi_{k+1}, \\ &k = 1, 2, \ldots, \\ &v_1 = \tau\varphi_1 + \psi_1, \qquad v_0 = 0, \end{aligned}$$

решение которой будем искать в виде $v_k = \sum\limits_{j=0}^{k} Y_{k,j}$. Тогда $Y_{k,j}$ при фиксированном $j = 0, 1, \ldots$ есть решение однородной задачи

$$\begin{aligned} &Y_{k+1,j} = \omega_{k+1}\tilde{S}Y_{k,j} + (1-\omega_{k+1})Y_{k-1,j}, \qquad k \geqslant j+1, \\ &Y_{j+1,j} = \tau\omega_{j+1}\varphi_{j+1} + \psi_{j+1}, \qquad Y_{j,j} = 0. \end{aligned}$$

Здесь формально введено $\omega_1 = 1$. Используя (2.6), найдем

$$Y_{k,j} = \rho_1^{k-j-1} U_{k-j-1}(\tilde{S}/\rho_0)(\tau\omega_{j+1}\varphi_{j+1} + \psi_{j+1}), \qquad Y_{k,k} = 0,$$

и, следовательно,

$$(2.10)\qquad v_k=\sum_{j=0}^{k-1}\rho_1{}^jU_j(\tilde S/\rho_0)\,(\tau\omega_{k-j}\varphi_{k-j}+\psi_{k-j}).$$

Для завершения доказательства теоремы остается оценить нормы операторных полиномов $U_j(\tilde S\,/\,\rho_0)$ и $T_j(\tilde S/\,\rho_0)$.

Введем следующие обозначения:

$$(2.11)\qquad \begin{aligned}&\tilde\rho_0=\rho_0\,/\,\tilde\rho=(1-\tilde\xi_0)\,/\,(1+\tilde\xi_0),\ \tilde\xi_0=a\,/\,(1+\alpha-\xi),\\ &\tilde\rho_1=(1-\sqrt{\tilde\xi_0})\,/\,(1+\sqrt{\tilde\xi_0}),\quad \tilde q_n=2\tilde\rho_1{}^n\,/\,(1+\tilde\rho_1{}^{2n});\end{aligned}$$

причем $\bar\rho_1=\rho_1\,/\,\tilde\rho_1$.

Лемма 3. *Если выполнены условия теоремы* 3, *то справедливы оценки*

$$\|T_k(\tilde S\,/\,\rho_0)\|\leqslant\tilde q_k{}^{-1}\leqslant\tilde\rho_1{}^{-k},\qquad \|U_k(\tilde S\,/\,\rho_0)\|\leqslant(k+1)\tilde\rho_1{}^{-k},$$

$$\|U_k(\tilde S/\rho_0)\tilde S/\rho_0\|\leqslant(k+1)\tilde\rho_1^{-(k+1)},\qquad \bar\rho_1\leqslant\rho_1+\sqrt{\alpha}(1+\rho_1)<1.$$

Действительно, так как $\|\tilde S\,/\,\rho_0\|\leqslant\tilde\rho\,/\,\rho_0=\tilde\rho_0{}^{-1}\leqslant\tilde\rho_1{}^{-1}$, то

$$\|T_k(\tilde S\,/\,\rho_0)\|\leqslant T_k(\tilde\rho\,/\,\rho_0)=T_k(\tilde\rho_0{}^{-1})=\tilde q_k{}^{-1}\leqslant\tilde\rho_1{}^{-k},$$

$$\|U_k(\tilde S/\rho_0)\|\leqslant[T_{k+1}^2(\tilde\rho_0{}^{-1})-1]^{1/2}[T_1^2(\tilde\rho_0{}^{-1})-1]^{-1/2}=$$

$$=(1-\tilde\rho_1^{2(k+1)})\,(1-\tilde\rho_1{}^2)^{-1}\,\tilde\rho_1{}^{-k}\leqslant(k+1)\,\tilde\rho_1{}^{-k}.$$

Далее имеем

$$\bar\rho_1=\rho_1+(1+\rho_1)\,\frac{\rho_1}{\tilde\rho_1}\frac{1-\tilde\rho_1}{1+\rho_1},\qquad \frac{\rho_1}{\tilde\rho_1}\frac{1-\tilde\rho_1}{1+\rho_1}=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\tilde\xi_0}}\sqrt{\tilde\xi_0}=$$

$$=\sqrt{\alpha}\,(1-\sqrt{\xi})\,/[\sqrt{(1+\alpha-\xi)}-\sqrt{\alpha}]\leqslant\sqrt{\alpha}.$$

Лемма доказана.

Используя лемму 3 и формулу (2.9), получим оценку

$$\|\bar x_k-\varphi\|\leqslant\bar\rho^k\left[1+\frac{1-\rho_1{}^2}{1+\rho_1{}^2}k\right]\|x_0-\varphi\|.$$

Далее, в силу лемм 3 и 1,

$$\left\|\sum_{j=0}^{k-1}\rho_1{}^jU_j(\tilde S/\rho_0)\right\|\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\bar\rho_1{}^j=(1-\bar\rho_1)^{-2}\leqslant$$

$$\leqslant(1-\rho_1)^{-2}(1-\sqrt{(\alpha/\xi)})^{-2}.$$

Учитывая затем равенство

$$(2.12)\qquad \tau\omega_k=\tau_0\omega_\infty=(1-\rho_1)^2\,/\,\gamma_1,$$

из (2.10) находим

$$\|v_k\|\leqslant(1-\sqrt{(\alpha/\xi)})^{-2}[\,(1/\gamma_1)\max_{1\leqslant j\leqslant k}\|\varphi_j\|+(1/\xi)\max_{1\leqslant j\leqslant k}\|\psi_j\|].$$

Теорема 3 доказана.

3. Рассмотрим теперь вычислительную устойчивость полуитерационного метода Чебышева (2.1), (2.2) с набором параметров [6]

$$(2.13)\qquad \tau=\tau_0=2/(\gamma_1+\gamma_2),\qquad \omega_k=4(4-\rho_0^2\omega_{k-1})^{-1},$$
$$\omega_1=2,\quad k=2,3,\dots .$$

Если обозначить

$$q_k=T_k^{-1}(1/\rho_0)=2\rho_1^k/(1+\rho_1^{2k}),$$

то для ω_k справедливо представление

$$(2.14)\qquad \omega_k=\frac{2}{\rho_0}T_{k-1}(1/\rho_0)T_k^{-1}(1/\rho_0)=(2/q_1)(q_k/q_{k-1})=$$
$$=(1+\rho_1^2)(1+\rho_1^{2(k-1)})/(1+\rho_1^{2k}).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\omega_k=1+\rho_1^2=\omega_\infty \text{ и } 2=\omega_1>\omega_2>\dots>\omega_k>\dots>\omega_\infty>1,$$

и поэтому метод (2.1) — (2.3) есть предельный случай схемы (2.1), (2.2), (2.13).

Для метода (2.1), (2.13) справедливо аналогичное (2.6) представление решения эквивалентной явной схемы (2.4), (2.5) с $\varphi=0$:

$$(2.15)\qquad x_k=q_k\left[U_{k-j-1}\left(\frac{S}{\rho_0}\right)\left(\frac{x_{j+1}}{q_{j+1}}-\frac{S}{\rho_0}\frac{x_j}{q_j}\right)+T_{k-j}\left(\frac{S}{\rho_0}\right)\frac{x_j}{q_j}\right].$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Если выполнены условия* (1.2), *то итерационный процесс* (2.1), (2.2), (2.13) *сходится и верна оценка*

$$\|y_n-u\|_D\leqslant q_n\|y_0-u\|_D,\qquad D=A \text{ или } B.$$

Таким образом, схемы (2.1) — (2.3) и (2.1), (2.2), (2.13) сходятся с одинаковой скоростью.

4. Задача о вычислительной устойчивости итерационного процесса Чебышева сводится к получению оценок устойчивости явной схемы (2.8), (2.13).

Справедлива следующая

Теорема 5. *Если выполнены условия* (1.2), (1.7), (1.8) *и*

$$\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/(1-\alpha_2)\leqslant 0.5\xi,$$

то для схемы (2.7), (2.13) *справедлива оценка*

$$\|\tilde y_n-u\|_{\tilde B}\leqslant\bar q_n\|\tilde y_0-u\|_{\tilde B}+[1-\sqrt{(\alpha/\xi)}]^{-2}(2/\gamma_1\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\tilde f_j-f\|_{\tilde B^{-1}}+$$
$$+(1/\xi)\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|\tilde w_j\|_{\tilde B^{-1}})+(2\alpha_1/\gamma_1)(1+\bar q_n)\|f\|_{\tilde B^{-1}},$$

где $\bar q_n=q_n/\tilde q_n\leqslant 2\bar\rho_1^n/(1+\bar\rho_1^{2n})$, $\tilde q_n$ *и* $\bar\rho_1$ *определены в* (2.11).

Теорема 5 доказывается так же, как и теорема 3. Учитывая (2.14), (2.15), получим вместо (2.9), (2.10) следующие представления:

$$\bar{x}_k - \varphi = q_k T_k(\tilde{S} / \rho_0)(x_0 - \varphi),$$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k-1} q_k / q_{k-j} U_j(\tilde{S}/\rho_0)(\tau\omega_{k-j}\varphi_{k-j} + \psi_{k-j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} U_j(\tilde{S}/\rho_0)\left[(2\tau/\rho_0)(q_k/q_{k-j-1})\varphi_{k-j} + q_k/q_{k-j}\psi_{k-j}\right].$$

Оценка теоремы 5 следует из леммы 3 и неравенств

$$q_k / q_{k-j} \leqslant \rho_1^j(1+\rho_1^2), \qquad q_k / q_{k-j-1} \leqslant 2\rho_1^{j+1}, \qquad j \leqslant k-1.$$

Осталось оценить $\bar{q}_n$.

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы* 5 *справедливо неравенство*

$$\bar{q}_n \leqslant 2\bar{\rho}_1^n / (1 + \bar{\rho}_1^{2n}). \tag{2.16}$$

Неравенство (2.16) эквивалентно следующему:

$$(\tilde{\rho}_1^{2n} - \rho_1^{2n})(1 - \tilde{\rho}_1^{2n}) \geqslant 0.$$

Так как $0 \leqslant \alpha \leqslant 0.5\xi$, то $\tilde{\rho}_1 \leqslant 1$, $\tilde{\rho}_1 < \rho_1$. Лемма доказана. Теоремы 3, 5 утверждают, что рассмотренные итерационные процессы (2.1), (2.3) с наборами параметров (2.3) и (2.13) численно устойчивы и сохраняют теоретическую асимптотическую скорость сходимости, если возмущение правой части и операторов задачи есть величина порядка $o(\xi)$.

Из теорем 1, 3, 5 следует, что двухслойный (метод простой итерации) и трехслойные (полуитерационный Чебышева и стационарный) итерационные методы могут быть отнесены к одному классу численно устойчивых в энергетических пространствах H_A и H_B вычислительных процессов (ср. с методом Ричардсона [1-3]).

§ 3. Устойчивость по параметрам γ_1 и γ_2

Рассмотрим влияние неточного задания входной информации, т. е. постоянных γ_1 и γ_2, на скорость сходимости итерационных процессов, предполагая, что все вычисления проводятся точно.

Пусть вместо точных значений γ_1 и γ_2 в (1.2) известны некоторые приближенные $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\tau}_0 = 2 / (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2), \qquad \tilde{\rho}_0 = (1 - \tilde{\xi}) / (1 + \tilde{\xi}),$$
$$\tilde{\rho}_1 = (1 - \sqrt{\tilde{\xi}}) / (1 + \sqrt{\tilde{\xi}}),$$
$$\tilde{q}_n = 2\tilde{\rho}_1^n / (1 + \tilde{\rho}_1^{2n}), \qquad \tilde{\xi} = \tilde{\gamma}_1 / \tilde{\gamma}_2.$$

Тогда итерационные параметры для двухслойной и трехслойной схем выбираются следующим образом. Для метода (1.3) $\tau = \tilde{\tau}_0$, для стационарного метода (2.1), (2.2) $\tau = \tilde{\tau}_0$, $\omega_k = 1 + \tilde{\rho}_1^2$ $k = 2, 3, \ldots$; для полуитерационного метода Чебышева $\tau = \tilde{\tau}_0$, $\omega_k = 4(4 - \tilde{\rho}_0^2 \omega_{k-1})^{-1}$, $k = 2, 3, \ldots$, $\omega_k = 2$.

Пусть
$$\tilde{\rho} = \max_{\gamma_1 \leqslant t \leqslant \gamma_2} |1 - \tilde{\tau}_0 t|.$$

Очевидно, что для случая $\tilde{\gamma}_1 \leqslant \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 \geqslant \gamma_2$ справедливы оценка (1.5) и оценки теорем 2, 4, в которых ρ, ρ_1 и q_n заменены на $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\rho}_1$ и $\tilde{q}_n$. При этом итерационные процессы сходятся.

Рассмотрим остальные случаи. При этом, очевидно, $\tilde{\rho}_0 < \tilde{\rho}$. Введем следующие величины:

$$\rho_0^* = \tilde{\rho}_0 / \tilde{\rho}, \qquad \rho_1^* = \rho_0^* / [1 + \sqrt{(1 - \rho_0^{*2})}], \; q_n^* = 2\rho_1^{*n} / (1 + \rho_1^{*2n}),$$
$$\bar{\rho}_1 = \tilde{\rho}_1 / \rho_1^*, \qquad \bar{q}_n = \tilde{q}_n / q_n^*.$$

Так как $\|S\| \leqslant \max\limits_{\gamma_1 \leqslant t \leqslant \gamma_2} |1 - \tilde{\tau}_0 t| = \tilde{\rho}$ и $\tilde{\rho}_0 \leqslant \tilde{\rho}$, то, как и в лемме 3, получим
$$\|T_n(S / \tilde{\rho}_0)\| \leqslant (q_n^*)^{-1} \leqslant (\rho_1^*)^{-n}, \qquad \|U_{n-1}(S / \tilde{\rho}_0) S / \tilde{\rho}_0\| \leqslant$$
$$\leqslant n(\rho_1^*)^{-n}.$$

Поэтому вместо оценок (1.5) и оценок теорем 2, 4 справедливы, соответственно, следующие неравенства:
$$\|y_n - u\|_D \leqslant \tilde{\rho}^n \|y_0 - u\|_D,$$
$$\|y_n - u\|_D \leqslant \bar{\rho}_1^n \left(1 + \frac{1 - \bar{\rho}_1^2}{1 + \bar{\rho}_1^2} n\right) \|y_0 - u\|_D, \tag{3.1}$$
$$\|y_n - u\|_D \leqslant \bar{q}_n \|y_0 - u\|_D, \qquad D = A \text{ или } B.$$

Ясно, что если $\tilde{\rho} > 1$, то итерационные методы могут расходиться. Предположим, что условие $\tilde{\rho} < 1$ выполнено. Тогда $\bar{\rho}_1 < 1$, так как $\rho_0^* > \tilde{\rho}_0$ и, следовательно, $\rho_1^* > \tilde{\rho}_1$. По аналогии с леммой 4 получим
$$\bar{q}_n \leqslant 2\bar{\rho}_1^n (1 + \bar{\rho}_1^{2n}).$$

Так как $\tilde{\rho} < 1$, то итерационные методы сходятся. Из оценок (3.1) следует, что в рассматриваемом случае может иметь место резкое уменьшение скорости сходимости по сравнению со случаем, когда γ_1 и γ_2 известны точно.

В качестве примера мы рассмотрим случай, когда условие $\tilde{\rho} < 1$ выполнено. Пусть
$$\tilde{\gamma}_1 = (1 + \alpha)\gamma_1, \qquad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2, \qquad \alpha > 0.$$

Тогда непосредственные вычисления дают
$$\tilde{\rho} = \frac{1 - (1 - \alpha)\xi}{1 + (1 + \alpha)\xi} = \rho_0 \{1 + 2\alpha\xi^2 / [1 - \alpha\xi - (1 + \alpha)\xi^2]\} \approx$$
$$\approx \rho_0 (1 + 2\alpha\xi^2),$$
$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1 - \sqrt{[(1 + \alpha)\xi]}}{1 + \sqrt{[(1 + \alpha)\xi]}} = \rho_1 [1 - 2\alpha \sqrt{\xi} (1 - \sqrt{\xi})^{-1} \times$$
$$\times [1 + \sqrt{(1 + \alpha)}]^{-1} \{1 + \sqrt{[(1 + \alpha)\xi]}\}^{-1}] \approx \rho_1 (1 - \alpha \sqrt{\xi}),$$

$$\bar{\rho}_1 = [\sqrt{(1-\xi)} + \sqrt{(\alpha\xi)}]^2\{1+\sqrt{[(1+\alpha)\xi]}\}^{-2} \approx$$
$$\approx \rho_1[1+2\sqrt{(\alpha\xi)}].$$

Здесь $\rho_0 = (1-\xi)/(1+\xi)$, $\rho_1 = (1-\sqrt{\xi})/(1+\sqrt{\xi})$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$. Отсюда следует, что для двухслойного метода асимптотическая скорость сходимости сохраняется даже в случае, когда $\alpha = O(1)$. Для сохранения асимптотической скорости сходимости трехслойных итерационных схем необходимо, чтобы α была величиной $o(\xi)$.

Поступила в редакцию 26.05.1972

Цитированная литература

1. В. И. Лебедев, С. А. Финогенов. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 2, 425—438.
2. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
3. Е. С. Николаев, А. А. Самарский. Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 4, 960—973.
4. А. А. Самарский. Двухслойные итерационные схемы. Докл. АН СССР, 1969, 185, № 3, 524—527.
5. А. А. Самарский. Некоторые вопросы общей теории разностных схем. В сб. «Дифференц. ур-ния с частными производными». М., «Наука», 1970, 191—223.
6. G. H. Golub, R. S. Varga. Chebysheve semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative method. I. Numer. Math., 1961, 3, № 2, 147—156; II. № 3, 157—168.