

Д.П.Попов, А.А.Самарский

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

I. Уравнения магнитной гидродинамики и газовой динамики выражают определенные законы сохранения (массы, импульса и т.д.).

При численном решении методом конечных разностей система дифференциальных уравнений аппроксимируется разностной схемой. Естественно требовать, чтобы и в разностном виде выполнялись соответствующие разностные аналоги законов сохранения, т.е. чтобы разностная схема была консервативна. На важность этого обстоятельства в начале 50-х годов обратили внимание А.Н.Тихонов и А.А.Самарский. Построен пример [1], когда неконсервативная разностная схема, имеющая второй порядок аппроксимации на гладких функциях, расходится в классе решений уравнения с разрывными коэффициентами.

В магнитной гидродинамике и газовой динамике уравнение энергии может быть записано в нескольких эквивалентных видах, имеющих непосредственный физический смысл: в дивергентном, выражающем изменение полной энергии, в недивергентном, выражающем изменение только внутренней энергии, в "энтропийном" виде. В дифференциальной форме они с помощью остальных уравнений системы могут быть преобразованы друг в друга.

Для разностных уравнений положение иное. Если, например, в схеме использовано недивергентное уравнение энергии, то оно, вообще говоря, не может быть сведено к дивергентной разностной форме. В ходе преобразования из-за "рассогласованности" отдельных уравнений схемы появляются остаточные члены,

приводящие к нарушению закона сохранения полной энергии.

В свою очередь, дивергентное разностное уравнение не может быть преобразовано к соответствующему недивергентному виду. Поэтому в такой схеме при выполненном законе сохранения полной энергии окажется нарушенным баланс внутренней, а следовательно, и кинетической энергии, а также энтропийный баланс.

В работе рассматриваются полностью консервативные разностные схемы, лишенные этого недостатка. Такие схемы одновременно аппроксимируют все эквивалентные системы дифференциальных уравнений [2]

2. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим принципиальную сторону вопроса на простом примере - системе одномерных плоских уравнений газодинамики. В этой системе в лагранжевых массовых координатах уравнение энергии может быть записано в трех эквивалентных формах:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v, \quad (2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3),$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.2),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon + 0.5v^2) = -\frac{\partial (pv)}{\partial x} \quad (4.3).$$

Обозначения: t - время, z - эйлерова координата, η - удельный объем, x ($dx = \eta^{-1} dz$) - лагранжева массовая координата, p - давление, ε - внутренняя энергия, v - скорость.

Разностная схема для расчета задач газовой динамики может быть построена с использованием любого из трех эквивалентных уравнений (4.1), (4.2), (4.3).

Например, простейшая разностная схема "крест" [3] строится на основе системы (1), (2), (3), (4.1):

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = - \frac{p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}}{0.5(m_i + m_{i-1})}, \quad (1')$$

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = v_i^{j+1}, \quad (2')$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2} - \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m_i}, \quad (3')$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = - p_{i+1/2}^{j+3/2} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m_i}. \quad (4')$$

Схема записана на сетке $\{x_i, t^j\}$, $x_{i+1} = x_i + m_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$; $t^{j+1} = t^j + \tau$, $j = 0, 1, \dots$. Значения сеточных функций v_i^j , v_i^j - относятся к узлам сетки (x_i, t^j) , значения сеточных функций $p_{i+1/2}^{j+1/2}$, $\eta_{i+1/2}^{j+1/2}$, $\varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}$ - к "полуцелым" точкам $(x_{i+1/2}, t^{j+1/2})$, $x_{i+1/2} = x_i + 0.5 m_i$.

Вычислим для схемы "крест" изменение полной энергии рассматриваемой массы газа $[x_0, x_N]$ на некотором отрезке времени $[t^{j_1}, t^{j_2}]$. "Разностно интегрируя" уравнение энергии (4') и далее принимая во внимание уравнение движения (1'), найдем:

$$E^{j_2} - E^{j_1} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} R^j = \Delta E, \quad (5)$$

где $E^j = \sum_{i=0}^{N-1} m_i \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2} + 0.25 \sum_{i=0}^N (m_i + m_{i-1}) (v_i^j)^2$, ($m_{-1} = m_N = 0$).

полная энергия массы газа $[x_0, x_N]$ в момент времени t^j ,

$$R^j = p_N v_N^{j+3/2} - p_{-1} v_0^{j+1/2} - \dots - работа, производимая над$$

газом внешними силами,

$$\Delta E = \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{i=0}^N \left\{ \tau (p_{i+1/2}^{j+3/2} - p_{i-1/2}^{j+3/2} - p_{i+1/2}^{j+1/2} + p_{i-1/2}^{j+1/2}) v_i^{j+1} - 0.5(m_i + m_{i-1})(v_i^{j+1} - v_i^{j_2}) \right\}$$

Из (5) следует, что в разностной схеме "крест" нарушен разностный аналог закона сохранения полной энергии. Дисбаланс полной энергии ΔE накапливается со временем и на гладких решениях имеет порядок $O(\tau)$.

Величина ΔE не зависит от шага сетки по пространству m_i , поэтому, измельчение пространственной сетки не приводит к уменьшению дисбаланса.

Наличие энергетического дисбаланса можно трактовать как присутствие в схеме некоторых источников и стоков энергии, чисто разностной природы. Из вида ΔE следует также, что мощность этих фиктивных источников зависит от характера самого решения. Наибольшего значения ΔE достигает на решениях сильноменяющихся во времени и пространстве.

При этом баланс внутренней энергии строго выполнен:

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_i \epsilon_{i+1/2}^{j+1/2} - \sum_{i=0}^{N-1} m_i \epsilon_{i+1/2}^{j+1/2} + \tau \sum_{j=1}^{j_2} \sum_{i=0}^{N-1} p_{i+1/2}^{j+1/2} (\psi_{i+1}^j - \psi_i^j) \quad (6)$$

Появление в схеме "крест" дисбаланса полной энергии связано с недивергентностью уравнения энергии (4'). Однако, использование в схеме дивергентного уравнения энергии, например, в виде:

$$\frac{\epsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \epsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} + 0.25 \frac{(\psi_{i+1}^{j+2} + \psi_i^{j+2}) - (\psi_{i+1}^{j+1} + \psi_i^{j+1})}{\tau} = - \frac{(p_{i+3/2}^{j+3/2} + p_{i+1/2}^{j+3/2}) \psi_{i+1}^j - (p_{i+1/2}^{j+3/2} + p_{i-1/2}^{j+3/2}) \psi_i^j}{2m_i} \quad (7)$$

приводит к подобным же трудностям. Конечно, закон сохранения полной энергии в этой схеме будет выполнен, однако, в ней нарушится баланс внутренней, а, следовательно, и кинетической энергии. Это означает, в частности, что в такой схеме плохо аппроксимируется температура. Последнее обстоятельство может

оказаться существенным, например, при расчете задач, в которых присутствуют процессы, сильно зависящие от температуры (электропроводность, теплопроводность и т.п.).

3. Рассмотрим следующее многопараметрическое семейство разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики:

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -\sigma_1 \frac{p_{i+1/2}^{j+3/2} - p_{i-1/2}^{j+3/2}}{0.5(m_i + m_{i-1})} - (1-\sigma_1) \frac{p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}}{0.5(m_i + m_{i-1})}, \quad (8)$$

$$\frac{z_i^{j+1} - z_i^j}{\tau} = \sigma_2 v_i^{j+1} + (1-\sigma_2) v_i^j, \quad (9)$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2} - \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = \sigma_3 \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m_i} + (1-\sigma_3) \frac{v_{i+1}^j - v_i^j}{m_i}, \quad (10)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = -[\sigma_4 p_{i+1/2}^{j+3/2} + (1-\sigma_4) p_{i+1/2}^{j+1/2}] \left[\sigma_5 \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m_i} + (1-\sigma_5) \frac{v_{i+1}^j - v_i^j}{m_i} \right], \quad (11)$$

С помощью параметров $0 \leq \sigma_k \leq 1$, $k=1, 2, \dots, 5$ осуществляется выбор конкретной разностной схемы.

Выполнение разностного закона сохранения импульса для схемы (8)-(II) следует из дивергентности уравнения (8). Закон сохранения массы здесь соблюдается автоматически в силу использования массовых координат. Вместо него нужно требовать выполнения соотношения для определения объема:

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_i \eta_{i+1/2}^{j+1/2} = z_N^j - z_0^j.$$

Легко проверить, что она справедливо при условии $\sigma_2 = \sigma_3 [2]$.

Недивергентность уравнения энергии (II) гарантирует соблюдение в схеме баланса внутренней энергии. Изменение полной

энергии E для схемы (8)-(II) составляет

$$E^{j_2} - E^{j_1} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} R^j = \Delta E_1 \quad (12)$$

Здесь — по-прежнему работа, совершенная над газом внешними силами, а

$$\Delta E_1 = \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{i=0}^N \left\{ \tau (\sigma_4 - \sigma_1) (p_{i+1/2}^{j+3/2} - p_{i-1/2}^{j+3/2} - p_{i+1/2}^{j+1/2} + p_{i-1/2}^{j+1/2}) (\sigma_5 v_i^{j+1} + (1 - \sigma_5) v_i^j) - (\sigma_5 - 0.5) (m_i + m_{i-1}) (v_i^{j+1} - v_i^j)^2 \right\} \quad (13)$$

Из этой формулы следует, что справедливость разностного закона сохранения полной энергии $\Delta E_1 = 0$ для схемы (8)-(II) имеет место лишь при условии $\sigma_5 = 0.5$, $\sigma_4 = \sigma_1$.

Будем называть разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений газовой динамики, полностью консервативной, если для нее выполнены разностные законы сохранения массы, импульса, полной энергии, а также детальный баланс энергии, т.е. баланс для отдельных видов энергии — внутренней и кинетической. Из семейства схем (8)-(II) можно выделить при помощи условия

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \alpha, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0.5 \quad (14)$$

одно-параметрическое семейство схем (со свободным параметром α), являющихся полностью консервативными.

Указанные схемы имеют порядок аппроксимации $O(\tau + m^2)$. Требование второго порядка аппроксимации $O(\tau^2 + m^2)$ приводит к условию $\alpha = 0.5$, которое выделяет в семействе (8)-(II) единственную схему.

При построении полностью консервативных схем можно также исходить из семейства с дивергентным уравнением энергии. I/ I/ Аналогичная схема была получена Гольдиным, Ионкиным и Ка-

Выкладки показывают, что при этом мы вновь приходим к условиям (I4), а построенное дивергентное уравнение энергии оказывается эквивалентным недивергентному уравнению (II) при $G_5 = 0.5$ и может быть преобразовано к нему с помощью остальных уравнений (8)-(I0).

Для получения консервативных разностных схем может быть использован интегро-интерполяционный метод [I]. Сущность этого метода состоит в том, что разностные уравнения строятся на основе интегральных соотношений, выражающих законы сохранения для элементарной ячейки сетки. При этом на сетке вводится определенная интерполяция искомого решения и коэффициентов уравнения, меняя которую можно получать различные схемы.

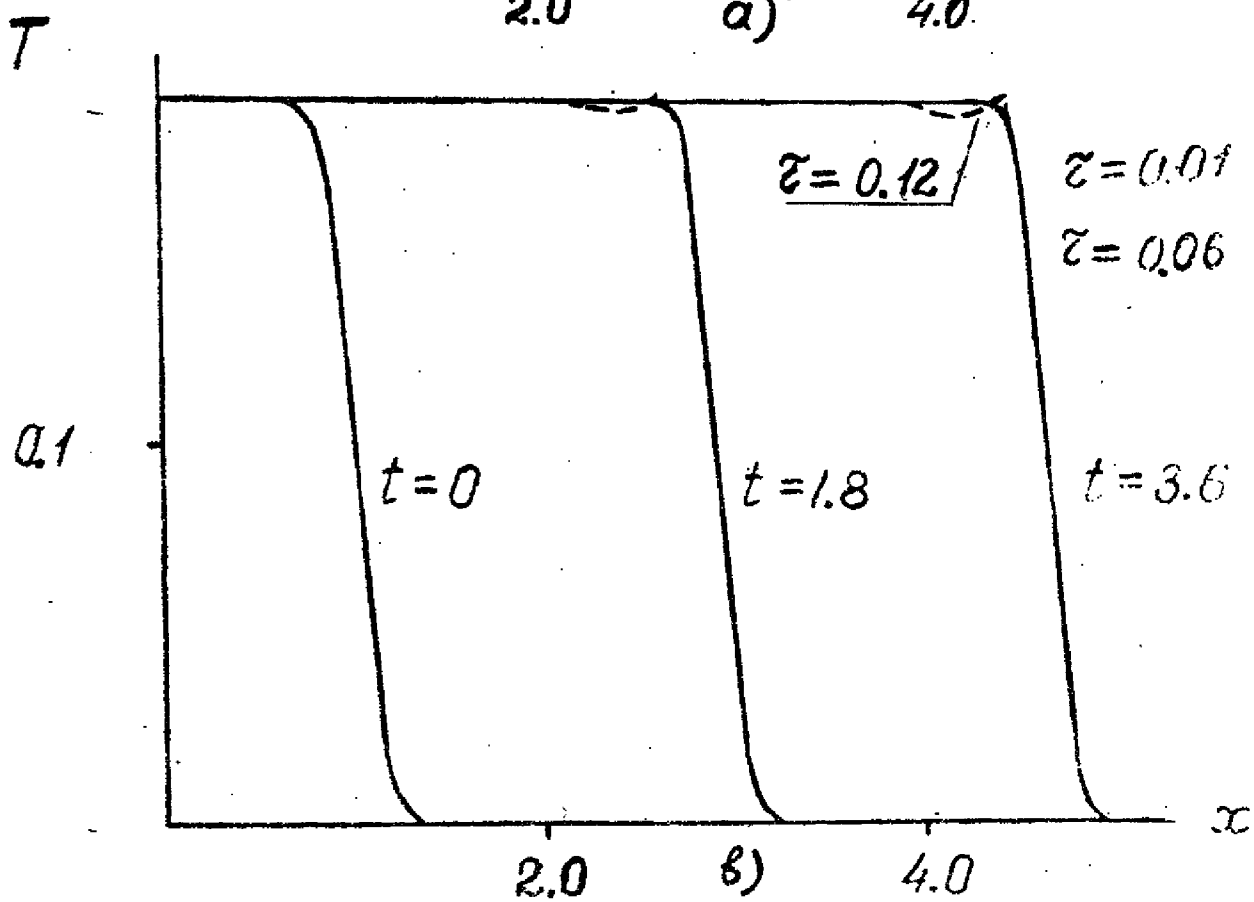
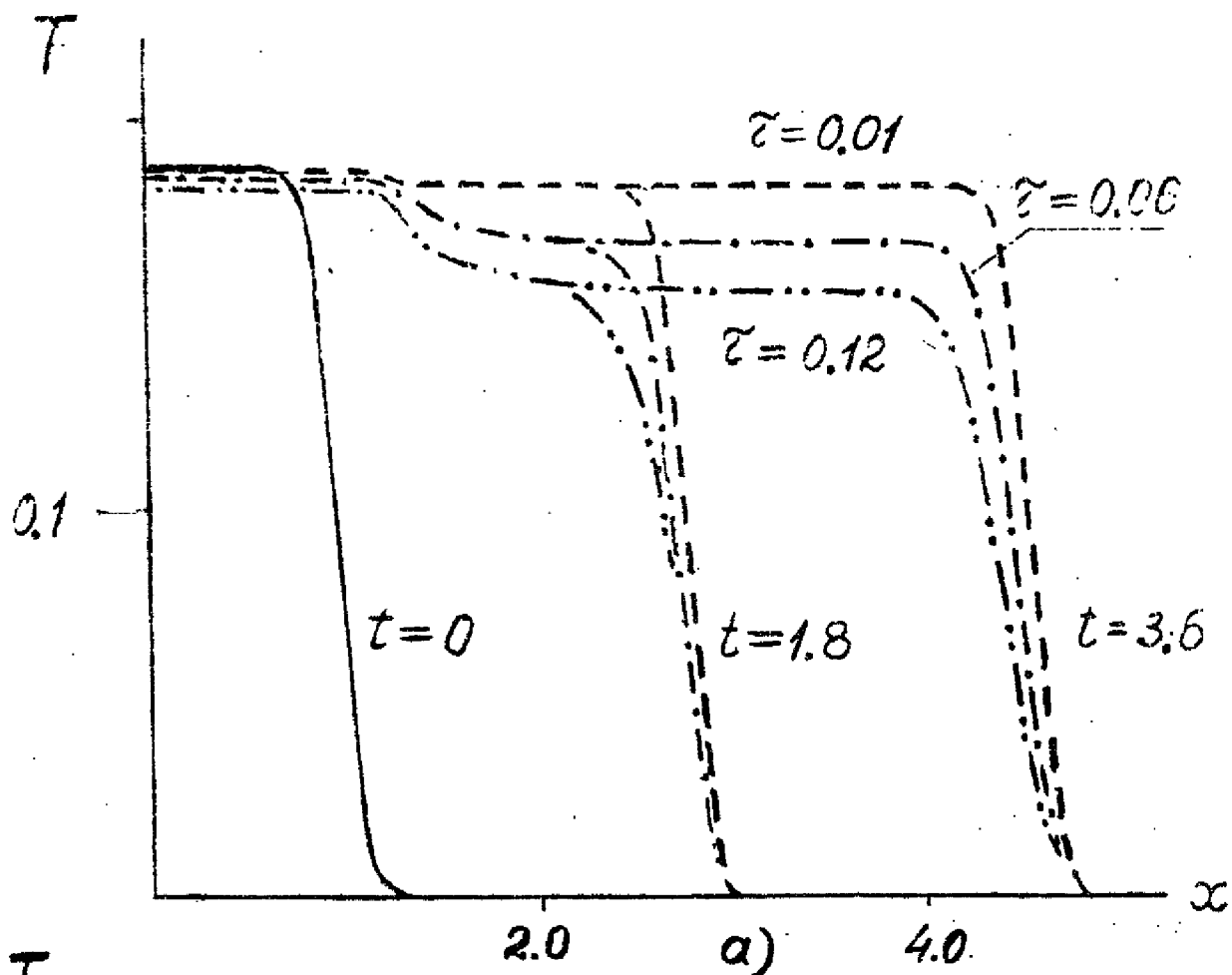
Полностью консервативные схемы также могут быть получены этим методом при соблюдении некоторого формального правила отбора. Оно состоит в следующем: полностью консервативные разностные схемы должны обладать тем же свойством, что и исходная система дифференциальных уравнений - недивергентное разностное уравнение энергии должно с использованием остальных уравнений сводиться к дивергентному виду и наоборот^{I/}.

На фиг. I представлены результаты расчетов задачи о распространении ударной волны перед поршнем, движущимся с постоянной скоростью.

продолж. сноски

литкиным из других соображений. К похожей схеме сводится также схема 4 (стр. 426), основанная на идее "предикатор-корректор".

I/ Подобные соображения высказывал Ф.Х. Харлоу применительно к методу частиц в ячейке.



Фиг. 1

На фиг. 1а представлен профиль температуры на последовательные моменты времени, рассчитанные по схеме "крест" для различных временных шагов сетки τ . На фиг. 1в - результаты, полученные по "полностью консервативному кресту" ($\sigma_k = 0,5$ в схеме (8)-(II)). Как видно, при малых τ различие результатов невелико. При больших τ (число Куранта равно единице и выше) в схеме "крест" наблюдается заметное отклонение параметров течения за фронтом ударной волны от нужного режима.

4. Все результаты, изложенные выше для уравнений газовой динамики, обобщаются на случай магнитной гидродинамики.

Приведем двухпараметрическое семейство (параметры α и β) полностью консервативных разностных схем для решения системы одномерных плоских уравнений магнитной гидродинамики

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = - \left\{ \frac{p_{i+1/2} - p_{i-1/2}}{0.5(m_i + m_{i-1})} \right\}^{(\alpha)} + F_i, \quad (15)$$

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = v_i^{(0.5)} \quad (16), \quad \frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2} - \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = \left\{ \frac{v_{i+1} - v_i}{m_i} \right\}^{(0.5)}, \quad (17).$$

$$\frac{H_{i+1/2}^{j+3/2} \eta_{i+1/2}^{j+3/2} - H_{i+1/2}^{j+1/2} \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = \left\{ \frac{E_{i+1} - E_i}{m_i} \right\}^{(\beta)}, \quad (18)$$

$$\frac{H_{i+1/2}^{j+1/2} - H_{i-1/2}^{j+1/2}}{2\tau(m_i + m_{i-1})} = \mathcal{J}_i^j \eta_*^{j+1/2} = A_i^j, \quad \mathcal{J}_i^j = G_*^{j+1/2} E_i^j,$$

$$\frac{E_{i+1/2}^{j+3/2} - E_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = - \beta_{i+1/2}^{(\alpha)} \left\{ \frac{v_{i+1} - v_i}{m_i} \right\}^{(0.5)} + Q_{i+1/2} \quad (19)$$

$$Q_{i+1/2} = 0.5 \left[A_i^{(0.5)} E_i^{(\beta)} + A_{i+1}^{(0.5)} E_{i+1}^{(\beta)} \right], \quad (20)$$

$$F_i = - \frac{H_{i+1/2}^{j+3/2} H_{i+1/2}^{j+1/2} - H_{i-1/2}^{j+3/2} H_{i-1/2}^{j+1/2}}{4\pi (m_i + m_{i-1})} =$$

$$= -0.25 [A_i (H_{i+1/2}^{j+1} + H_{i-1/2}^{j+3/2}) + A_i (H_{i+1/2}^{j+3/2} + H_{i-1/2}^{j+1/2})], \quad (21)$$

Здесь введены дополнительные обозначения H и E - напряженности магнитного и электрического полей, σ - электропроводность, \mathcal{J} - плотность электрических токов, F - магнитная сила, Q - джоулево тепло. Под $f^{(\sigma)}$ понимается интерполяция с весом σ функции f между двумя соответствующими временными слоями:

$$f_i^{(\sigma)} = \sigma f_i^{j+1} + (1-\sigma) f_i^j, \quad f_{i+1/2}^{(\sigma)} = \sigma f_{i+1/2}^{j+3/2} + (1-\sigma) f_{i+1/2}^{j+1/2}$$

а $f_*^{j+1/2} = 0.5 (f_{i+1/2}^{j+1/2} + f_{i-1/2}^{j+1/2})$ - пространственная интерполяция функции из полуцелых точек в узлы сетки.

Для обеспечения полной консервативности разностное выражение для силы Лоренца и для джоулевой диссипации должно быть записано в специальном виде (20), (21).

В схеме (15)-(21) использовано недивергентное уравнение энергии. Однако, можно показать, что оно может быть преобразовано к некоторому дивергентному разностному уравнению. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + m^2)$. Условие $\alpha = \beta = 0.5$ выделяет из семейства (15)-(21) единственную полностью консервативную схему со вторым порядком аппроксимации $O(\tau^2 + m^2)$.

Указанные полностью консервативные схемы для системы магнитогидродинамических уравнений могут быть получены при помощи интегро-интерполяционного метода при соблюдении пра-

вила отбора, аналогичного сформулированному выше для случая чисто газодинамики.

Отметим, что на практике в расчетах удобнее пользоваться недивергентными уравнениями. В частности, в уравнении (15) магнитная сила F может быть записана в дивергентном и недивергентном видах. В непроводящих областях $\sigma = 0$ электромагнитные силы отсутствуют и выражение для F должно обращаться в нуль. Этому требованию удовлетворяет недивергентный вид F , куда входит сомножителем. В то же время при вычислении F по дивергентной формуле фактически приходится брать разность близких величин. При больших значениях напряженности магнитного поля это может привести к потере точности и к появлению в областях $\sigma = 0$ фиктивных электромагнитных сил.

Полностью консервативная разностная схема типа (15)-(21) была реализована при расчете сильноточного разряда в плазме [5]. В задаче рассматривались процессы, возникающие в плазме в результате разряда батареи конденсаторов через плазменный цилиндр, находящийся в вакууме. Как показали расчеты, возникает сложное магнитогидродинамическое течение с большими пространственными градиентами и резкими изменениями параметров во времени.

При расчете этой задачи по обычным неявным схемам с недивергентным уравнением энергии [6] наблюдался дисбаланс полной энергии, который в различных вариантах составлял 20%-50% от начальной энергии батареи конденсаторов. Это приводило к физически абсурдному результату - энергия, вышедшая из системы в виде светового излучения, превшала начальный запас энергии.

Появление столь значительного дисбаланса в данной задаче объясняется тем, что ее решение является функцией, сильноменяющейся во времени и пространстве.

Применение полностью консервативных схем устранило этот дефект.

Литература

- 1 А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Об однородных разностных схемах, ЖВММФ, I, № I, (1969).
- 2 Ю.П.Попов, А.А.Самарский, Полностью консервативные разностные схемы, Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1969, 9, № 4, 953-958.
- 3 Von Neumann J., Richtmyer R.D., A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks., J. Appl. Phys. 21, 1949.
- 4 Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко, Системы квазилинейных уравнений, М., "Наука", 1968.
- 5 П.П.Волосевич, В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.Б.Розанов, А.А.Самарский, Б.Н.Четверушкин. Численный расчет сильнооточного разряда в литиевой плазме. IX международная конференция по явлениям в ионизированных газах. Сборник докладов стр.348, Бухарест, Румыния, 1969.
- 6 А.А.Самарский, П.П.Волосевич, М.И.Волчинская, С.П.Курдюмов. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. ЖВММФ, 8, № 5, (1968).