О КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

А. А. Самарский

Москва

1. Расширение области применения разностных методов и связанное с этим повышение требований к ним стимулируют интерес к формулировке общих принципов получения разностных схем заданного качества для задач математической физики. Возможность сопоставления одному и тому же дифференциальному уравнению бесчисленного множества разностных схем, заданных на одном и том же шаблоне и имеющих один и тот же порядок аппроксимации, делает задачу выбора нужной схемы весьма сложной. От любого численного метода требуется, чтобы он давал приближенное решение задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий. Кроме того, требуется, чтобы схема была универсальной (пригодной для достаточно широкого класса задач), однородной, устойчивой и экономичной (точнее, экономичным должен быть вычислительный алгоритм, применяемый для решения разностных уравнений).

Все эти требования конкурируют друг с другом.

Однородность схемы [1] означает, что разностный оператор определяется одной и той же формулой во всех узлах сетки для любых коэффициентов и правой части уравнения из заданного функционального класса, а также для произвольной сетки.

В дальнейшем всюду рассматриваются только однородные схемы.

2. В качестве одной из априорных характеристик схемы используется погрешность аппроксимации. Максимально возможный порядок аппроксимации на решении оценивается в предположении достаточной гладкости решения. Локальная (в точке) аппроксимация не является, вообще говоря, адекватной характеристикой схемы. Естественной нормой для оценки погрешности аппроксимации является негативная («интегральная») норма $\left(\text{вида } \|\psi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\psi, \psi)},\ A = A^* \text{ — положительно определенный оператор, в случае разностного уравнения } Ay = \psi\right)$.

В случае линейных устойчивых схем погрешность схемы непрерывно зависит от погрешности аппроксимации, так что погрешность аппроксимации определяет точность схемы. Для нелинейных уравнений (например, для уравнений газодинамики) такого типа оценки отсутствуют (до сих пор нет доказательства устойчивости какой-либо из разностных схем для газодинамики). Поэтому здесь критерий аппроксимации играет в значительной степени формальную роль и может давать неправильное представление о точности схемы ввиду наличия сильных разрывов.

Заметим, что сравнение схем по порядку точности имеет смысл лишь при достаточно малых шагах h и τ; при этом более высокая степень шага умножается на максимум производной решения более высокого порядка. Практически же используются весьма крупные сетки, на которых асимптотические оценки могут не работать. Может оказаться, что схема первого порядка точности на реальных сетках точнее схемы второго порядка точности.

Таким образом, критерий выбора схем нужно формулировать так: схема должна давать достаточную точность на реальных сетках для рассматриваемого класса задач.

С этой точки зрения следует учитывать, помимо математических аргументов (если они имеются), соображения качественного характера.

3. Одним из таких качественных требований является консервативность разностной схемы.

В чем состоит свойство консервативности схемы?

Для определенности будем говорить о задачах механики сплошной среды и магнитной гидродинамики, описываемых уравнениями в частных производных.

Приступая к решению задачи такого типа в некоторой области методом конечных разностей, вводят сетку в области G и заменяют дифференциальные уравнения разностными уравнениями для сеточных функций. В результате получают математическое описание дискретной модели среды. Очевидно, что дискретная модель должна отражать основные черты сплошной среды. Свойства сплошной среды определяются интегральными законами сохранения (количества движения, массы, энергии и т. д.) для любой подобласти G', содержащейся внутри G.

Дифференциальные уравнения суть следствия интегральных законов сохранения. Естественно требовать, чтобы разностные схемы выражали законы сохранения на сетке. Законы сохранения для всей сеточной области должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений. Схемы, обладающие этими свойствами, и называются консервативными.

Если 15—20 лет назад вопрос о том, должна ли быть схема консервативной («дивергентной»), мог служить предметом дискуссии, то в настоящее время мнение о необходимости требования консервативности является общепринятым.

Наряду с консервативными разностными схемами применяются и консервативные дифференциально-разностные схемы.

Общий метод интегральных соотношений для получения консервативных дифференциально-разностных схем был предложен А. А. Дородницыным [2] и применен для решения многомерных задач газодинамики. В дальнейшем этот метод получил развитие в работах его учеников [3].

Для получения консервативных разностных схем можно использовать интегро-интерполяционный метод или метод баланса [1].

Разностный оператор в пространстве сеточных функций должен сохранять основные свойства дифференциального оператора, заданного в пространстве функций непрерывного аргумента. Такими свойствами в линейном случае являются самосопряженность и знакоопределенность оператора. Ниже на примере схем для оператора Лапласа в произвольной области показана связь между самосопряженностью и консервативностью. Неконсервативный оператор является и несамосопряженным.

Недостатки, которыми обладают неконсервативные схемы, не устранимы. Сгущение сетки, на которое можно было бы рассчитывать для повышения точности, в случае неконсервативной схемы может даже увеличить ошибку схемы. Об этом свидетельствует пример [1] для задачи $(ku')'=0$, $0 < x < 1$, $u(0)=1$, $u(1)=0$.

Неконсервативная схема

$$[b_i(y_{i+1}-y_i)-a_i(y_i-y_{i-1})]/h^2=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

$$y_0=1, \quad y_N=0, \ h=1/N,$$

где $a_i=k_i-0{,}25\,(k_{i+1}-k_{i-1})$, $b_i=k_i+0{,}25\,(k_{i+1}-k_{i+1})$, расходится в случае кусочно-постоянного коэффициента $k(x)=k_{л}$ при $x<\xi$ и $k(x)=k_{п}$ при $x>\xi$, причем эта расходимость носит причудливый характер: решение $y^h(x_i)$ разностной задачи при $h\to 0$ имеет предел $\tilde{u}(x)$, не равный точному решению $u(x)$ дифференциальной задачи.

Предельная функция $\tilde{u}(x)$ представляет собой решение задачи с дополнительным условием: в точке $x=\xi$ разрыва коэффициента $k(x)$ помещен источник мощности q_0, зависящей от ξ, $k_л$, $k_п$, равной нулю лишь при $k_л=k_п$ и обращающейся в бесконечность при некоторых $k_л$, $k_п$, ξ. Таким образом, проверка точности сгущением сетки в данном случае может привести к неправильному выводу о сходимости неконсервативной схемы.

Отметим, что всякая разностная схема порождает фиктивные источники (стоки). В самом деле, пусть $\Lambda y+\varphi=0$ — некоторая разностная схема, u — точное решение дифференциального уравнения $Lu+f=0$. Невязка $\Lambda u+\varphi=\psi$ и есть погрешность аппроксимации; ее можно трактовать как плотность фиктивных источников.

Если схема консервативная, то $\psi(x)$ есть осциллирующая функция, так что всегда

$$(\psi,\ 1)=\sum_{x\in\omega_h}\psi(x)h\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

В самом деле, для уравнения $(ku')'=-f(x)$, $0<x<1$, уравнение баланса имеет вид

$$ku'\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

Соответствующая консервативная схема $(a(x)y_{\bar{x}})_x=-\varphi(x)$, $x=ih$, обладает аналогичным свойством на сетке:

$$w_N-w_1+(\varphi,\ 1)=0,\qquad w_i=a_iy_{\bar{x},i}=a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}.$$

Для $\psi=\Lambda u+\varphi$ получаем

$$(\psi,\ 1)=(au_x)_N-(au_{\bar{x}})_1+(\varphi,\ 1)=O(h^2),$$

если схема имеет второй порядок аппроксимации.

4. Консервативность однородной разностной схемы для уравнения

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)=-f(x),\qquad x=(x_1,\ \ldots,\ x_p)$$

необходима и достаточна для сходимости в классе разрывных коэффициентов. Для одномерного случая это утверждение доказано в [1]. В многомерном случае для произвольной области сходимость консервативной схемы со скоростью $O(\sqrt{h})$ доказана в [4]. Ниже будет приведена консервативная схема.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $G+\Gamma$ на плоскости $x=(x_1,\ x_2)$:

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=-f(x),\qquad x\in G,\qquad u|_\Gamma=\mu(x). \tag{1}$$

Для этого уравнения выполнено уравнение баланса

$$\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}ds+\int_G f(x)\,dx=0.$$

Пусть $\bar{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h$ — сетка в области $G+\Gamma$, описанная в [5]. Она равномерна (с шагами h_1 по x_1 и h_2 по x_2) в строго внутренних узлах $x\in\mathring{\omega}$ и неравномерна в приграничных узлах $x\in\omega^*$.

Рассмотрим сначала хорошо известную пятиточечную схему [5, 6]

$$\Lambda y=y_{\bar{x}_1x_1}+y_{\bar{x}_2x_2}=-f(x) \tag{2}$$

в регулярных узлах,

$$\Lambda y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -f(x) \tag{3}$$

в нерегулярных узлах, где

$$\Lambda_1^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y^{(+1_1)} - y}{h_1^*} - \frac{y - y^{(-1_1)}}{h_1}\right), \qquad \hbar_1 = 0{,}5\,(h_1 + h_1^*), \tag{4}$$

а h_1^* — расстояние нерегулярного узла $x \in \omega^{**}$ от граничного узла $x^{(+1_1)} \in \gamma_h$. Если $x^{(-1_1)} \in \gamma_h$ — граничный узел, а $x^{(+1_1)}$ — внутренний, то

$$\Lambda_1^* y = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y^{(+1_1)} - y}{h_1} - \frac{y - y^{(-1_1)}}{h_1^*}\right).$$

Покажем, что эта схема не является консервативной. Вводя обозначения

$$(y,\ v)_* = \sum_{x \in \mathring{\omega}} y(x)\,v(x)\,h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega^*} y(x)\,v(x)\,\hbar_1 \hbar_2, \tag{5}$$

получаем тождество

$$(\Lambda y,\ 1)_* = \sum_{x \in \omega^*} (y_{n_1} h_2^+ y_{n_2} h_1) + \Delta,$$

$$\Delta = \sum_{x \in \omega^*} [\Lambda_1 y \hbar_1 (\hbar_2 - h_2) + \Lambda_2 y \hbar_2 (\hbar_1 - h)],$$

где $y_{n_\alpha} = y_{x_\alpha}$, если $x^{(+1_\alpha)}$ — граничный узел, $y_{n_\alpha} = -y_{\bar{x}_\alpha}$, если граничным является узел $x^{(-1_\alpha)}$, $\alpha = 1,\ 2$.

Сравнивая с (2), (3), видим, что

$$\sum_{x \in \omega^*} (y_{n_1} h_2 + y_{n_2} h_1) + (\varphi,\ 1)_* = -\Delta, \qquad \Delta \neq 0,$$

т. е. схема (1) не консервативная.

Аналогично убеждаемся в том, что оператор Λ — не самосопряженный, т. е.

$$(\Lambda y,\ v)_* \neq (y,\ \Lambda v)_*,$$

где y и v — произвольные функции, заданные на сетке $\omega_h + \gamma_h$ и обращающиеся в нуль на границе γ_h.

Можно указать такую невыпуклую область и такую сетку, что оператор — Λ не будет положительно определенным.

Пользуясь интегро-интерполяционным методом [1], можно получить пятиточечную консервативную схему [4]:

$$\tilde{\Lambda} y = -f(x), \qquad x \in \omega_h, \qquad y\,|_{\gamma_h} = \mu(x). \tag{6}$$

В регулярных узлах оператор $\tilde{\Lambda}$ имеет обычный вид (2), а в нерегулярных узлах определяется так:

$$\tilde{\Lambda} y = \tilde{\Lambda}_1^* y + \tilde{\Lambda}_2^* y, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_1^* y = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y^{(+1_1)} - y}{h_1^*} - \frac{y - y^{(-1_1)}}{h_1}\right) = \frac{1}{h_1}(y_{x_1} - y_{\bar{x}_1}) = y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}, \tag{8}$$

$$\tilde{\Lambda}_2^* y = \frac{1}{h_2}\left(\frac{y^{(+1_2)} - y}{h_2^*} - \frac{y - y^{(-1_2)}}{h_2}\right) = y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}, \tag{9}$$

если $x^{(+1_1)}$ и $x^{(+1_2)}$ — граничные узлы. Нетрудно заметить, что

$$\tilde{\Lambda}_1^* = \frac{\hbar_1}{h_1}\Lambda_1^*, \quad \tilde{\Lambda}_2^* = \frac{\hbar_2}{h_2}\Lambda_2^*,$$

где Λ_1^* и Λ_2^* имеют вид (4).

На множестве Ω сеточных функций $y(x_1, x_2)$, заданных на сетке $\omega_h + \gamma_h$ и равных нулю на границе γ_h, введем скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)\, v(x)\, \hbar_1 \hbar_2.$$

Определенный выше оператор $\tilde{\Lambda}$ является самосопряженным в Ω:

$$(\tilde{\Lambda} y, v) = (y, \tilde{\Lambda} v) \text{ для любых } y, v \in \Omega,$$

а оператор $-\tilde{\Lambda}$ положительно определен на произвольной сетке в случае произвольной области.

В нерегулярных узлах оператор $\tilde{\Lambda}$ имеет нулевой порядок аппроксимации:

$$\tilde{\Lambda} u - Lu = O(1) \quad \text{при } x \in \omega^{**}.$$

Однако схема (6) имеет второй порядок точности

$$\| y - u \|_C = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Для уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x), \ x \in G, \qquad u|_\Gamma = \mu(x), \qquad k(x) \geqslant c_1 > 0$$

соответствующая консервативная схема в регулярных узлах имеет вид

$$\tilde{\Lambda} y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} = -f(x),$$

в нерегулярных узлах

$$\tilde{\Lambda} y = (a_1 y_{\bar{x}_1})_{\tilde{x}_1} + (a_2 y_{\bar{x}_2})_{\tilde{x}_2} = -f(x),$$

где

$$(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{\tilde{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(a_\alpha^{(+1_\alpha)} \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^*} - a_\alpha \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha} \right),$$

если $x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Коэффициенты a_α выбираются согласно [5].

5. Перейдем теперь к вопросу о консервативных схемах для уравнений магнитной гидродинамики [7, 8].

Рассмотрим сначала уравнения газодинамики, которые в переменных Лагранжа для плоского случая имеют вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad p = p(\rho, \varepsilon), \tag{11_1}$$

где t — время, r — эйлерова координата, x — лагранжева массовая координата, η — удельный объем, p — давление, ε — внутренняя энергия, v — скорость.

Недивергентное уравнение (11_1) можно записать в энтропийном виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{11_2}$$

а также преобразовать, используя уравнения (10), к дивергентному виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(pv), \qquad (11_3)$$

выражающему закон сохранения полной энергии. Три системы уравнений (10), (11_α), $\alpha=1, 2, 3$, эквивалентны друг другу.

Обычно считается (см. [9, гл. III]), что для получения консервативной схемы достаточно аппроксимировать три основных закона сохранения (баланса) — массы, импульса и полной энергии. Однако при этом могут быть нарушены уравнения баланса для отдельных видов энергии — внутренней, кинетической. Величина дисбаланса в случае сильно меняющихся решений может стать сравнимой с полной энергией.

Будем называть разностную схему полностью консервативной, если для нее справедливы как законы сохранения массы, импульса и полной энергии, так и детальный баланс энергии — кинетической и внутренней. Для получения таких схем, помимо требования консервативности, выдвигается формальное требование — разностная схема должна обладать тем же свойством, что и система дифференциальных уравнений (10), (11_α), а именно «дивергентное» разностное уравнение энергии (аналог (11_3)) должно преобразовываться как к недивергентному виду (аналогу (11_1)), так и к энтропийному виду (11_2).

На шеститочечном шаблоне $(x_i=ih,\ t_j=j\tau)$, $(x_i,\ t_{j+1})$, $(x_{i\pm1},\ t_j)$, $(x_{i\pm1},\ t_{j+1})$ рассматривается пятиточечное семейство схем. Требуя выполнения указанных выше условий, получаем однопараметрическое семейство полностью консервативных схем

$$v_t=-p_{\bar{x}}^{(\alpha)},\qquad r_t=v^{(0,5)},\qquad \eta_t=v_x^{(0,5)},\qquad \varepsilon_t=-p^{(\alpha)}v_x^{(0,5)}, \qquad (12)$$

где использованы обозначения $f^{(\alpha)}=\alpha\hat{f}+(1-\alpha)f$, $f=f^j$, $\hat{f}=f^{j+1}$, $f_t=(\hat{f}-f)/\tau$, α — произвольное число. При этом $v=v(x_i,\ t_j)$, $p=p(x_{i-1/2},\ t_j)$, $\eta=\eta(x_{i-1/2},\ t_j)$, $\varepsilon=\varepsilon(x_{i-1/2},\ t_j)$.

Недивергентное уравнение энергии $\varepsilon_t=-p^{(\alpha)}v_x^{(0,5)}$ преобразуется к дивергентному виду

$$\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)_t=-\left(p^{(\alpha)}(-1)\,v^{(0,5)}\right)_x,\qquad p(-1)=p(x-h), \qquad (13)$$

если воспользоваться уравнением движения $v_t=-p_{\bar{x}}^{(\alpha)}$ и формулой разностного дифференцирования произведения $(f(-1)\,v)_x=fv_x+vf_{\bar{x}}$.

В самом деле, имеем

$$\varepsilon_t=-p^{(\alpha)}v_x^{(0,5)}=-\left(p^{(\alpha)}(-1)\,v^{(0,5)}\right)_x+p_{\bar{x}}^{(\alpha)}v^{(0,5)}=$$
$$=-\left(p^{(\alpha)}(-1)\,v^{(0,5)}\right)_x-v_tv^{(0,5)}=-\left(p^{(\alpha)}(-1)\,v^{(0,5)}\right)_x-0{,}5\,(v^2)_t.$$

Отсюда и следует (13).

Схема (12) при любом α имеет аппроксимацию $O(\tau+h^2)$. Полагая $\alpha=0{,}5$, получаем единственную схему $O(\tau^2+h^2)$ (она также получена из несколько других соображений в [10]).

7. Перейдем теперь к системе уравнений магнитной гидродинамики. Пусть $H=H_z(x)$ и $E=E_y(x)$ — отличные от нуля компоненты магнитного и электрического полей.

В переменных Лагранжа система имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+F,\qquad F=-\sigma\eta EH,\qquad \frac{\partial r}{\partial t}=v,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\eta)=\frac{\partial E}{\partial x},\qquad E=\frac{1}{4\pi\sigma\eta}\frac{\partial H}{\partial x},\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial x}+Q,\qquad Q=\sigma\eta E^2,$$

где F — сила Лоренца, Q — джоулево тепло, σ — электропроводность.

Уравнение энергии можно заменить уравнением в энтропийной форме

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial \eta}{\partial t}+Q$$

и дивергентным уравнением для полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}+\frac{H^2\eta}{8\pi}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[v\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)-\frac{EH}{4\pi}\right].$$

Сила F может быть записана и в дивергентной форме

$$F=-\sigma\eta EH=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right).$$

Таким образом, мы получаем шесть эквивалентных систем уравнений.

Будем требовать, чтобы аналогичная эквивалентность имела место и для разностных схем. Рассматривая восьмипараметрическое семейство схем на указанном выше шеститочечном шаблоне, получаем двухпараметрическое семейство схем $O(\tau+h^2)$ и одну схему $O(\tau^2+h^2)$ (при $\alpha=\beta=0{,}5$):

$$v_t=-p_{\bar{x}}^{(\alpha)}-\left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}},\qquad r_t=v^{(0,5)},\qquad \eta_t=v_x^{(0,5)},$$

$$(H\eta)_t=E_x^{(\beta)},\qquad H_{\bar{x}}=4\pi\sigma_*\eta_*E,$$

$$\varepsilon_t=-p^{(\alpha)}v_x^{(0,5)}+\frac{1}{2}\left[(\sigma_*\eta_*E)^{(0,5)}E^{(\beta)}+(\sigma(+1)\eta(+1)E(+1))^{(0,5)}E_{(+1)}^{(\beta)}\right],$$

где $f_*=0{,}5\,(f+f(-1))$, $\quad f(\pm 1)=f(x\pm h,\ t)$.

Уравнение энергии может быть преобразовано к дивергентному виду

$$\left(\varepsilon+\frac{1}{4}\,(v^2+v^2(+1))+\frac{H^2\eta}{8\pi}\right)_t=-\left[\left(p_*^{(\alpha)}+\frac{(H\hat{H})_*}{8\pi}\right)v^{(0,5)}+\frac{H_*^{(0,5)}E^{(\beta)}}{4\pi}\right]_x.$$

Следует отметить, что консервативные схемы, аппроксимирующие уравнение полной энергии, могут плохо аппроксимировать уравнения для внутренней энергии и для магнитного поля. Этот дефект не менее опасен, чем нарушение закона сохранения полной энергии, и может приводить к неправильному счету температуры, в частности к такому нефизическому эффекту, как уменьшение температуры некоторой массы газа в процессе сжатия и при наличии джоулева нагрева. Возникающие здесь дисбалансы не могут быть уничтожены сгущением сетки по пространству.

В случае неявных схем для решения разностных уравнений применяются итерационные методы, которые, вообще говоря, могут нарушить консервативность схемы. Поэтому итерации нужно доводить до конца при заданной точности, которая и характеризует величину дисбаланса. При этом для упрощения вычислений целесообразно использовать уравнение энергии в недивергентной форме.

Для линейных разностных схем имеется довольно развитая теория, которая позволяет формулировать общие методы получения разностных схем заданного качества.

Укажем два достаточно общих метода:

1) метод регуляризации разностных схем, основанный на использовании класса устойчивых схем и возможности менять, не нарушая устойчивости, один из операторов схемы, чтобы удовлетворить дополнительным требованиям экономичности и аппроксимации;

2) метод суммарной аппроксимации, основанный на использовании нового понятия схемы и нового понятия аппроксимации для них — суммарной аппроксимации (такие схемы называются аддитивными).

Оба метода с успехом применяются, в частности, для получения экономичных разностных схем в случае многомерных задач математической физики. Изложение этих методов дано в [11]. Отметим, что во всех случаях консервативность схемы является непременным требованием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Об однородных разностных схемах. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, 1, № 1, 5—63.
2. *А. А. Дородницын.* Об одном методе численного решения некоторых задач аэродинамики. Тр. III Всес. матем. съезда, 1956. Т. III. М., «Наука», 1958, 447—453.
3. *О. М. Белоцерковский, П. И. Чушкин.* Численный метод интегральных соотношений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, 2, № 5, 731—759.
4. *А. А. Самарский, И. Ф. Фрязинов.* О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1971, 11, № 2, 385—410.
5. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики. Изд. 3. М., Физматгиз, 1966.
6. *А. А. Самарский.* Лекции по теории разностных схем. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1969.
7. *Ю. П. Попов, А. А. Самарский.* Полностью консервативные разностные схемы.— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1969, 9, № 4, 953—958.
8. *Ю. П. Попов, А. А. Самарский.* Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1970, 10, № 4, 990—998.
9. *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
10. *В. Я. Гольдин, Н. И. Ионкин, Н. Н. Калиткин.* Об энтропийной схеме расчета газодинамики. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1969, 9, № 6, 1411—1413.
11. *А. А. Самарский.* Некоторые вопросы общей теории разностных схем. В сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными». Тр. Симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева». М., «Наука», 1970, 191—223.