ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

В.Я. Гольдин Д.А. Гольдина, Г.В. Данилова, Н.Н. Калиткин
Д.В. Кузьмина С.П. Курдюмов, А.Ф. Никифоров, Ю.П. Попов,
В.С. Рогов, В.Б. Розанов, А.А. Самарский, В.Б. Уваров,
Л.С. Царева, Б.Н. Четверушкин

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОДИНАМИКИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ НА ЭВМ

Препринт № 36 за 1971 г

Москва

Аннотация

В части I описаны методы расчета одномерных задач магнитной радиационной газодинамики и соответствующие программы на ЭВМ, созданные большим коллективом сотрудников Института прикладной математики. Эти методы и программы позволили провести математическое моделирование широкого круга физических задач.

В части II излагаются расчеты сильноточных разрядов, проведенные по этим программам. В [100] рассматриваются отдельные эффекты или режимы, возникающие в сильноточных разрядах.

NUMERICAL COMPUTATION OF MAGNETO-RADIATIVE-HYDRODYNAMIC PROBLEMS

Part I contains the methods of numerical calculation of one-dimensional magneto-radiative-hydrodynamic problems and the codes for electronic digital computers, which were developed by the large group of scientific workers in the Institute of Applied Mathematics. Wide range of physical problems was investigated with these methods and codes.

Part II contains computations of strong-current discharges, made with these codes. Some phenomena arising in such discharges are considered in [100] .

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I

I. Введение 5
2. Методы численного решения МРГД - уравнений 9
3. Уравнение состояния и проводимость 14
4. Коэффициенты поглощения света в плазме 19
5. Задание свойств вещеотва таблицами 22
6. Программы для ЭВМ 24

ЧАСТЬ II

7. Задача о сильноточном излучающем разряде 26
8. Разряд в газе 33
9. Цилиндрический разряд в литии 40
I0. Коаксиальный разряд в литии 54
Литература 57

§ I. Введение

В данной работе описываются численные методы расчёта одномерных задач газодинамики с теплопроводностью, электромагнитным полем, переносом излучения и детонацией. В ней рассматриваются также методы расчета физических свойств плотной плазмы.

Данная работа продолжает работы по созданию численных методов решения задач математической физики на ЭВМ, начатые примерно 20 лет назад А.Н.Тихоновым, А.А.Самарским, В.Я.Гольдиным, Б.Л.Рождественским и Н.Н.Яненко [I-I2]. В дальнейшем в этих работах приняли участие В.Я.Арсенин, П.П.Волосевич, Н.Н.Калиткин, С.П.Курдюмов, А.Ф.Никифоров, И.М.Соболь и В.Б.Уваров [I3 - 27]. В настоящее время к этому коллективу присоединились Л.М.Дегтярев, Ю.П.Попов, А.П.Фаворский, Б.Н.Четверушкин [28 - 34] и другие. Аналогичные работы проводились рядом других научных коллективов [35 - 49].

Перечислим некоторые задачи, изучавшиеся численными методами указанным выше коллективом:

I) свойства и условия возникновения Т-слоя [50-53] ;

2) создание плазмы взрывом [56] ;

3) взаимодействие излучения с веществом [33, 34, 57, 58] ;

4) МГД - генераторы [52, 59] ;

5) сильноточные разряды [60, 53,30,33] ;

6) магнитная кумуляция [6I] ;

7) ускорение плазмы электромагнитным полем [62,63] ;

8) взаимодействие ударных волн с магнитным полем [3I,54,55].

Сформулируем основные требования, предъявляемые нами к разностным схемам. Во-первых, разностная схема должна годиться для широкого класса задач ; разработка нового метода для каждой отдельной задачи

невыгодна. Во-вторых, разностная схема должна быть однородной, то есть предусматривать единообразную форму записи без явного выделения особенностей решения; иначе трудно было бы вести расчеты сложных задач. В-третьих, схема должна быть экономичной и надежной, даже если разностная сетка далека от оптимальной.

Такие методы положены в основу описанного ниже комплекса программ на ЭВМ. Он позволяет решать задачи радиационной магнитной газодинамики (МРГД), в которых излучение имеет сложный спектр, и не находится в равновесии с веществом. Кроме переноса энергии излучением, учитывается и электронная теплопроводность.

Ранее такие методы и программы были разработаны для задач магнитной газодинамики с теплопроводностью [16].

Расчёты реальных задач требуют знания физических свойств используемых веществ. Зачастую в интересующих нас диапазонах температур и плотностей отсутствуют надежные экспериментальные и теоретические данные. В связи с этим были разработаны методы и программы расчета уравнения состояния, проводимости, электронной теплопроводности [19] и коэффициентов поглощения света [21,22]. Для состояний, далеких от критических, эти методы обеспечивают хорошую точность.

Круг допустимых задач мы ограничиваем следующими физическими приближениями:

1) движение одномерно;

2) токи смещения пренебрежимо малы;

3) магнитное поле не слишком велико, так что коэффициенты переноса в плазме изотропны;

4) в плазме имеется частичное термодинамическое равновесие, так что применимо одно-, двух или трехтемпературное описание плазмы;

5) давление и плотность энергии излучения пренебрежимо малы;

6) внешняя электротехническая цепь допускает одномерное описание ;

7) свойства вещества вблизи фазовых переходов учитываются только по порядку величины ;

8) поглощение света в линиях в большинстве расчетов не учитывается ;

9) явление пробоя не описывается детально, а учитывается эффективно постановкой начальных профилей температуры и плотности.

В данной работе новым шагом по сравнению с [16] является, во-первых, учет новых физических процессов: неравновесного излучения, детонации и электротехнической цепи. Во-вторых, расчёт свойств используемых веществ: коэффициентов поглощения света, проводимости, электронной теплопроводности и уравнения состояния. В-третьих, усовершенствование разностных методов: использование полностью консервативных разностных схем, потоковой прогонки и табличного представления свойств вещества.

Естественно, что расширение или изменение круга изучаемых проблем, а также повышение требований к точности может потребовать изменения существующих и создания новых методов расчета.

Созданный комплекс программ позволяет проводить математическое моделирование многих физических экспериментов. Сравнение контрольных расчетов с экспериментами служит критерием точности исходных приближений. Если основные данные эксперимента хорошо воспроизводятся в расчете, то математическое моделирование показывает полную динамику процесса, которую трудно наблюдать непосредственно в эксперименте, а также заменяет ряд дальнейших экспериментов.

Создание такого комплекса-крайне трудоемкая задача, эквивалентная созданию дорогостоящей физической установки. Зато проведение отдельного расчета по такому комплексу много быстрей и дешевле, чем

проведение отдельного эксперимента. Сами расчёты при этом становятся техническим элементом работы, а центр тяжести переносится на выбор физических приближений и анализ полученных результатов.

В части I данной работы излагаются общие сведения о методах и программах решения задач МРГД, в части II подробно описываются расчеты сильноточных разрядов. В работе [100] рассматриваются отдельные эффекты или режимы, возникающие в таких разрядах.

В заключение укажем в написании каких параграфов принимали участие авторы работы:

В.Я.Гольдин (§ 1,2,7,8,9,10), Д.А.Гольдина (§ 5,6,8,9), Г.В.Данилова (§ 6,9, 10), Н.Н.Калиткин (§ 1,2,3,5,7,8,9,10), Л.В.Кузьмина (§ 3), С.П.Курдюмов (§ 1, 2,7,8,9,10), А.Ф.Никифоров (§ 4,9,10), Ю.П.Попов (§ 2,7,8, 9,10), В.С.Рогов (§ 3), В.Б.Розанов (§ 7,8,9,10). А.А.Самарский (§ 1,2,7,8,9,10), В.Б.Уваров (§ 4,9,10), Л.С.Царева (§ 3,5,6,9,10), Б.Н.Четверушкин (§ 2, 7,8,9,10).

Другие сотрудники, способствовавшие выполнению работы, указаны в конце соответствующих параграфов.

§ 2. Методы численного решения МРГД-уравнений.

При составлении разностных схем мы исходим из полной системы уравнений, записанной в лагранжевых переменных. Эта система аппроксимируется системой двуслойных однородных консервативных разностных схем. Система разностных схем решается методом последовательных прогонок с линеаризацией по методу Ньютона.

Уравнения газодинамики имеют вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v, \tag{2.1}$$

$$\rho r^n dr = dm, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -r^n \frac{\partial}{\partial m}(P+\omega) + \frac{1}{\rho} F, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m}(W+W_н) - (P+\omega)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{q}{\rho}. \tag{2.4}$$

Здесь t -время, ρ -плотность, v -скорость, r -пространственная и m-массовая координаты, P -давление, ε -внутренняя энергия единицы массы, ω -вязкое давление, n =0,1,2 - показатель симметрии (соответственно плоской, цилиндрической и сферической), и F и q - Лоренцова сила и джоулево тепло, отнесенные к единице объема.

Поток энергии, обусловленный электронной или ионной теплопроводностью, равен:

$$W = -\varkappa \rho r^{2n} \frac{\partial T}{\partial m},$$

где T -температура и $\varkappa$ -коэффициент теплопроводности. Поток энергии излучения выражается через спектральную плотность потока:

$$W_н = r^n \int \left(\vec{\Omega}\frac{\vec{r}}{r}\right) I(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu)\, d\Omega\, d\nu$$

интегрированием по телесному углу Ω и частоте ν .

Для уравнений газодинамики в основу разностных схем положены полностью консервативные схемы [29,64,65]. Они обеспечивают выполнение баланса полной энергии и детального баланса между отдельными видами энергии (внутренней, кинетической. магнитной). В настоящее время расчеты проводятся по чисто неявному варианту этой схемы. Разностные аналоги уравнений (2.I)-(2.3) линеаризуются и решаются прогонкой совместно.

Расчёт плавления, детонации и других скачкообразных превращений вещества выполняется по тем же однородным схемам. Для этого уравнение состояния специальным образом видоизменяется вблизи критических значений температуры и плотности,что приводит к размазыванию скачка на несколько интервалов разностной сетки [25, 26].

Определение распределения температуры и потоков энергии из (2.4) проводится совместно с решением многогруппового или спектрального уравнения переноса излучения [33,34,66]:

$$\vec{\Omega}\nabla I_k + \varkappa_k I_k = \frac{\varkappa_k}{\pi}\sigma_k T^4, \qquad \sigma_k = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} I_{равн}(\nu)\frac{d\nu}{T^4}, \qquad (2.5)$$

где k -индекс группы, $\varkappa_k$-средний коэффициент поглощения для группы с учетом переизлучения, $I_{равн}(\nu)$ - спектральная интенсивность равновесного излучения. Граничные условия для этого уравнения учитывают как падающие потоки, так и возможность частичного отражения от одной границы в плоском случае.

Непосредственно по решению (2.5) определяются коэффициенты диффузии D_k, являющиеся дробно-линейными функционалами от I_k, и другие аналогичные параметры. Потоки излучения находятся из квазидиффузионной системы уравнений, эквивалентной (2,5) ;для одномерных задач она имеет следующий вид [33]:

$$\frac{1}{r^n}\cdot\frac{dW_k}{dr}+\varkappa_k U_k = 4\varkappa_k \sigma_k T^4,$$

$$\frac{d}{dr}(D_k U_k)+\frac{1}{r}E_k^{(n)}U_k+\varkappa_k\frac{W_k}{r^n}=0 \qquad (2.6)$$

Здесь U_k-групповая плотность излучения, а $E_k^{(n)}$ - параметр, учитывающий анизотропию излучения. В плоском и сферическом случае он соответственно равен:

$$E_k^{(0)}=0, \qquad E_k^{(2)}=3D_k-1,$$

а в цилиндрическом случае имеет более сложный вид.

Для решения (2.5) используется характеристическая разностная схема [9,32,67] , а для (2.6) - однородная консервативная разностная схема, решаемая прогонкой [68] . Уравнения (2.4) и (2.6) решаются совместно методом последовательных прогонок, и при этом используется ускорение сходимости итераций. Отметим, что D_k и аналогичные ему параметры слабо зависят от I_k ; это позволяет решать (2.5) не на каждом шаге по времени, а заметно реже [32,33].

В практически интересных задачах имеется только одна компонента каждого поля - электрического и магнитного (они перпендикулярны скорости и друг другу). Тогда для компонент, измеренных в связанной с веществом системе координат, уравнения электромагнитного поля принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_z}{\rho}\right)=-\frac{\partial}{\partial m}(r^n E_\varphi), \qquad E_\varphi=-\frac{r^n\rho}{4\pi\sigma}\frac{\partial H_z}{\partial m}; \qquad (2.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_\varphi}{\rho r^n}\right)=\frac{\partial E_z}{\partial m}, \qquad E_z=\frac{\rho}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial m}(r^n H_\varphi), \qquad (2.7б)$$

где σ - проводимость вещества. В этих уравнениях допустимы только n =0,I, так как сферически симметричным электромагнитное поле не может быть. В плоском случае под азимутальным направлением подразумевается ось ординат.

Граничные условия для уравнений (2.I)-(2.7) выбираются в соответствии с конкретной задачей. В ряде случаев их форма очевидна. Например, если конструкция ограничена жесткой стенкой, то надо полагать $v(r_{гр}, t) = 0$. Но есть и более сложные случаи. Так, граничное условие для электромагнитного поля в сильноточном разряде, описанном в части II, определяется из уравнения электротехнической цепи [30] :

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ - U + \frac{1}{C}\int_0^t J\,dt + E_z(r_{гр}, t) = -\zeta\frac{d}{dt}\left(J \ln\frac{r_*}{r_{гр}}\right). \qquad (2.8)$$

Здесь J – полный ток в системе, а L, R, U, C, r_*, ζ – параметры внешней цепи.

Разностная схема для (2.7) выбирается аналогично схеме для уравнения теплопроводности , так чтобы выполнялись физические законы сохранения ; при этом аналогом температуры является магнитное поле, и аналогом теплового потока – электрическое поле. Система (2.7)-(2.8) линейна, поэтому разностная схема решается безинтерационной прогонкой [30]. Аналог коэффициента теплопроводности – сопротивление – может обращаться в бесконечность, что потребовало разработки новых видов прогонки [28, 69, 70]. В расчетах используется потоковый вариант прогонки [70].

Разностная схема для каждого из уравнений (2.I)-(2.8) выбрана неявной. Однако полная схема будет неявной только в том случае, когда все разностные уравнения решаются совместно векторной прогонкой [39, 40]. Мы пользуемся более простым алгоритмом последовательных прогонок [I6, 7I], когда для перехода на новый шаг по времени группы разностных уравнений решаются последовательно.

При этом неявность полной разностной схемы нарушается, что налагает ограничения на шаг по времени. Для повышения "степени неявности" предусмотрено итрационное решение полной разностной схемы

с многократным повторением последовательных прогонок. Практически этот алгоритм достаточно надежен.

В заключение отметим, что в начальной стадии этой работы принимали участие П.П.Волосевич, М.И.Волчинская, Л.М.Дегтярев и А.П. Фаворский.

§ 3. Уравнение состояния и проводимость

I. Ионизация плазмы находилась решением уравнений Саха; в атомных единицах они имеют вид:

$$\frac{x_{i,k}}{x_{i,k-1}}x = f_{i,k}, \quad \sum_{k=0} x_{i,k} = x_i, \quad \sum_{i,k} k\, x_{i,k} = x,$$
$$\sum_i x_i = 1, \quad f_{i,k} = \frac{2u_{i,k}(T)}{n u_{i,k-1}(T)}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varphi_{ik}}{T}} \qquad (3.1)$$

Здесь T – температура, n – концентрация тяжелых частиц, x – средняя степень ионизации, x_i – доля данного элемента, $x_{ik}, u_{ik}, \varphi_{ik}$ – относительное содержание, статистическая сумма и потенциал ионизации k-го иона i-го элемента.

Можно показать, что степень ионизации является корнем уравнения

$$\Psi(x) \equiv x - \sum_i x_i \left(\sum_{k=0} k x^{-k} \prod_{l=1}^{k} f_{il}\right)\cdot\left(\sum_{k=0} x^{-k} \prod_{l=1}^{k} f_{il}\right)^{-1} = 0, \qquad (3.2)$$

где $\Psi(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, так что (3.2) имеет единственный положительный корень. Единственная трудность при нахождении корня заключается в том, что величины f_{ik} могут быть очень большими, так что их произведение часто выходит за допустимые на ЭВМ пределы. Это удалось преодолеть, выделяя в (3.2) наиболее существенные члены сумм.

С ростом k значения φ_{ik} возрастают, поэтому f_{ik}, как правило, убывают. Перебирая их, найдем такое $\varkappa(i)$, чтобы $f_{i,\varkappa} > x > f_{i,\varkappa+1}$; это значение $\varkappa(i)$ близко к средней ионизации данного элемента. Будем вычислять $\Psi(x)$ следующим образом:

$$\Psi(x) = x - \sum_i x_i \left(\sum_{k=0} k\, \xi_{ik}\right)\left(\sum_{k=0} \xi_{ik}\right)^{-1}, \quad \text{где } \xi_{i,\varkappa(i)} = 1,$$

$$\xi_{i,k} = \xi_{i,k-1} f_{ik}/x \ \text{ при } k > \varkappa(i); \quad \xi_{i,k} = \xi_{i,k+1}\, x/f_{i,k+1} \ \text{ при } k < \varkappa(i).$$

Тогда все $\xi_{i,k} \leq 1$, а суммы по k не меньше единицы, и проведение расчетов на ЭВМ осложнений не вызывает.

Если имеется только один элемент, и его двукратная ионизация мала, то удобна приближенная формула:

$$x_{i,1} \approx \sqrt{\varphi_{i1} + \frac{1}{4}\varphi_{i1}^2 + \varphi_{i2}^2} - \left(\frac{1}{2}\varphi_{i1} + \varphi_{i2}\right), \qquad x_{i,2} \approx \varphi_{i2} \qquad (3.3)$$

При этом первая ионизация не считается малой. При $\varphi_{i2} = 0$ эта формула переходит в точную формулу расчета однократной ионизации.

Известно, что в плотной плазме экранирование приводит к снижению потенциала ионизации:

$$\varphi_{ik}(x) \approx \varphi_{ik}(0) - \frac{k+1}{r_0}, \qquad r_0 = \left[\frac{4\pi n}{T}\sum_{i,k} k(k+1)\, x_{i,k}\right]^{-1/2}.$$

Это снижение учитывалось в расчетах. При вычислении статистических сумм учитывалось также, что экранировка и конечная плотность ограничивают число возбужденных уровней атома.

2. Зная состав плазмы, можно найти ее уравнение состояния. Давление и энергия равны:

$$P = (1+x)nT\left[1 - \frac{1}{18N} + \ldots\right], \quad E = \frac{3}{2}(1+x)T\left[1 - \frac{1}{9N} + \ldots\right] + q(T), \qquad (3.4)$$

где $q(T)$ – энергия, пошедшая на ионизацию и возбуждение уровней. В квадратных скобках стоят поправки на кулоновское взаимодействие; если плазма слабо неидеальна (число заряженных частиц в дебаевской сфере $N \geq 1$), то ими можно пренебречь.

Рассеяние электронов на электронах и ионах при $N \geq 1$ хорошо описывается экранированным кулоновским потенциалом, а рассеяние электронов на нейтральных атомах берется из эксперимента. Зная рассеяние, можно найти проводимость и электронную теплопроводность из решения системы уравнений Больцмана для многокомпонентной плазмы.

Авторами были выполнены такие расчёты в четвертом приближении Чепмена-Энскога [72,73].

В проведении численных расчетов на ЭВМ участвовали В.А.Красноярова и И.А.Говорухина. Были составлены таблицы физических свойств большого числа веществ и смесей x/; в качестве примера приведена табл.I. Расхождение расчетов с экспериментами [74,75] не превышает 8%, что хорошо видно из рис.I.

3. В рамках той же теории нетрудно учесть двухтемпературноеть плазмы. Если температуры электронов и ионов различны, то изменения в уравнении состояния (3.4) при этом очевидны; выражение для $f_{ik}(T)$ также будет содержать две температуры. Что же касается проводимости, то радиус экранировки кулоновского потенциала станет:

$$r_0 = \left[4\pi\left(\frac{n_e}{T_e} + \frac{1}{T_и}\sum z_и^2 n_и\right)\right]^{-1/2},$$

а во все остальные выражения войдет только электронная температура, так как они определяются возмущениями именно электронной функции распределения xx/.

---

x/ Первые расчёты были выполнены нами в 1967 году.

xx/ Это было бы неверно только если ионная температура была настолько выше электронной, что движением ионов нельзя было пренебречь.

Табл. I. Проводимость плазмы σ $ом^{-1}$ $см^{-1}$

состав	$T_{эв}$ / $\lg n_{см^{-3}}$	.500 +0	.707 +0	.I00 +I	.I4I +I	.200 +I	.283 +I	.400 +I
литий	I7	.I07 +2	.2I8 +2	.349 +2	.547 +2	.859 +2	.I36 +3	.2I3 +3
	I8	.827 +I	.249 +2	.45I +2	.707 +2	.II0 +3	.I70 +3	.266 +3
	I9	.469 +I	.226 +2	.547 +2	.946 +2	.I48 +3	.227 +3	.348 +3
	20	.247 +I	.202 +2	.675 +2	.I27 +3	.207 +3	.3I3 +3	.464 +3
аргон	I7	.433 +0	.I04 +2	.288 +2	.533 +2	.72I +2	.859 +2	.I08 +3
	I8	.I53 +0	.726 +I	.308 +2	.657 +2	.I06 +3	.I20 +3	.I50 +3
	I9	.505 -I	.376 +I	.297 +2	.785 +2	.I47 +3	.I9I +3	.230 +3
	20	.I62 -I	.I58 +I	.229 +2	.89I +2	.207 +3	.32I +3	.383 +3
	2I	.5I4 -2	.583 +0	.I34 +2	.932 +2	.328 +3	.593 +3	.7I7 +3
ксенон	I7	.276 +I	.I50 +2	.328 +2	.50I +2	.570 +2	.83I +2	.II0 +3
	I8	.I35 +I	.I38 +2	.382 +2	.689 +2	.8I8 +2	.II3 +3	.I53 +3
	I9	.528 +0	.992 +I	.378 +2	.9I4 +2	.I33 +3	.I62 +3	.230 +3
	20	.I83 +0	.547 +I	.37I +2	.II9 +3	.2I7 +3	.272 +3	.360 +3
	2I	.602 -I	.254 +I	.300 +2	.I92 +3	.574 +3	.602 +3	.72I +3
воздух	I7		.3II +0	.703 +I	.437 +2	.808 +2	.923 +2	.I24 +3
	I8		.I0I +0	.259 +I	.263 +2	.955 +2	.I34 +3	.I73 +3
	I9		.323 -I	.877 +0	.I04 +2	.670 +2	.I86 +3	.25I +3
	20		.I04 -I	.298 +0	.379 +I	.28I +2	.I36 +3	.348 +3
	2I		.34I -2	.I05 +0	.I53 +I	.I30 +2	.675 +2	.269 +3

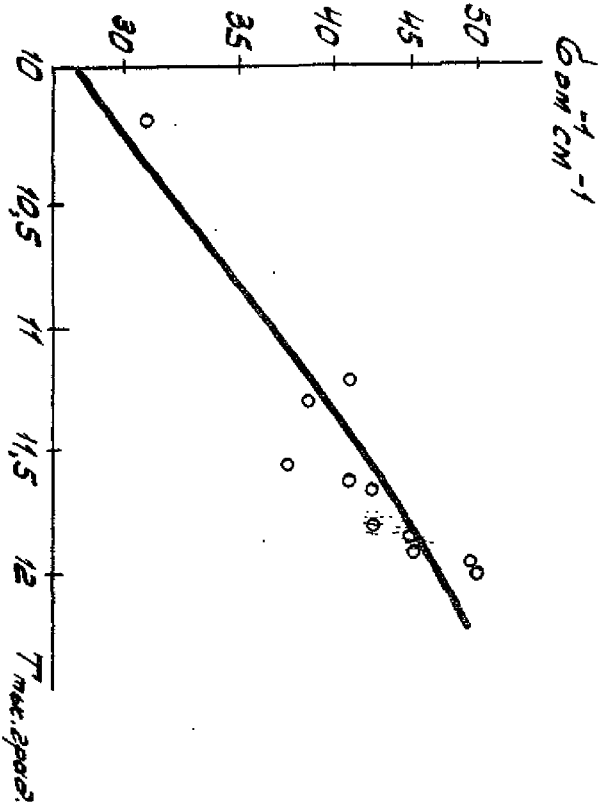
текстолит	I7		.200 +I	.I72 +2
	I8		.708 +0	.89I +I
	I9		.285 +0	.348 +I
	20		.776 +I	.I26 +I
	2I		.263 -I	.473 +0

Числа в таблице представлены в форме,

Рис. 1

.50I +2	.795 +2	.997 +2	.I30 +3
.452 +2	.I03 +3	.I38 +3	.I84 +3
.257 +2	.I03 +3	.20I +3	.266 +3
.II0 +2	.6II +2	.2I2 +3	.399 +3
.492 +I	.327 +2	.I45 +3	.456 +3

выдаваемой ЭВМ: $(.205 + 3) = 0.205 \times 10^3$



§ 4. Коэффициенты поглощения света в плазме

При температурах порядка нескольких электронвольт основными процессами взаимодействия излучения с веществом являются, как правило, процессы фотоионизации и тормозного поглощения в поле ионов. В результате сравнения характеристик различных методов расчета коэффициентов поглощения света были выбраны следующие методы.

Расчёты тормозного поглощения производились для кулоновского поля ионов в приближении Борна-Эльверта [77,78]. Для вычисления эффективных сечений фотоионизации применялся полуэмпирический метод Л.А.Вайнштейна [79], опирающийся на использование экспериментальных значений энергии уровней. Степень ионизации вещества определялась по формулам Саха-Больцмана [80], несколько видоизмененным в связи с учетом взаимодействия свободных электронов и ионов. Дискретно-дискретные переходы в данных расчетах не учитывались. Более подробное изложение применяемых методов содержится в [21].

Коэффициенты поглощения вычислялись для литиевой плазмы в широкой области температур, плотностей и энергий фотонов, встречающейся при численном расчете сильноточного разряда, полученного электрическим взрывом литиевой проволочки в вакууме.

Расчёты производились по программам, составленным Н.Н.Кучумовой и А.С.Скоробогатовой. Кроме того, частично использовалась программа для вычисления сечений фотоионизации, составленная в ФИАН.

Некоторые результаты расчета коэффициентов поглощения света в литии приведены на рис. 2,3. По оси абсцисс отложен логарифм энергии фотона ω (в электронвольтах), а по оси ординат-логарифм коэффициента поглощения $\kappa(\omega)$ в единицах $[см^{-1}]$. На рисунках пока-

заны кривые, соответствующие достаточно характерным для данных явлений температурам и плотностям:

$T_1 = 3.2$ эв, $T_2 = 5.6$ эв, $\rho_1 = 10^{-3}\ \frac{г}{см^3}$, $\rho_2 = 10^{-5}\ \frac{г}{см^3}$.

Скачки кривых соответствуют началу фотоионизации определенных уровней лития.

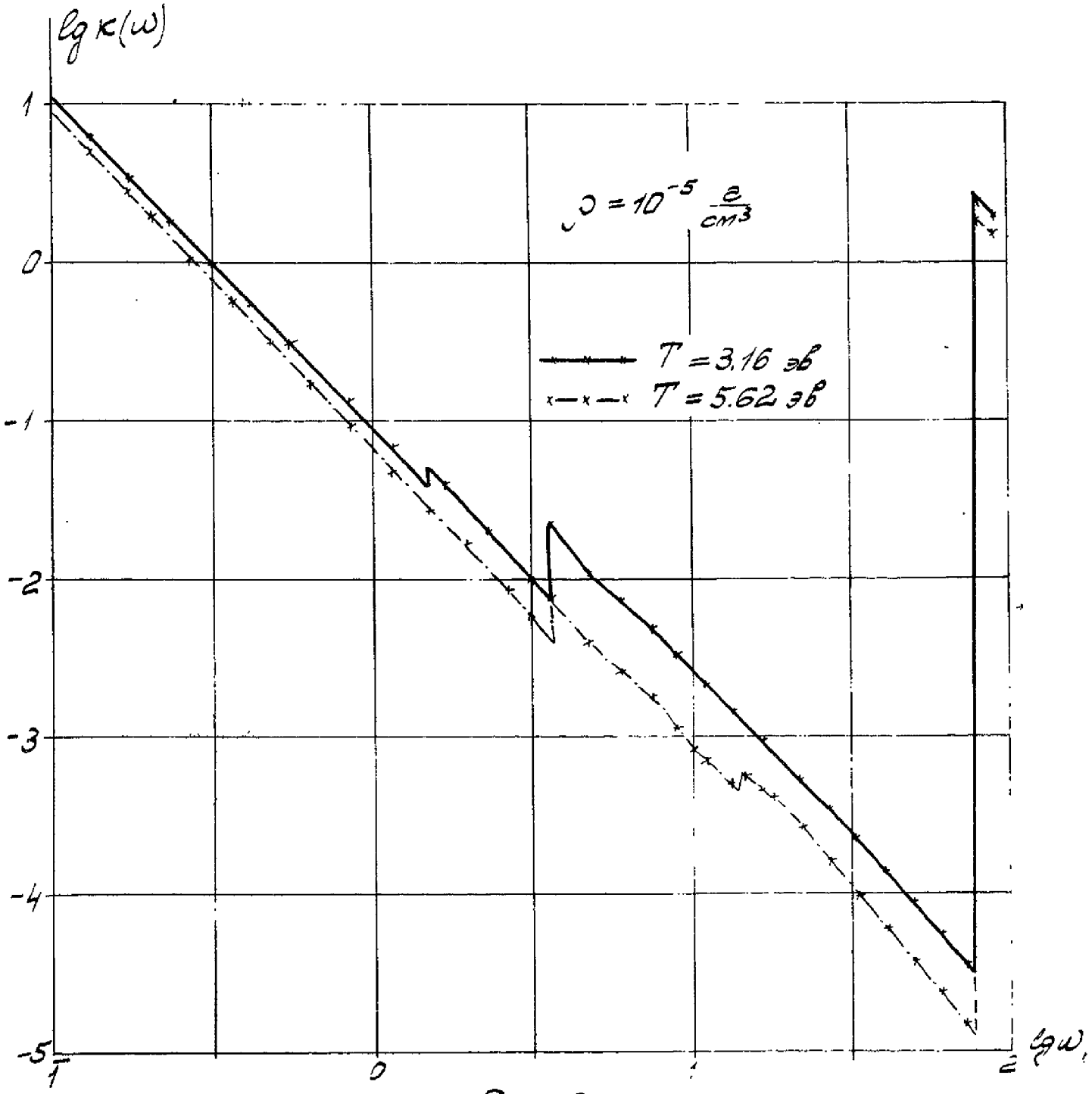


Рис. 2

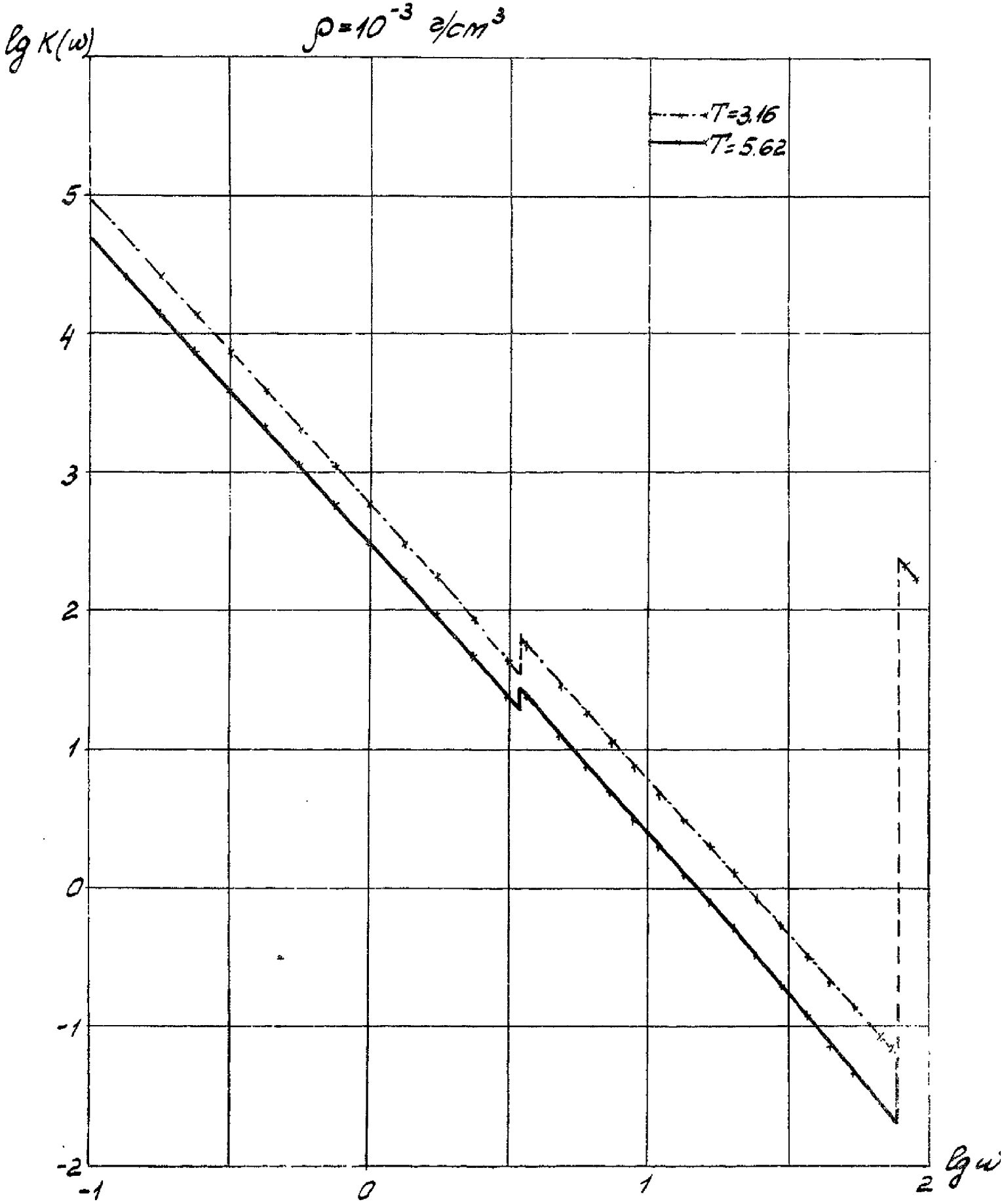


Рис. 3

§ 5. Задание свойств веществ таблицами

Сведения о зависимости физических свойств веществ от температуры и плотности получаются с помощью трудоемких квантово-механических расчетов в виде таблиц.

По ранее принятой практике, для использования в МРГД-программах требовалось заменить такие таблицы интерполяционными формулами. Но составление хороших интерполяционных формул – сложная и длительная задача. Поэтому в данной программе был использован предложенный авторами в 1966 г. метод непосредственной интерполяции по таблицам.

Он основан на том, что зависимости физических величин от T и ρ обычно близки к степенным. Поэтому линейная интерполяция в логарифмических переменных даже при большом шаге таблицы обеспечивает удовлетворительную точноость. Это позволяет пользоваться таблицами с большим шагом, которые имеют малый объем и занимают незначительную часть оперативной памяти оовременных ЭВМ.

Опишем экономичную схему расчета. Пусть имеется двумерная таблица физической величины $F_{nk} = F(T_n, \rho_k)$. Включим в программу таблицу:

$$z_{nk} = \ln F_{nk}, \quad x_n = \ln T_n, \quad y_k = \ln \rho_k.$$

Тогда для вычисления $F(T,\rho)$ сначала найдем такие узлы таблицы, чтобы

$$x_n \le \ln T \le x_{n+1}, \qquad y_k \le \ln \rho \le y_{k+1}.$$

Затем линейной интерполяцией получим:

$$F = e^{z}, \quad \text{где} \quad z = (1-\xi)(1-\eta) z_{n,k} + (1-\xi)\eta z_{n,k+1} + \xi(1-\eta) z_{n+1,k} +$$

$$+ \xi\eta z_{n+1,k+1}, \qquad \xi = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, \quad \eta = \frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k}. \qquad (5.1)$$

Если требуются производные данной физической величины, то находим их дифференцированием (5.1), например,

$$\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{F}{T}\,\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \rho}=\frac{F}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Если используются таблицы с постоянными по x и по y шагами, то нужные узлы находятся по формулам:

$$n=\left[\frac{\ln T-x_0}{\Delta x}\right], \qquad k=\left[\frac{\ln \rho-y_0}{\Delta y}\right],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Этот прием экономизации расчёта был предложен В.Б.Уваровым.

Практически для большинства задач оказались достаточными таблицы, содержащие 10x8 точек. При этом точность расчёта была выше, а время расчёта меньше, чем по имевшимся ранее интерполяционным формулам.

Сделаем некоторые замечания. Если значения аргументов выходят за пределы таблицы, то надо пользоваться для экстраполяции физическими асимптотиками. Для единообразия счета бывает удобно ввести в таблицу дополнительные окаймляющие ряды, рассчитанные по асимптотической экстраполяции крайних рядов. Тогда экстраполировать за пределы таблицы можно по формуле (5.1).

Шаги таблицы целесообразно брать малыми вблизи фазовых переходов, и довольно большими в тех районах, где величины меняются плавно.

Таблицы свойств смесей веществ получаются из таблиц для отдельных веществ специальными усреднениями, основанными на равенстве давлений и температур компонент смеси.

§ 6. Программы для ЭВМ

Подобно разностным схемам, программы МРГД написаны в расчете на широкий класс одномерных задач. Некоторые задачи, решавшиеся по этим программам, перечислены во введении.

Рассчитываемая конструкция может иметь плоскую, цилиндрическую или сферическую геометрию (в последнем случае – без магнитного поля) Она может состоять из 10(8) областей x/, имеющих различные составы и тем самым различные физические свойства: термодинамические функции, коэффициенты теплопроводности, электропроводности и поглощения света. Зависимость этих величин от температуры и плотности может задаваться интерполяционными формулами или таблицами.

Программы допускают широкий набор граничных условий. Для сферической и цилиндрической геометрий на левой границе обычно ставится естественное условие симметрии. В остальных случаях могут ставиться условия, соответствующие заданному закону движения границы или заданному на границе давлению, заданной электротехнической цепи, падающему излучению и так далее. В частности, возможно задание свободной внешней границы или неподвижной стенки.

Для расчета конкретной задачи надо указать симметрию, число областей и тип граничных условий, и задать свойства веществ (таблицами или формулами) и начальные распределения полей и газодинамических величин.

Программа допускает использование до 120(70) точек разностной сетки по пространству, а в уравнении переноса излучения до 20x4 (12x8) точек по углам и до 50(8) групп.

---

x/ Первое число относится к БЭСМ-6, число в скобках – к БЭСМ-4.

Программа разбита на части, соответствующие основным уравнениям. При такой организации передача информации из части в часть невелика. Это дает ряд преимуществ. Во-первых, легко выключить из счета неиспользуемую часть (например, магнитную часть в задачах газодинамики с излучением). Во-вторых, проще компановка программы на ЭВМ с недостаточной оперативной памятью. В-третьих, упрощается отладка программы.

Требования к точности сходимости и числу итераций разного уровня (внутри частей и между частями) задаются в информации к задаче. Скорость сходимости итераций зависит от того, насколько порядок счета частей соответствует их важности в тех физических процессах, которые протекают в данный момент. Поэтому программа допускает смену порядка частей и числа итераций в ходе расчета.

На магнитной ленте хранятся программы, характеристики задачи и результаты счета. Во время счета программы и весь численный материал располагаются в оперативной памяти (а на БЭСМ-4 еще на двух барабанах).

Результаты расчетов выдаются на широкую печать. Выдачи делаются через заданное число шагов или в заданные моменты времени. В выдаче содержатся величины, позволяющие судить о физических процессах и о математическом качестве расчета. Для удобства все зависящие от радиуса величины (плотность, температура и другие) выдаются параллельными столбцами ; слева приведена общая для всех столбцов разметка областей и счетных точек ; оами величины выдаются с четырьмя значащими цифрами.

Приведем технические данные типичного расчета - взрыва толстой проволочки: число точек по радиусу - 40, по углу μ-8, по углу γ-2, число групп - 5, две области ; время счета одного шага 6(60) секунд. При этом основное время занимают расчеты кинетического уравнения и свойств вещества.

ЧАСТЬ II

§ 7. Задача о сильноточном излучающем разряде

Исследование сильноточных разрядов в плазме проводилось в связи с изучением управляемого термоядерного синтеза [81-84], газоразрядных ламп [85] и других проблем. Численные расчеты таких разрядов выполнены, в основном, для разреженной высокотемпературной плазмы, в которой процессы переноса излучения несущественны [45, 86].

В ФИАНе СССР в лаборатории Н.Г.Басова , начиная с 1965 г. Б.Л.Боровичем, В.С.Зуевым, А.Д.Клементовым, Г.В.Михайловым, Ф.А.Николаевым, В.Б. Розановым, Ю.П.Свириденко и Ю.Ю.Стойловым проводятся экспериментальные и теоретические исследования сильноточных разрядов [87-92] . Цель этих работ - изучение возможности создания импульсных источников излучения для накачки ОКГ. В ИПМ АН СССР проводится моделирование таких разрядов на ЦВМ.

Схематически опишем эти эксперименты. Мощная батарея конденсаторов разряжается через проволочку, которая располагается или в вакуумной камере, или в атмосфере какого-либо газа (рис.4). Процесс электрического взрыва проволочек сопровождается испарением металла, падением вследствие этого проводимости среды; "паузой тока", явлением пробоя паров и наконец, сильноточным разрядом через образовавшуюся плазму. В случае взрыва проволочки в вакууме основной разряд происходит по ионизированным парам металла. Взрыв проволочки в газе создает температурно-ударную волну так, что в этом случае масса горячей плазмы растет с течением времени.

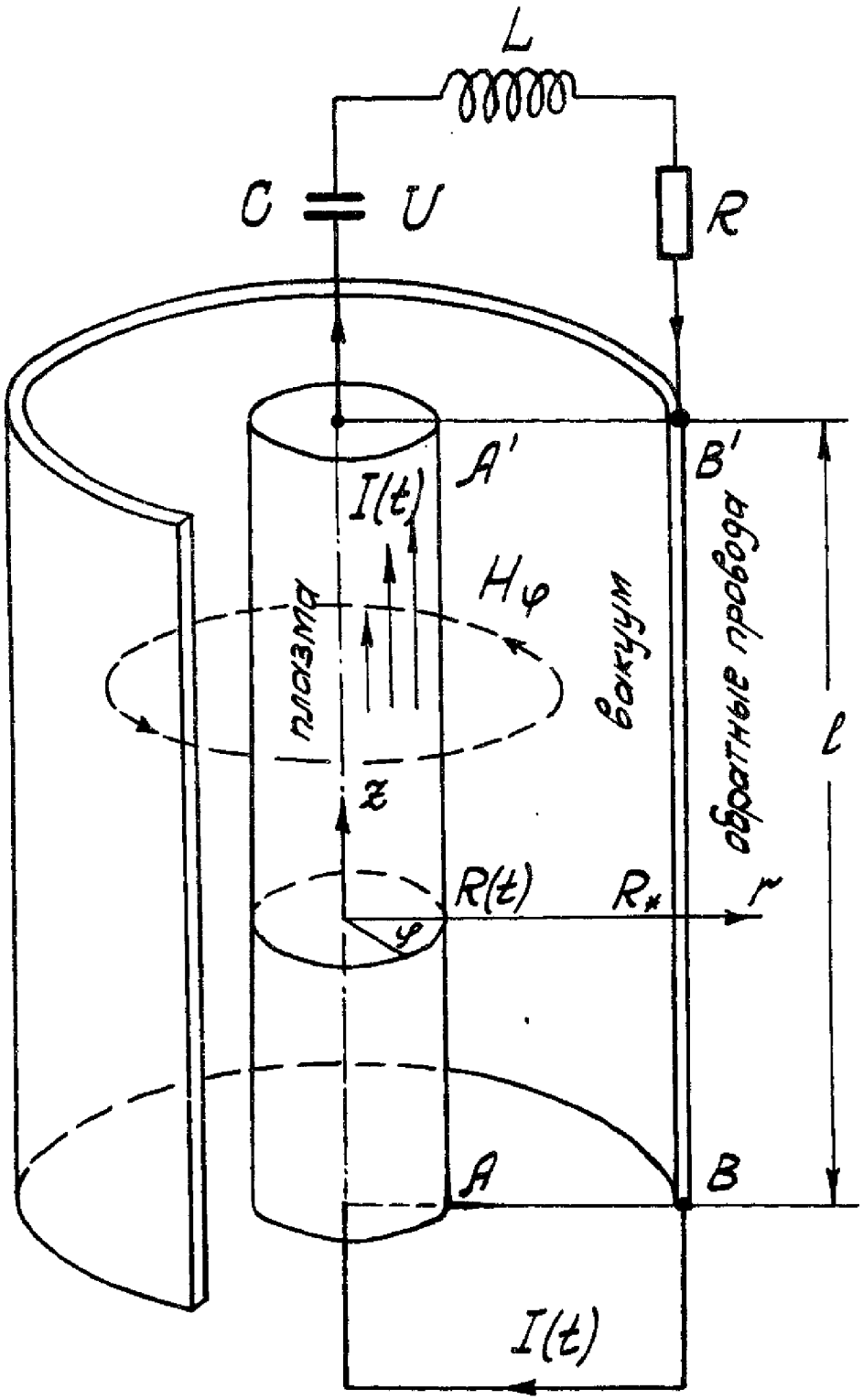

L
C
U
R
A'
B'
I(t)
H_φ
плазма
вакуум
обратные провода
l
z
R(t)
R_*
r
φ
A
B
I(t)

Рис. 4

Основная доля энергии конденсаторной батареи выделяется в виде Джоулева тепла.

Плотность плазмы в мощных разрядах составляет $10^{-17} \div 10^{19}$ см$^{-3}$, а ее температура доходит до нескольких электроновольт. Возникающие в процессе разряда магнитные поля достигают величины 30÷50 килоэрстед. Они задерживают разлет плазмы и могут приводить к пинчиванию и образованию квазистационарных режимов в плазме. Поэтому время излучения в таких разрядах оказывается много больше характерных газодинамических времен. Благодаря этому большая доля вложенной в плазму энергии успевает перейти в излучение.

Для целей накачки ОКГ представляет интерес не только интенсивность излучения; но и его спектральный состав. В.Б.Розановым был предложен плазменный источник с селективным излучением на основе литиевой плазмы [93]. В этой работе было построено стационарное решение, позволившее провести ряд предварительных оценок такого источника. Перенос излучения в среде рассматривался в рамках нелинейной теплопроводности или объемного излучения; уравнения состояния и закон проводимости плазмы брались в упрощенном виде.

Изучаемые сильноточные разряды в основном удовлетворяют требованиям перечисленным в I-ой части. Остановимся подробнее на некоторых из них:

I. В плазме, с указанными выше параметрами, характерное время установления равновесных распределений x/ гораздо меньше характерного газодинамического времени [94]. Поэтому плазму можно считать равновесной и, в частности, пользоваться однотемпературным описанием и приближением магнитной гидродинамики. Однако, излучение,

x/ т.е. распределений частиц по скоростям, по уровням возбуждения атомов и ионов, степени ионизации.

вообще говоря, не находится в равновесии с плазмой.

2. Хотя магнитные поля в разряде и велики, ларморовская частота в 10÷100 раз меньше частоты Кулоновских соударений. Поэтому транспортные коэффициенты (проводимость и электронная теплопроводность) изотропны.

3. Наименее обосновано предположение об одномерности процесса. Правда зависимость от азимутального угла уменьшена цилиндрическисимметричным расположением обратных проводов в разрядной камере (рис.4). Однако, в плазме возможны неустойчивости [94-96], которые по-видимому, наблюдались в экспериментах [88,92]. Поэтому одномерное описание следует отнести только к осредненной картине явления.

4. Эксперименты показывают, что количество вложенной в плазму энергии во много раз больше энергии фазовых переходов. Движение границ плазмы определяется пондермоторными силами. Все это делает естественным предположение, что развитая стадия сильноточного разряда слабо зависит от выбора начальных данных. При этом предположении можно не рассматривать стадию фазового перехода, "паузы тока" и пробоя, а начинать расчёт сильноточного разряда с некоторых довольно произвольных распределений температуры и плотности.

Заметим, что чисто экспериментальное изучение явления сопряжено с большими трудностями, т.к. ряд важных характеристик разряда не измеряется прямыми методами. Характеристики разряда непосредственно измеряемые в экспериментах можно условно разбить на две группы.

Первая - интегральные характеристики: полный ток, напряжение, сопротивление разрядного столба плазмы, полная излученная энергия, а также энергия излучения в отдельных спектральных участках

(достаточно широких). Эти величины измеряются достаточно надежно и точно.

Вторая группа - "локальные" величины: газодинамические распределения (плотности, температуры, скорости и т.д.), плотности токов, профили магнитного и электрического полей. На точность этих измерений влияют датчики, вносимые внутрь разряда. По ряду причин интерпретация этих измерений оказывается более трудной и менее точной.

Систематическое сопоставление расчетов с экспериментами способствовало пониманию картины сложного взаимодействия различных нелинейных процессов и в ряде случаев приводило к постановке дополнительных экспериментов и выяснению какие положения исходной модели требуют уточнения.

Перечислим кратко, что дали в понимании процессов сильноточного разряда нестационарные расчеты, проведенные с учетом переноса излучения, физических свойств плазмы и внешней электротехнической цепи (указанные ниже явления подробнее разобраны в следующих параграфах).

I. Расчёты сильноточного разряда в газе содержат основные качественные черты экспериментально изучаемого явления. Вопрос количественного согласования сводится к использованию в расчетах достаточно точных теплофизических и оптических характеристик вещества.

2. Удовлетворительно описывается расчетами изменение со временем ряда интегральных характеристик разряда в вакууме (движение границы горячей зоны, полный ток через плазму, энергетический баланс разряда и др.)

3. Было установлено, что в ряде случаев в сильноточных разрядах возникают различные режимы близкие к стационарным. Однако эти

стационарные режимы существенно отличаются от стационарного решения построенного в [93], и их характер зависит от свойств среды. На характере устанавливающихся стационарных режимов сказывается также наличие в плазме возмущений конечной амплитуды.

4. Существенно изменился взгляд на влияние линий на излучательную способность плазмы. Ранее считалось [94], что в расчете переноса излучения можно не учитывать линии, так как по данным эксперимента они играли малую роль в энергетическом балансе. Однако, оказалось, что излучение в линиях (в том числе в примесных) может влиять на устойчивость режимов, ограничивая развитие перегревной неустойчивости в плазме.

5. Расчёты сильноточного разряда в вакууме приводят как правило к образованию одного или нескольких высокотемпературных Т-слоев, развивающихся из-за перегревной неустойчивости плазмы. Проведенные измерения профилей ряда величин в рассматриваемом разряде не обнаружили высокотемпературных зон. Объяснение этого расхождения можно искать в недостатках рассчитываемой модели, о которых говорилось выше.

6. При некоторых начальных условиях в расчетах наблюдалось образование нескольких Т-слоев, что при отсутствии осевой симметрии могло инициировать наблюдаемую в эксперименте [97] сложную структуру разряда в первой четверти периода тока.

7. Было обнаружено влияние закона проводимости на устойчивость стационарного режима в плазме [100]. Для определенных зависимостей $\sigma = \sigma(T, \rho)$, при учете нелинейной теплопроводности удалось построить кроме стационарного решения еще и принципиально другой асимптотический режим - автомодельный режим разлета плазмы. Нестационарные расчеты показали выход на автомодельный режим. В том случае,

когда задавались законы $\sigma = \sigma(T, \rho)$ и $\varkappa = \varkappa(T, \rho)$ использованные в [93, 94] нестационарный расчет приводил к выходу на стационарный режим построенный в этой работе.

Сопоставление стационарных и автомодельных решений с численными расчетами позволило сформулировать качественные соображения об условиях устойчивости стационарных режимов.

8. Расчёты нагрева и фазового превращения металла в плазму помогли выбрать начальный профиль температуры и плотности, для которого расчеты оказались устойчивыми по отношению к малым отклонениям [100].

9. Математическая точность численных расчётов проверялась и оказалась достаточно хорошей. Поэтому количественные отличия расчетов от эксперимента связаны с неточностью исходной модели. Укажем основные направления дальнейшей работы.

Во-первых, в расчетах требуется учесть точный спектр излучения, включая излучение в линиях рабочего вещества и случайных примесей. Для этого необходимы фундаментальные квантово-механические расчеты оптических свойств плазмы, корректированные по специальным экспериментам.

Во-вторых, нужно построить теорию пробоя нейтральных паров или газов, и уточнить модель испарения проволочки. В-третьих, надо либо научиться рассчитывать неодномерную задачу, либо сформулировать такой способ осреднения величин по углу и высоте, который позволяет применить одномерное описание.

§ 8. Разряд в газе

I. Электрический взрыв проволочек в газовой среде имеет свои специфические особенности; в газе, заполняющем разрядную камеру, образуются тепловые ударные волны и развивается горячая центральная зона. Интенсивность и характер спектра выходящего излучения определяется свойствами газа.

Качественно основные этапы разряда в газе списаны в [83], в [89] [90] для начальной стадии разряда, когда магнитные силы еще малы, построено автомодельное решение.

Исследование задачи сводится к решению системы уравнений МРГД. Так как обычно масса проволочки мала по сравнению с массой окружающего газа, то в расчётах она исключается из рассмотрения. Исходное состояние системы – газ, равномерно заполняющий разрядную камеру при атмосферном давлении и комнатной температуре 0,03эв Для того, чтобы смоделировать начальную стадию взрыва проволочки, по оси системы задается узкая ($\eta \sim 0,5$ см) зона с температурой ~ 3 эв.

В качестве газа рассматривался воздух. В работах [89], [94] отмечается, что в экспериментах по взрыву проволочек в воздухе энергия выходящего излучения невелика по сравнению с энергией, введенной в разряд.

В первом варианте расчета (I) коэффициент поглощения излучения, осредненный по Росселанду был взят в виде $\varkappa_p = 1,4706 \cdot 10^{-6} \cdot \rho^{1,75} \cdot T_{ev}^{-1,33}$ см$^{-1}$

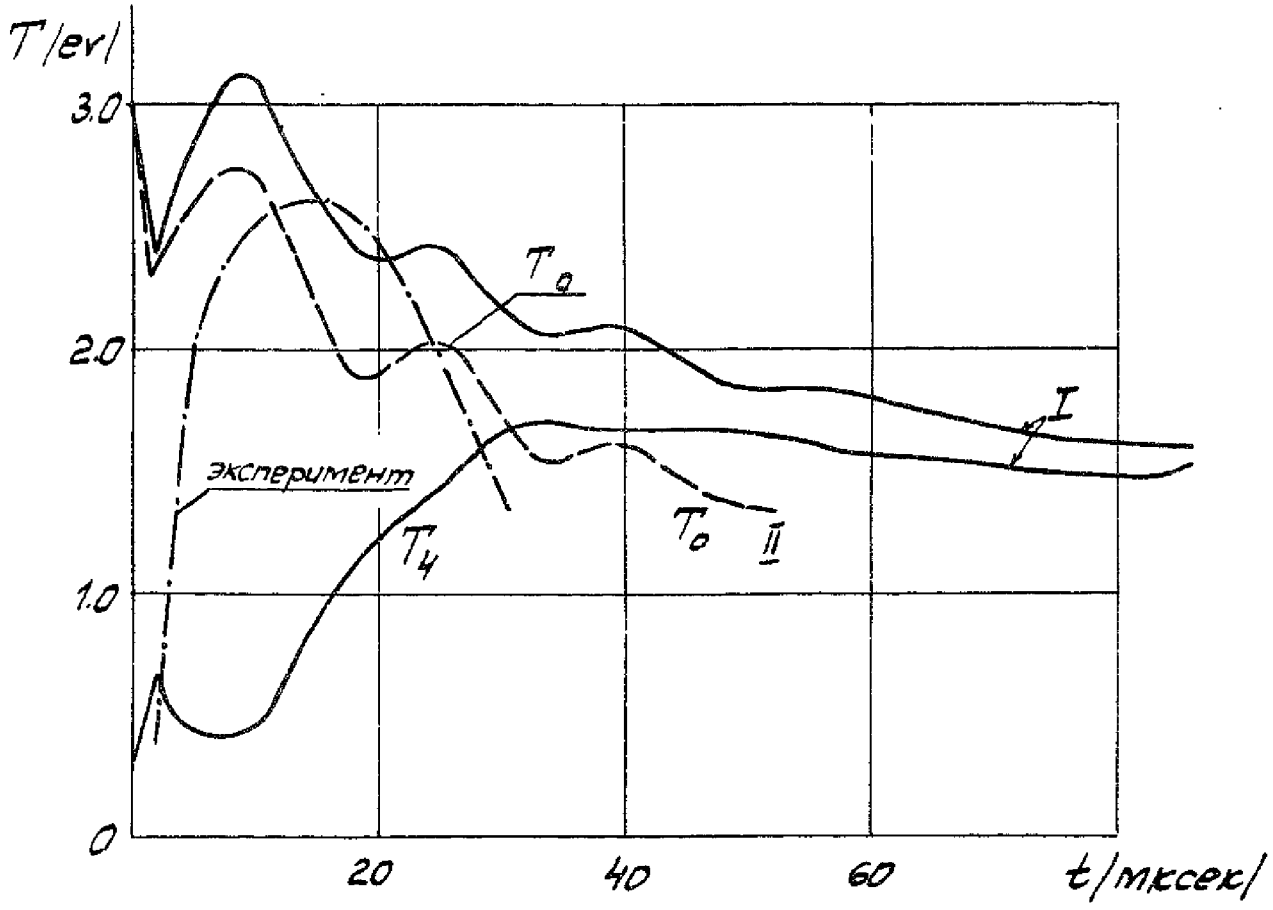

T/ev/
3.0
2.0
1.0
0
20
40
60
t/мксек/
T_a
I
эксперимент
T_4
T_0
II

Рис. 7

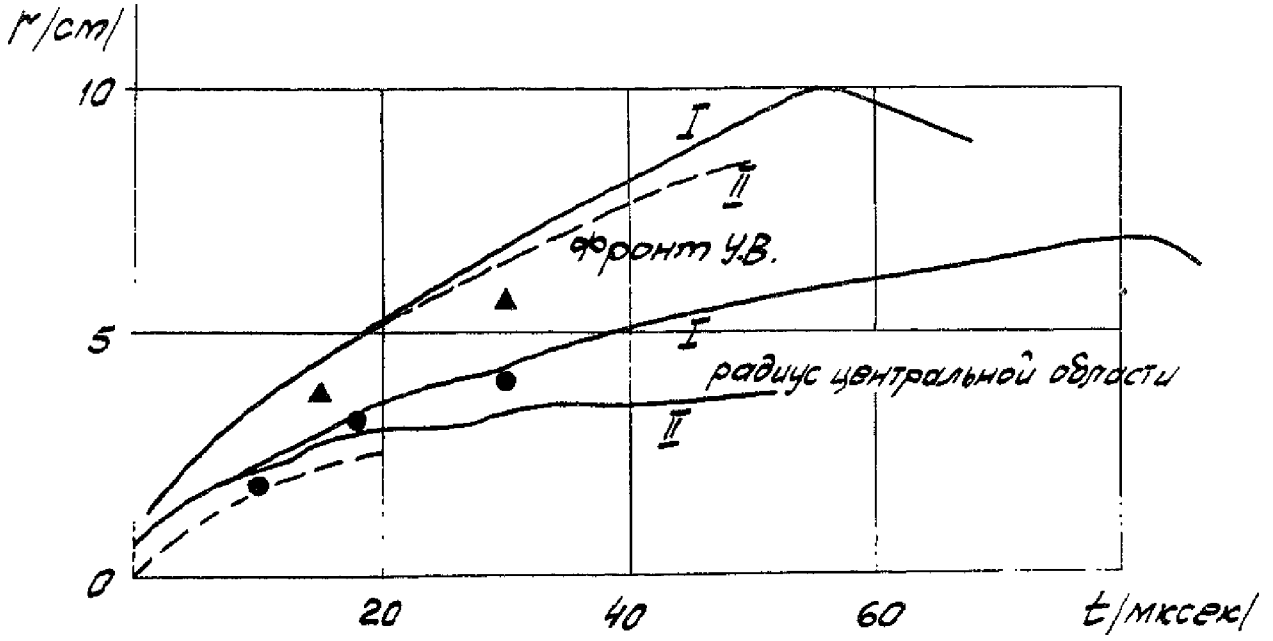

r/cm/
10
5
0
20
40
60
t/мксек/
I
II
фронт У.В.
I
радиус центральной области
II

Рис. 8

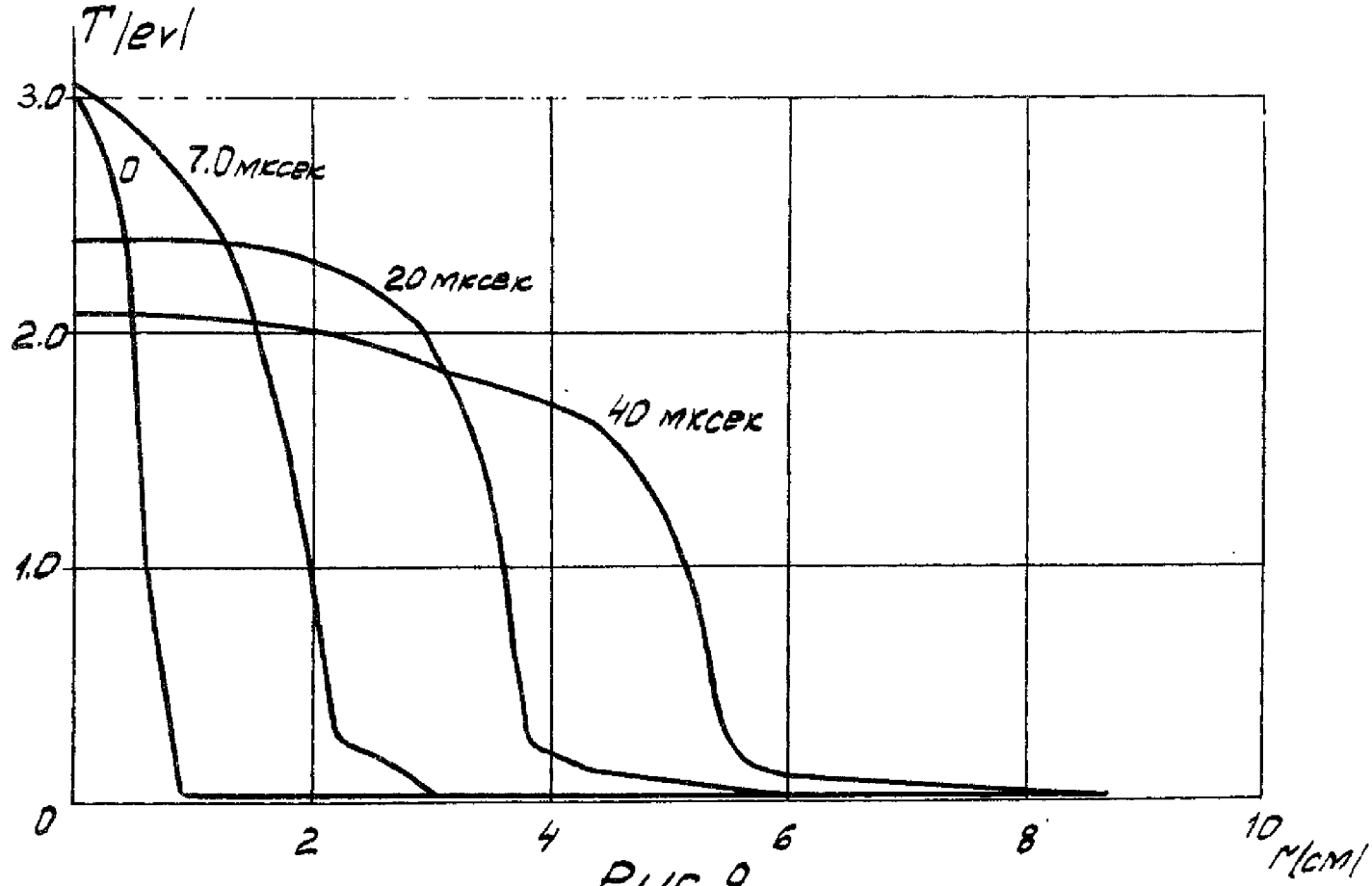

T/ev/
3.0
2.0
1.0
0
0
7.0 мксек
20 мксек
40 мксек
2
4
6
8
10
r/см/

Рис.9

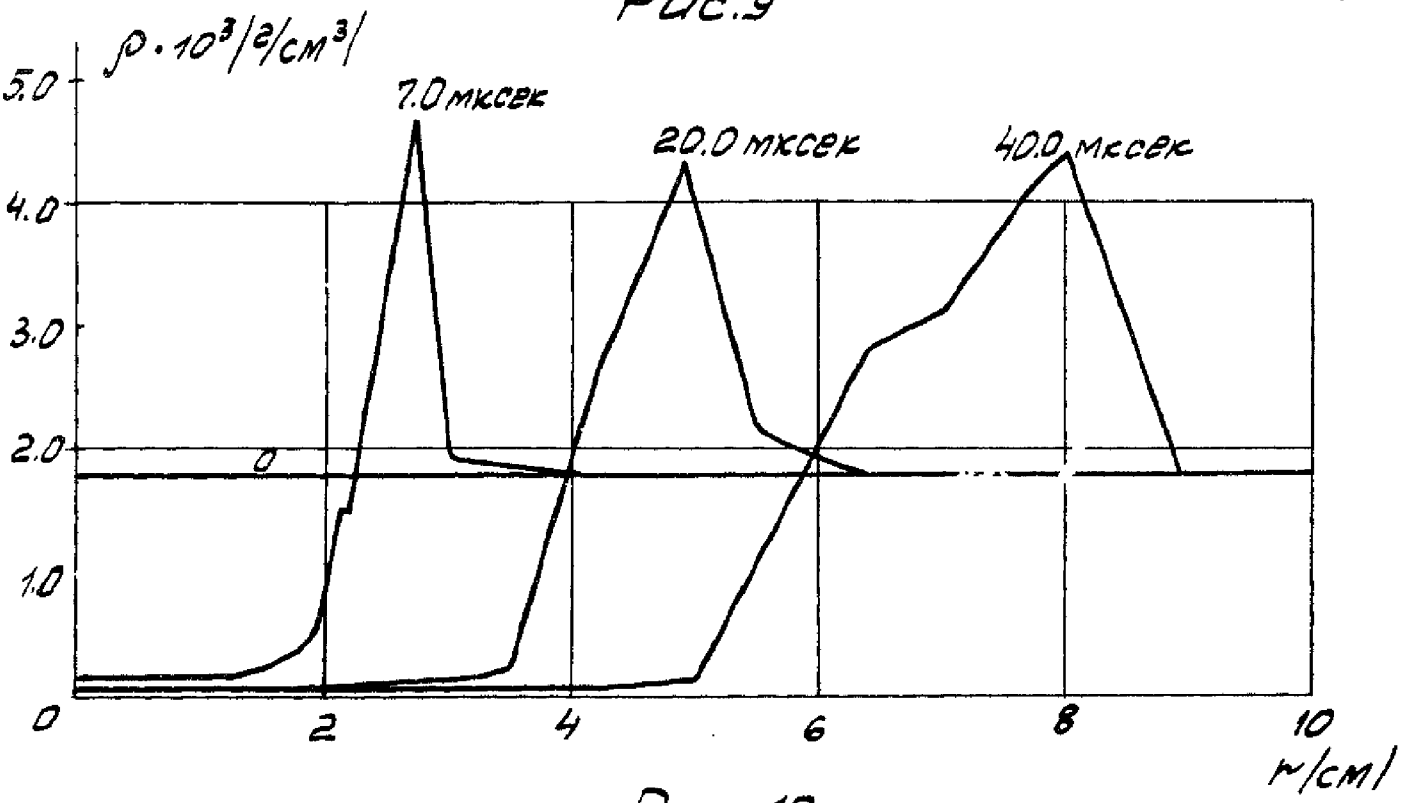

ρ·10³/г/см³/
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0
7.0 мксек
20.0 мксек
40.0 мксек
2
4
6
8
10
r/см/

Рис. 10

ударной волны практически не ионизован и не взаимодействует с магнитным полем. При $t \sim 56$ мксек ударная волна достигает стенки разрядной камеры и отражается от неё. Центральная горячая зона расширяется, масса прогретого газа в ней возрастает почти в три раза.

На рис.9,10 приведены распределения по радиусу температуры и плотности в разряде на последовательные моменты времени. Отчетливо наблюдается зона ударной волны с высокой плотностью и сравнительно малой температурой и горячая разреженная область за тепловым фронтом. Траектория границы центральной горячей области ($T \geqslant 1$ эв) указана на рис.8.

Энергия батареи конденсаторов $Э_C$ к концу второго периода колебания разрядного тока переходит главным образом во внутреннюю энергию $Э_I$, а также в потери на внешнем сопротивлении γ (рис.6). Поток излучения наружу практически отсутствует, так как в силу (I) излучение целиком поглощается холодным газом.

2. Во втором варианте расчета (II) (пунктирные линии на рис.5-8) коэффициент поглощения излучения был взят из таблиц [99] ; при этом холодный газ прозрачен для излучения. Выход излучения из системы здесь оказывается значительным (см. W_{II} на рис.6). Вследствие потерь на излучение размеры горячей зоны уменьшаются (рис.8), температура в ней падает (рис.7). Становится заметным удержание центральной горячей области магнитными силами.

Движение фронта ударной волны в обоих расчетах почти одинаково. Это свидетельствует о том, что в расчетах образование ударной волны в значительной степени объясняется заданием высокого начального давления в центральной зоне.

3. На рис.5,7,8 результаты расчетов разряда в воздухе сопоставляются с некоторыми экспериментальными данными.

Поведение разрядного тока в опыте (треугольники на рис.5) оказывается близким к первому варианту расчёта (I). Величина активного сопротивления разряда на развитой стадии процесса в расчете в I,5 раза больше экспериментального значения.

Граница горячей зоны в эксперименте (кружки на рис.8) занимает промежуточное положение по отношению к вариантам I и II. Скорость фронта ударной волны в эксперименте (треугольники на рис.8) и расчете примерно одинакова.

Температура в горячей зоне, измеренная экспериментально, нанесена на рис.7 штрих-пунктирной линией. При сопоставлении этой величины с T_0, следует иметь в виду, что T_0 - есть значение температуры в первом счетном массовом интервале и потому, вообще говоря, не совпадает с яркостной температурой теплового фронта.

Для сравнения на рис. 7 приведено изменение во времени температуры в четвертом счетном массовом интервале T_4.

В целом экспериментальная и рассчитанная картины электрического разряда в воздухе близки. Можно ожидать, что уточнение модели явления и, в частности, введение спектральной зависимости в коэффициенте поглощения излучения позволит получить полное количественное согласие результатов.

§ 9. Цилиндрический разряд в литии.

Характер протекания сильноточного разряда в литиевой плазме существенно зависит от его "толщины" - массы плазмы, приходящейся на единицу высоты.

Ниже описаны расчеты двух вариантов: "толстого" разряда - начальный диаметр проволочки D = 0,037 см, и "тонкого" разряда (D = 0,01 см). Электротехническая цепь в обоих случаях имела одинаковые параметры:

$$C = 1800\,\mu F, \quad V = 5\,кв, \quad L = 0{,}25\,\mu\,гн, \quad R = 2{,}25\,ом$$

длина и радиус разрядной камеры были ℓ = 15 см, $r_к$ = 5 см, радиус обратных проводов r_* = 7 см.

2. На рис.11-16 представлены результаты расчетов толстого разряда.

В начальной стадии процесса ($t < 3$ мксек), когда пары металла уже ионизованы, а разрядный ток невелик, магнитные силы слабо влияют на движение плазмы. Поэтому плазменный шнур интенсивно расширяется в вакуум и быстро охлаждается. Электропроводность среды падает; однако активное сопротивление плазмы R_p в данном расчете убывает из-за увеличения площади поперечного сечения

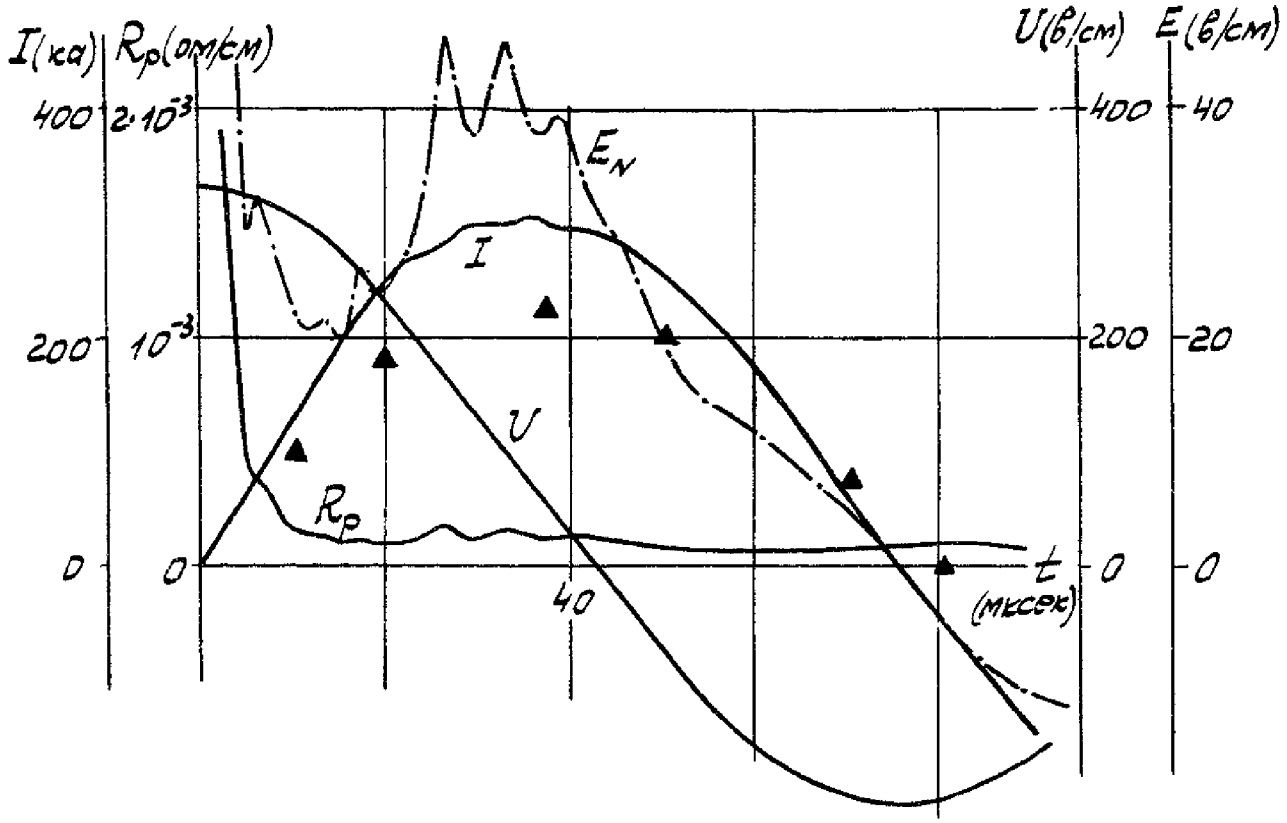

I(ка)
Rp(ом/см)
U(в/см)
E(в/см)
400
2·10⁻³
400
40
200
10⁻³
200
20
0
0
0
0
40
t
(мксек)
I
U
Rp
EN

Рис. 11

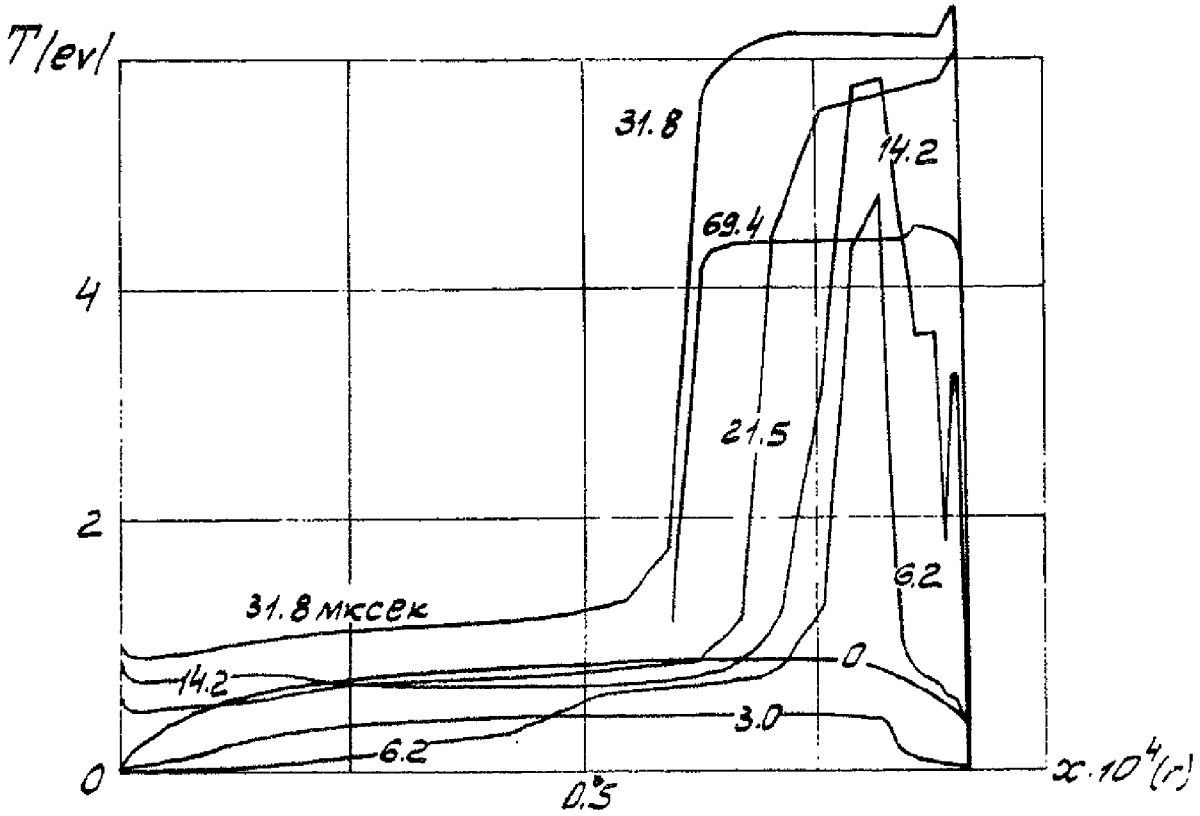

T/ev/
4
2
0
0.5
x·10⁴(г)
31.8
14.2
69.4
21.5
6.2
31.8 мксек
14.2
0
3.0
6.2

Рис. 12

разряда (рис.II). Электрические токи распределены равномерно по сечению столба плазмы, скин-эффекта практически нет.

К моменту времени $t \approx$ 4 мксек плазма достигает стенок разрядной камеры. Образующаяся в результате отражения ударная волна раопространяется к центру и устанавливает неравномерный по пространству профиль температуры, а, следовательно, и проводимости. В дальнейшем на этой неоднородности зарождается T-слой.

При $t \geq$ I5 мксек разрядный ток становится значительным, и в динамике разряда существенную роль начинают играть магнитно-гидродинамические эффекты. Электрические токи и джоулев нагрев в силу нелинейной зависимости электропроводности от температуры концентрируются в T-слое. Температура в нём резко повышается.

Интенсивное выделение в T-слое джоулева тепла приводит к появлению тепловых волн, распространяющихся в радиальном направлении в обе стороны от T-слоя. Эти волны похожи на тепловые волны второго рода[x)]: в волне, идущей к центру, хорошо просматриваются фронт ударной волны и следующий за ним фронт тепловой волны (рис.I2).

Ударная волна кумулируется на ось, отражается и далее многократно проходит по плазме, вызывая многочисленные кратковременные пульсации плазменного шнура. Вблизи максимума тока ($t \approx$ 30-40 мксек) магнитные силы становятся большими и некоторое время удерживают пульсирующий плазменный шнур в квазистационарном положении при $r \approx$ 2-3 см.

---

x) Однако они возникают здесь как следствие применения уравнения переноса, а не лучистой теплопроводности.

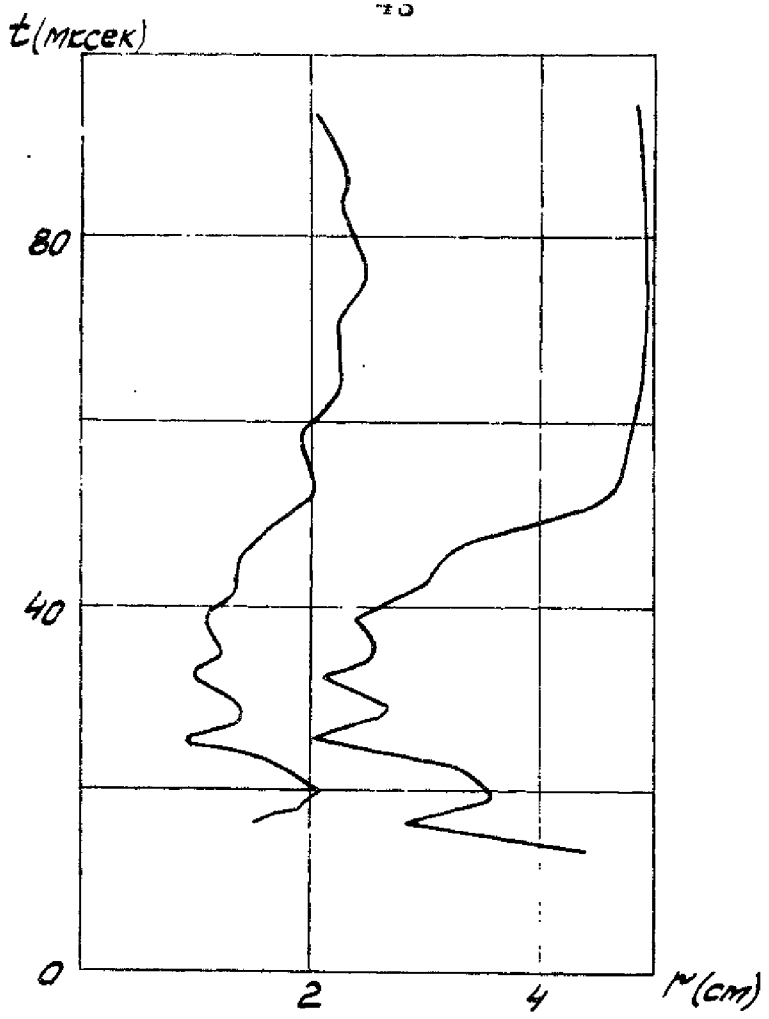


Рис. 13

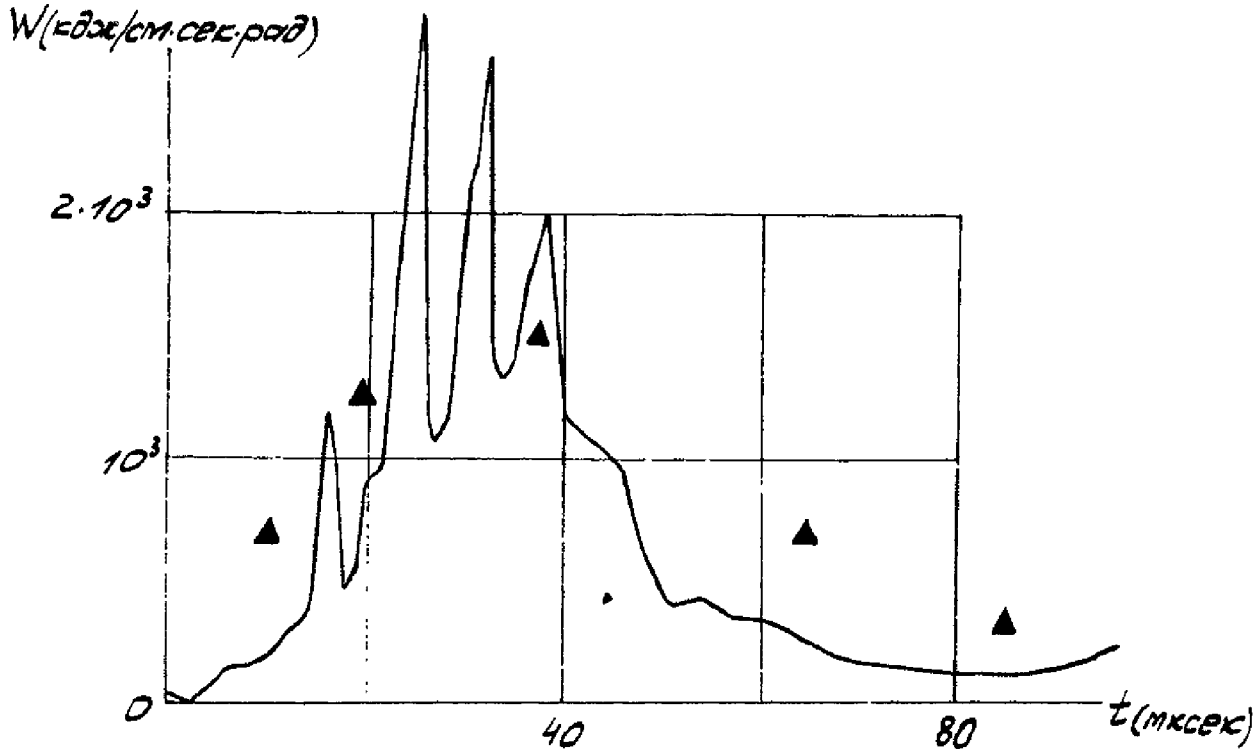


Рис. 14

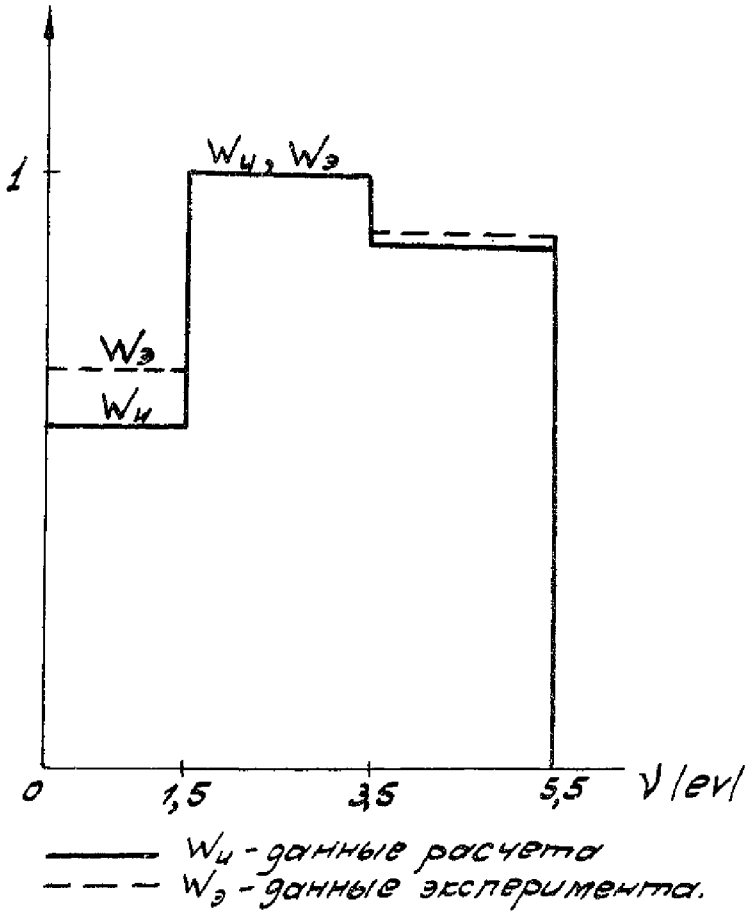
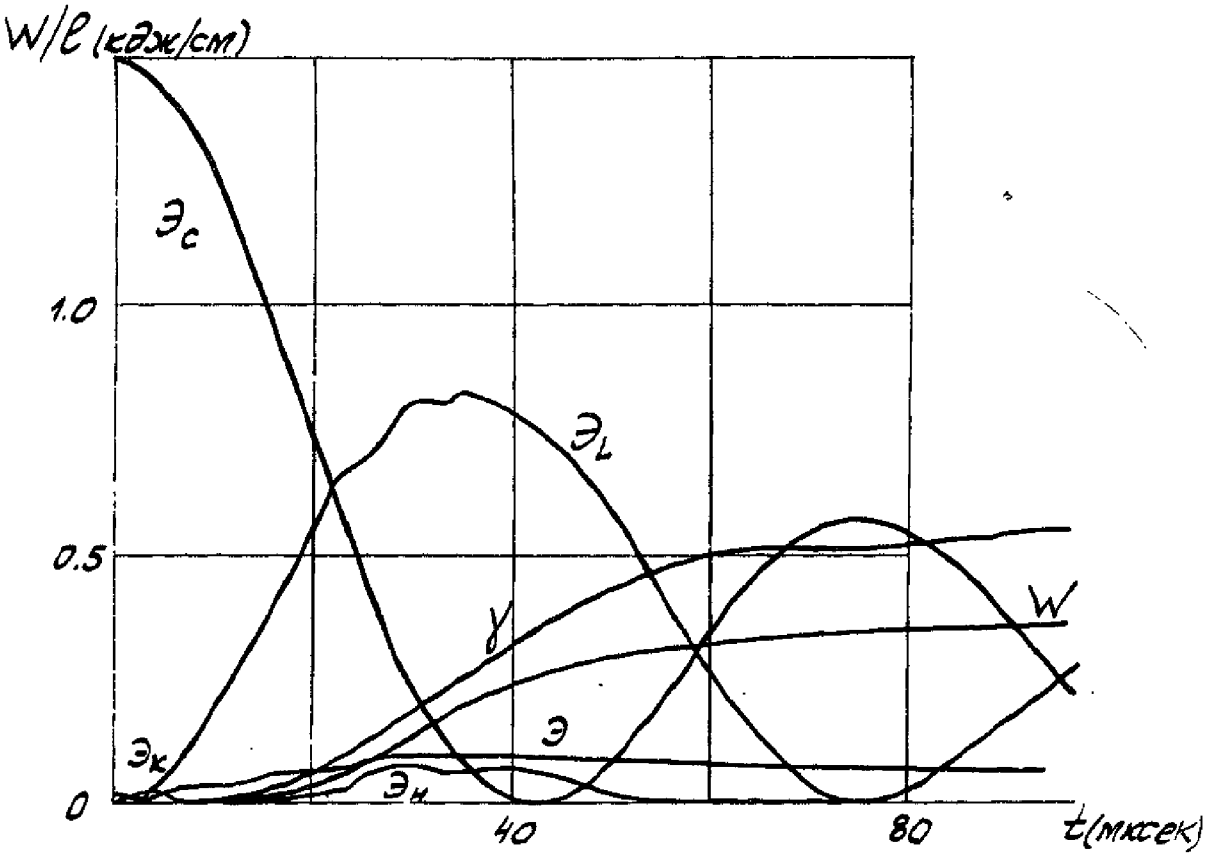

1
$W_ц$, $W_э$
$W_э$
$W_ц$
0
1,5
3,5
5,5
ν /ev/
$W_ц$ - данные расчета
$W_э$ - данные эксперимента.

Рис. 15


W/ℓ (кдж/см)
$Э_c$
1.0
$Э_L$
0.5
γ
W
Э
$Э_к$
$Э_н$
0
40
80
t(мксек)

При этом тепловой фронт, идущий к центру, останавливается. В результате на развитой стадии разряда плазма оказывается разбитой на две зоны: низкотемпературное центральное ядро с температурой $\sim$ I эв, и горячую внешнюю зону (расширившийся T - слой) с температурой 5-6 эв. В каждой из областей температура практически постоянна по радиусу. Электрические токи текут в основном по более нагретой внешней зоне, проводимость которой больше. Движение границ холодной и горячай зон указано на рис.I3.

После прохождения максимума тока плазменный шнур постепенно расширяется, и вновь заполняет всю разрядную камеру. Джоулев нагрев, поддерживающий тепловые волны, ослабевает.

Наличие в плазме двух областей с заметно отличающимися температурами и плотностями оказывает существенное влияние на характер выходящего излучения. Расчеты показывают, что основной вклад в поток энергии выходящего излучения как в видимом, так и в ультрафиолетовом диапазонах спектра вносит горячая зона, оптическая толщина которой мала.

Зависимость выходящего потока излучения $W(t)$ от времени указана на рис.I4. Наибольший выход энергии наблюдается вблизи максимума разрядного тока. На рис.I4 хорошо видны кратковременные пики (вспышки) продолжительностью I-5 мксек. Они обусловлены отмеченными выше динамическими пульсациями плазменного шнура и, в частности, T - слоя. Так как T -слой оптически тонок, то поток энергии из него пропорционален коэффициенту поглощения. Во время пульсаций плотность плазмы и зависящий от нее коэффициент поглощения заметно меняются, что приводит к значительным изменениям потока энергии излучения.

Динамические пульсации плазменного шнура сказываются и на активном сопротивлении R_p, что приводит к пульсациям раз-

рядного тока и электрического и магнитного полей.

Спектр выходящего излучения рассчитывался в пятигрупповом приближении со следующими значениями граничных частот:

$$\nu_0 = 0{,}05\ эв, \quad \nu_1 = 1{,}5\ эв, \quad \nu_2 = 3{,}5\ эв, \quad \nu_4 = 75\ эв, \quad \nu_5 = 600\ эв$$

Эффективная спектральная плотность потока энергии излучения определялась по формуле:

$$S_{\nu\ эф.} = S_k / (\nu_{k+1} - \nu_k), \qquad \nu_k < \nu < \nu_{k+1},$$

где S_k – поток излучения k-ой группы. На рис.15 представлена гистограмма потока энергии излучения в инфракрасном и оптическом диапазонах вблизи максимума тока. На рисунке не приведены абсолютные значения потока энергии, так как во время пульсаций они сильно меняются, но качественный вид гистограммы сохраняется.

На рис.16 представлена зависимость энергетического баланса разряда от времени. Собственная энергия плазмы (внутренняя $Э$, кинетическая $Э_к$ и магнитная $Э_н$) во всё время процесса составляет малую долю от полной энергии системы. В основном энергия распределяется между энергией батареи конденсаторов $Э_c$, индуктивной энергией $Э_L$, потоком выходящего из системы излучения W и потерями на внешнем сопротивлении γ.

За первый полупериод колебания разрядного тока ($t \approx 80$ мксек) из системы в виде излучения вышло 25% полной энергии, заключённой в начальный момент в батарее конденсаторов; при этом энергия, вышедшая в области прозрачности кварца ($\nu \leq 5{,}6$ эв) составляет 25% от излученной энергии. Расчёты, проводившиеся до затухания разряда, показывают, что почти вся энергия батареи кон-

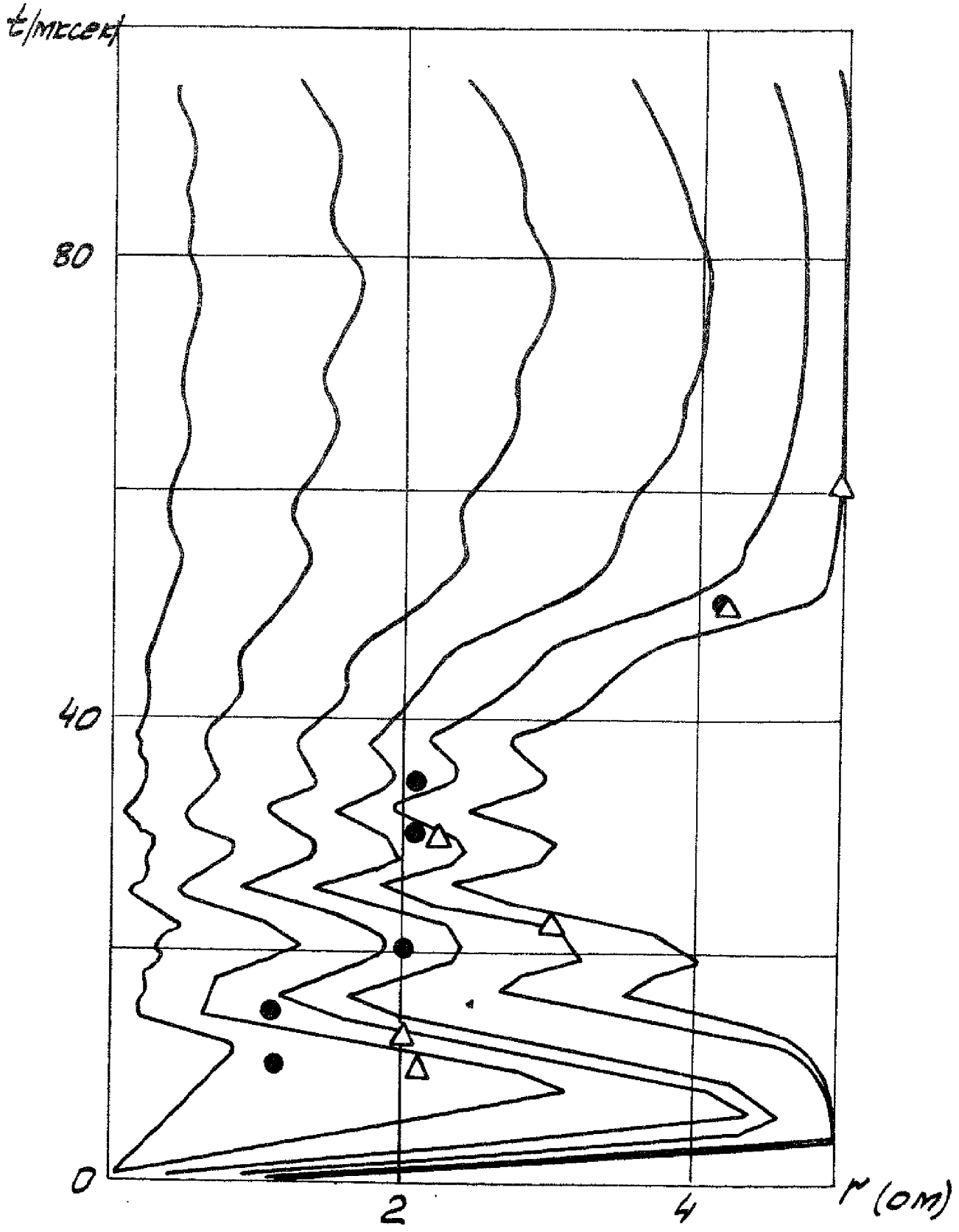


Рис. 17

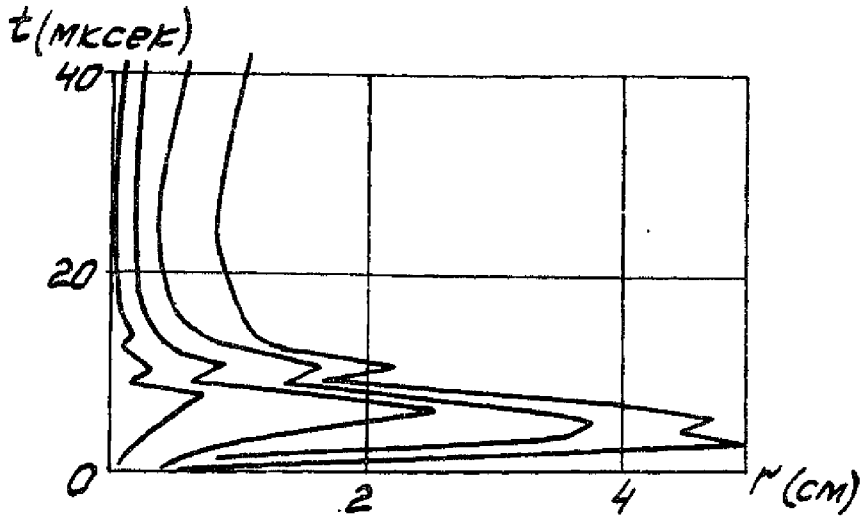

t(мксек)
40
20
0
2
4
r(см)

Рис. 18.

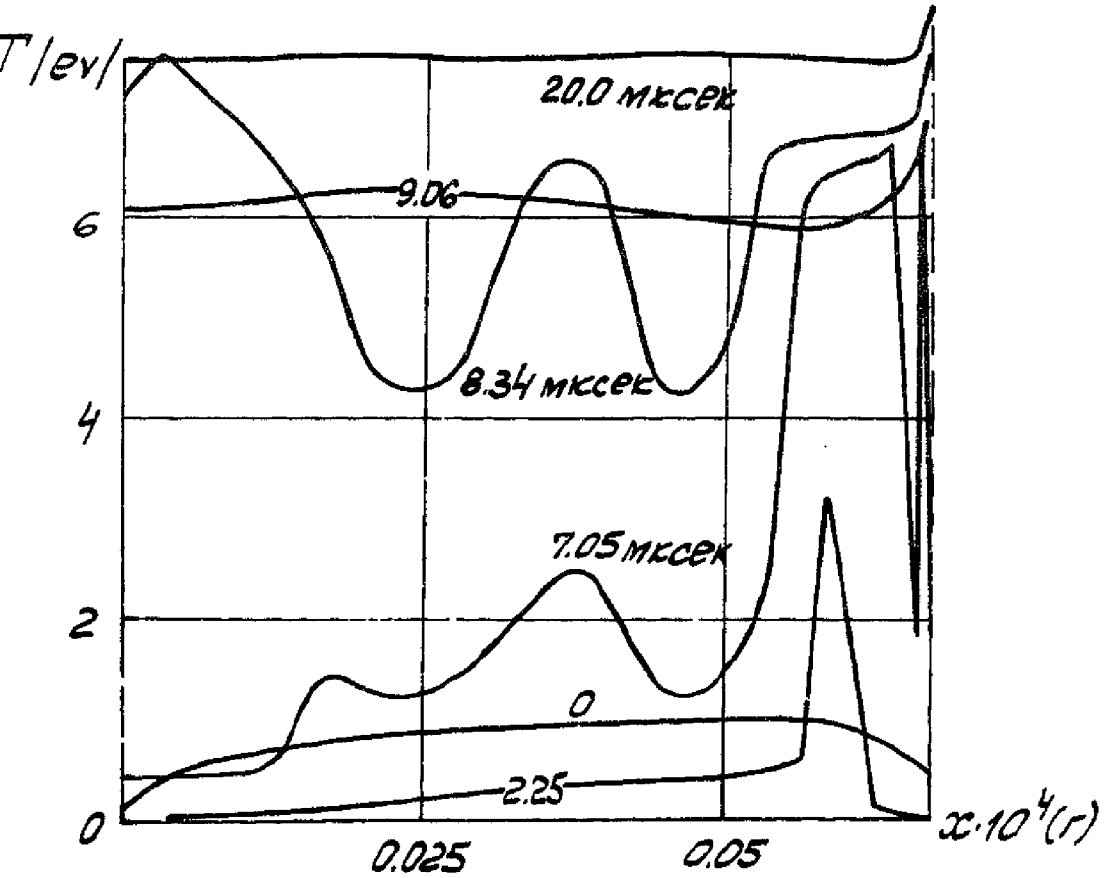

T/ev/
20.0 мксек
9.06
8.34 мксек
7.05 мксек
0
2.25
6
4
2
0
0.025
0.05
x·10⁴(г)

Рис. 19

денсаторов переходит в излучение.

3. На рис.18-19 представлены некоторые результаты расчета тонкого разряда.

В нем уже начальный разлет столба плазмы протекает не так, как в толстом разряде. Ещё до того, как плазма достигла стенки разрядной камеры, в ней зарождается T-слой. Температура в T-слое быстро поднимается до 6-7 эв. За счёт газодинамических процессов и переноса излучения образуются тепловые волны, и горячая зона расширяется.

Масса плазмы в тонком разряде невелика, поэтому тепловые волны быстро прогревают всю плазму, и с момента времени $t \simeq 10$ мксек температура однородна по всему сечению разряда. По этой же причине сжатие плазмы магнитным полем здесь существенно сильнее, а активное сопротивление выше. Это приводит к уменьшению разрядного тока, увеличению выхода энергии излучения и так далее.

При $t > 15$ мксек сравнительно длительное время наблюдается квазистационарный режим, когда плазма удерживается у оси. Плазменный шнур эффективно преобразует электромагнитную энергию цепи в излучение.

4. В описанных выше расчетах начальная стадия электрического взрыва проволочки, содержащая процессы фазового перехода и пробоя, не рассматривалась. Начальная энергия плазмы пренебрежимо мала по сравнению с энергией конденсатора. Поэтому естественно предположить, что при "прокачивании" через систему большого количества энергии начальное состояние плазмы быстро "забудется" и не повлияет на ход разряда.

Для проверки такого предположения была проведена серия расчётов толотого разряда, в которой варьировались начальные данные. Плазма считалась неподвижной. Начальное распределение температуры и плотности задавалось кривыми, изображенными соответственно на рис.20-2I.

Расчёт с начальными данными типа $\alpha\alpha$ или $\alpha\beta$ привел к описанным выше картинам разряда. Заметные вариации этих начальных распределений не повлияли на качественную картину разряда; количественные раохождения при этом были невелики и затухали со временем.

Большие изменения начальных профилей могли заметно изменить качественную картину явления. Так, сильное увеличение начальной плотности в распределении $\alpha\beta$ существенно влияло на развитие T-слоя. Распределение плотности $\alpha\alpha$ было устойчивей по отношению к количественным изменениям; оно допускает заметно большие начальные плотности, чем распределение $\alpha\beta$.

При начальном распределении температур "в" расчет привёл к режимам, резко отличающимся от описанных выше. На рис.22 приведены профили температуры на последовательные моменты времени, полученные в этом расчете. После удара плазмы о стенку разрядной камеры ($t \sim 5{,}5$ мксек) начинается кумуляция отраженной ударной волны на ось. В системе последовательно образуется несколько T-слоев. В центре после отражения ударной волны также остается зона высокой температуры.

В результате на развитой стадии разряда температура имеет "трехгорбый" профиль (рис.22) в отличие от ранее описанного "одногорбого" (рис.I2). Наблюдаются отличия и в других характеристиках разряда. Активное сопротивление плазмы здесь в I,5-2 раза меньше,

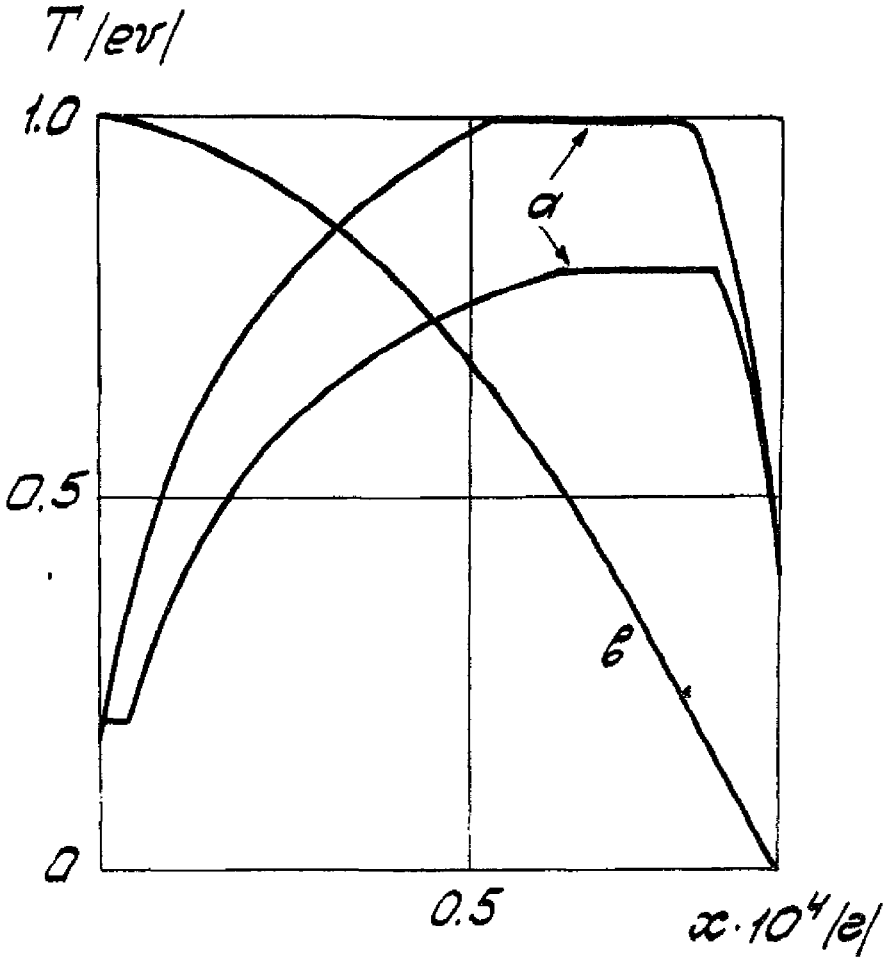


Рис. 20

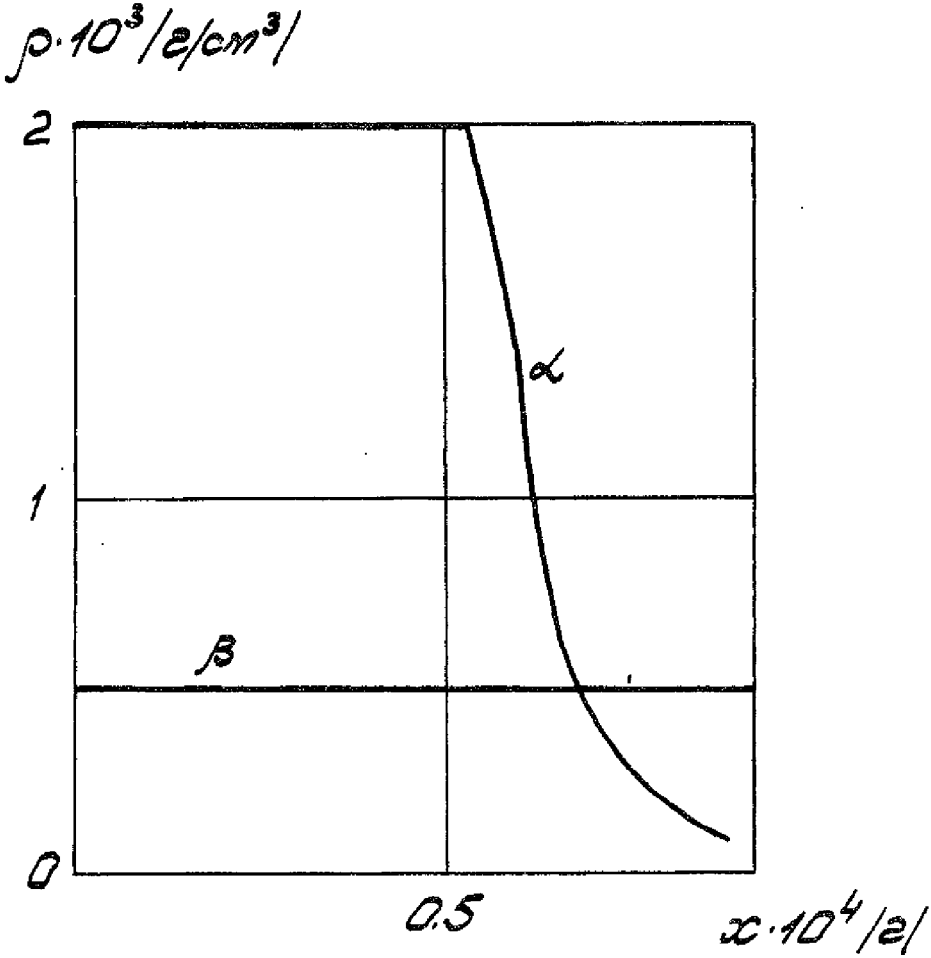


Рис. 21

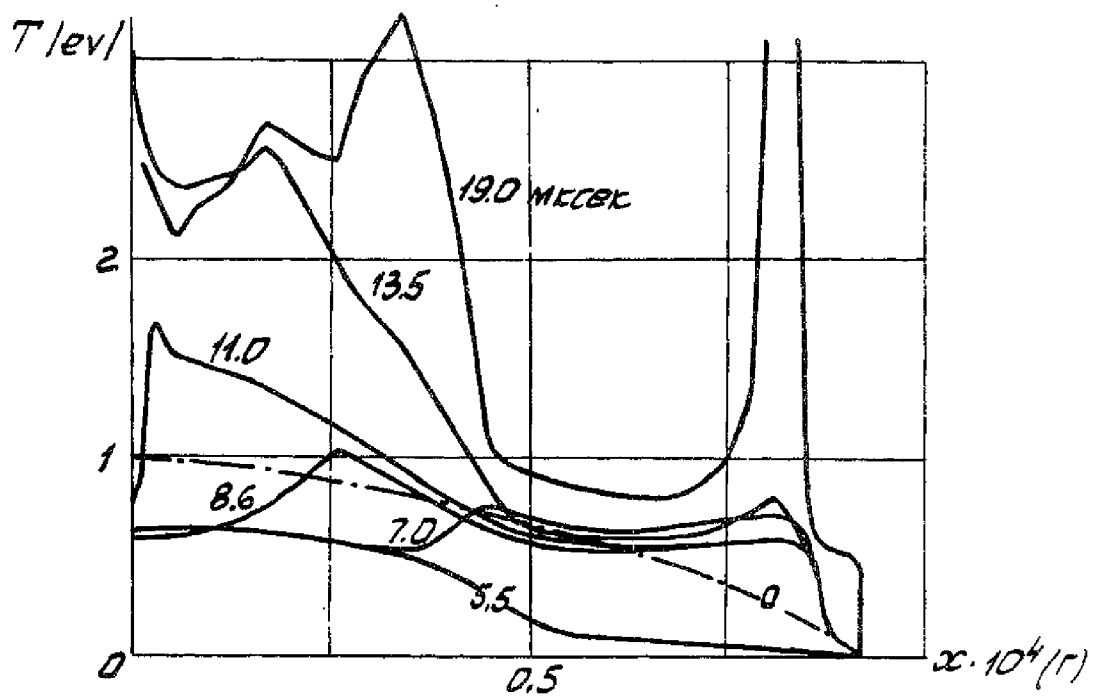


Рис. 22 а

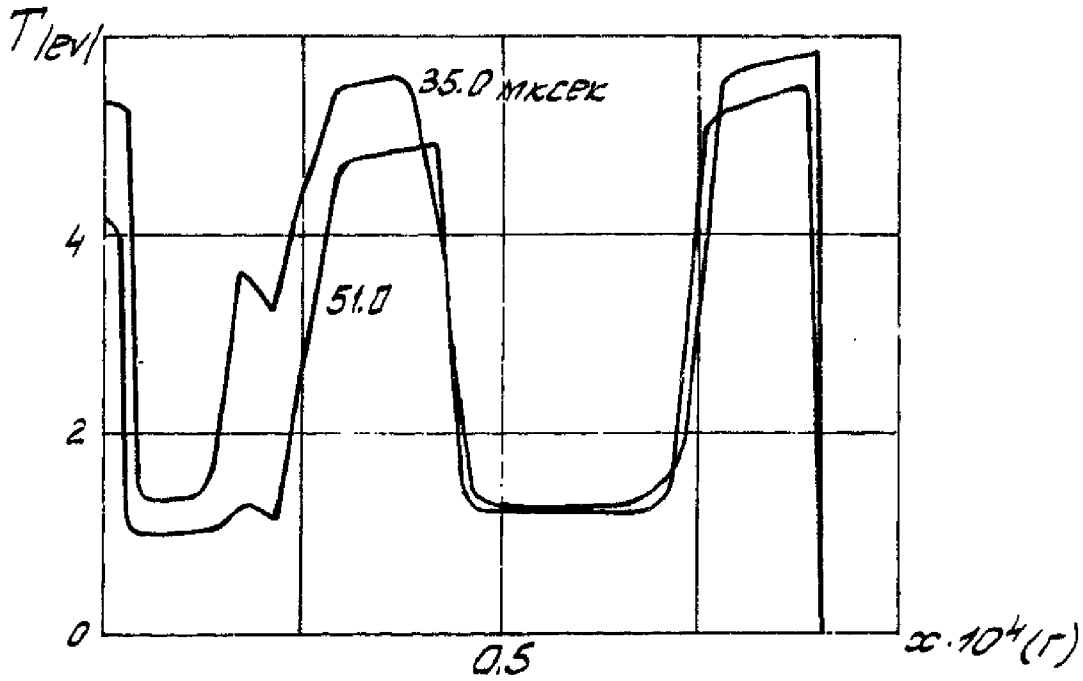


Рис. 22 в.

чем при начальном распределении "α" ; меньше также полный ток, джоулев нагрев и выход излучения.

Такая зависимость решения от характера начальных распределений требует более тщательного обоснования выбора начальных данных. Качественные соображения о том, как происходит испарение металла и пробой в холодных парах, говорят в пользу распределения $\alpha\alpha$ (см. § II). Основные расчёты проводились с распределением α/β , дающим довольно близкие к $\alpha\alpha$ результаты.

5. Проведем сравнение результатов расчетов с данными опытов на примере толстого разряда. Параметры разрядной цепи и масса литиевой проволочки в эксперименте и раочёте одинаковы.

На рис.II треугольниками отмечены значения разрядного тока, измеренные в опыте. Форма расчётной кривой и её период хорошо согласуются с экспериментом. Но максимальное значение тока в расчёте и в эксперименте отличаются на 30%. Очень сильно расходится в расчёте и в эксперименте активное сопротивление столба плазмы: вблизи максимума тока первое примерно в 3,5 раза меньше второго.

Количественные отличия имеются и в величине потока энергии излучения (рис.I4). Отметим, что в опытах также наблюдаются кратковременные пульсации потока излучения, однако разрешающая способность приборов не позволяет изучить их детальную структуру.

На рис.I7 указаны расчётные траектории отдельных частиц плазмы. Там же нанесены положения "границы" плазменного шнура, измеренные в красном (треугольники) и синем (кружки) диапазонах спектра. Расчёт и эксперимент качественно согласуются: совпадают времена выхода на квазистационарный режим, размеры столба плазмы; в обоих случаях отмечаются пульсации.

Таким образом, имеется только два существенных расхождения расчётов с экспериментами. Во-первых, сильно отличаются сопротивления плазменного столба. Во-вторых, в расчетах возникают высокие температуры, которые в опытах не наблюдаются. Однако дополнительные расчёты показали, что эти величины сильно зависят от линий в спектре поглощения плазмы (см [100] § 5). При некотором модельном виде спектра согласие с опытом было удовлетворительным. Поэтому для получения обоснованных результатов необходимо иметь надежные данные о спектрах рабочих веществ (с учетом неизбежных примесей).

§ 10. Коаксиальный разряд в литии.

В рамках постановки, описанной выше, рассчитывался мощный разряд через коаксиальный слой литиевой плазмы, полученной электрическим взрывом фольги в вакууме (рис.23). По оси разрядной камеры расположен провод, через который пропускается постоянный ток. Предполагается, что под действием магнитного поля центрального и собственного токов плазменный слой стабилизируется в некотором положении и будет служить источником излучения [93].

Расчёты проводились для следующих параметров электротехнической цепи:

$$C = 0{,}04\ F, \quad L = 0{,}25\ мк\,гн, \quad R = 10^{-3}\ ом, \quad V = 10\ кв$$

Длина разряда 50 см, радиус обратных проводов 25 ом, радиус центрального провода I см и ток в нем 500 килоампер. Начальная энергия конденсатора была 2 мегаджоуля.

В расчётах в начальный момент плазменный слой располагался вблизи r – I0 см. Температура плазмы бралась равной I эв, а плотность – 5.4 x 10^{-5} г/см^3, что в 10^4 раз меньше плотности конденсированной фазы.

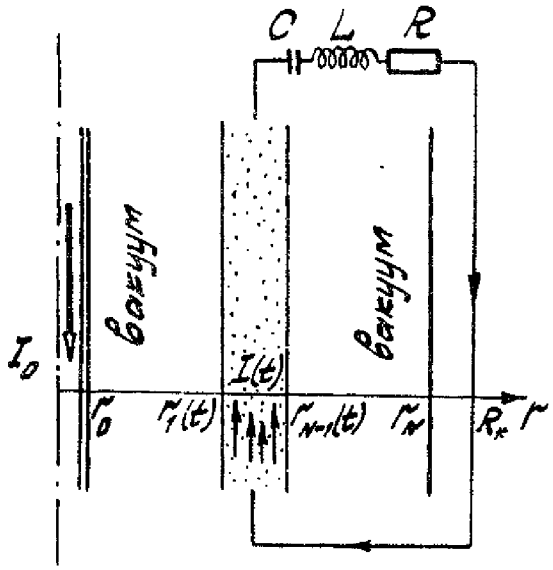


Рис. 23

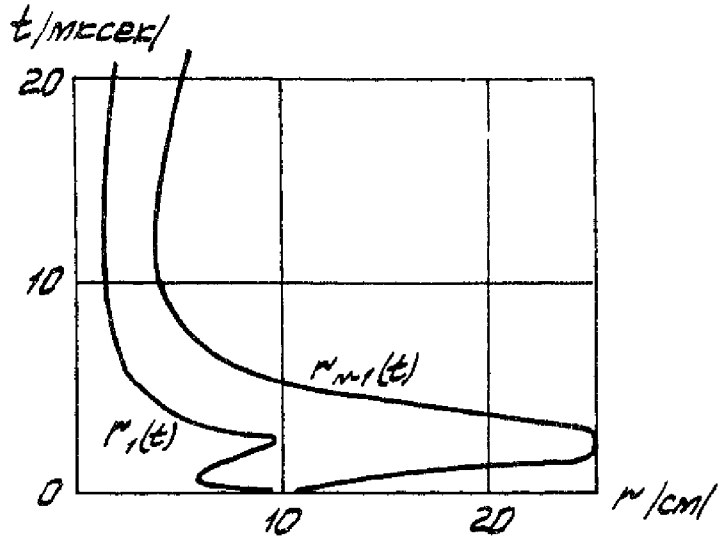


Рис. 24

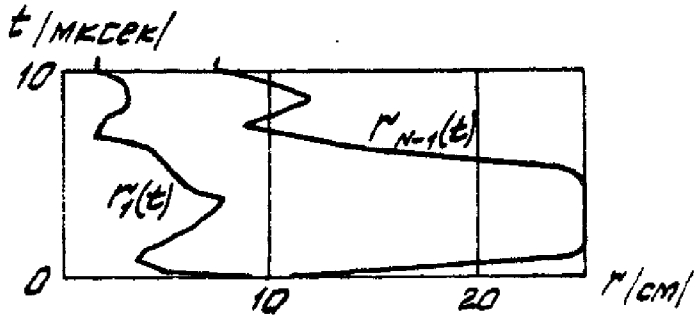


Рис. 25

Как и в § 9, расчёты проводились для двух значений массы разрядной плазмы, приходящейся на единицу длины разряда: $M = 10^{-3}$ г/см - "тонкий" слой, и $M = 10^{-2}$ г/см - толстый слой. Электротехнические характеристики обоих разрядов оказались близкими. Так, для тонкого слоя максимальное значение полного тока составляет $J_m = 1.6$ Ма, а для толстого слоя $J_m = 1{,}9$ Ма величина первой четверти периода колебаний тока соответственно равна $t = 110$ мксек и $t = 95$ мксек.

Процессы в самой плазме были похожи на случаи соответственно тонкого и толстого цилиндрических разрядов в литии. В тонком слое тепловые волны, движущиеся с обоих краев слоя, быстро прогревают плазму; температура становится однородной по толщине слоя. Плазменный слой выходит на квазистациснарный режим. Траектории границ слоя указаны на рис.24,25.

В толстом слое температурные волны не успевают прогреть всю массу, и плазма на развитой стадии процесса оказывается разбитой на три области: оравнительно холодную среднюю, и горячие разреженные краевые. В этом случае динамические пульсации слоя ярче выражены (рис.25). По остальным параметрам также легко усматривается аналогия со случаями тонкого и толстого цилиндрических разрядов.

ЛИТЕРАТУРА

I. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. "О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка". ДАН, 99, № I, 27 (I954).

2. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. "О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами". ДАН, I08, № 3, 393 (I956).

3. Н.Н.Яненко. "Бегущие волны системы квазилинейных уравнений". ДАН, I09, № I, 44, (I956).

4. Б.Л.Рождественский. "О сиотемах квазилинейных уравнений". ДАН, II5, № 3, 454, (I957).

5. Б.Л.Рождественский. "Разрывные решения системы квазилинейных уравнений гиперболического типа". УМН, ХУ, 6 (96), 59, (I960).

6. А.А.Самарский. "Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разноотные методы их решения". Тр.Всесоюзного совещания по дифференциальным уравнениям. Ереван, ноябрь, I958, Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, I48, (I960).

7. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. "Однородные разностные схемы". Ж. вычисл.матем. и матем.физ., I; № I, 4, (I96I).

8. Н.Н.Яненко. "Приближенные формулы для давления и внутренней энергии газа в обобщенной статистической модели атома Томаса-Ферми", ДАН, I09, № 5, 9I6 , (I956).

9. В.Я.Гольдин. "Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения", ДАН, I33, № 4, 748,(I960).

I0. В.Я.Гольдин. "Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения". Ж.выч.мат. и матем.физ., 4, № 6, I078, (I964).

II. А.А.Самарский. "Лекции по теории разностных схем". Москва, ВЦ АН СССР (1969).

I2. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. "Системы квазилинейных уравнений". Изд. "Наука", (1968).

I3. А.А.Самарский, В.Я.Арсенин. "О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости". Ж. выч.матем. и матем.физ., I, № 2, 357, (1961).

I4. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Л.Н.Бусурина, В.П.Крус. "Решение однородной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе". Ж. выч.матем. и матем. физ., 3, № 4, 702, (1963).

I5. А.А.Самарский. С.П.Курдюмов, П.П.Волосевич. "Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью". Ж. выч.матем. и матем.физ. 5, № 2, 199, (1965).

I6. А.А.Самарский, П.П.Волосевич, М.И.Волчинская, С.П.Курдюмов. "Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной газодинамики". Ж. выч. матем. и матем. физ., 8, № 5, 1025, (1968).

I7. Н.Н.Калиткин. "Модель атома Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками". ЖЭТФ, 38, в.5, 1534, (1960).

I8. В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, Т.В.Шишова. "Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений". Ж. выч.матем. и матем. физ., 5, № 5, (1965).

I9. Н.Н.Калиткин. "Проводимость низкотемпературной плазмы". ТВТ, 6, № 5, 801, (1968).

20. Н.Н.Калиткин. "Квантово-статиотическое уравнение состояния". Вопросы физики низкотемпературной плазмы. стр.102, Минск, (1970).

21. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. "Коэффициенты поглощения света в плазме". Препринт ИПМ, № 36, (1969).

22. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. "Вычисление непрозрачности звезд с учетом поглощения света в спектральных линиях". ДАН, 191, № 1, (1970).

23. А.А.Самарский, И.М.Соболь. "Примеры численного расчета температурных волн". Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 3, № 4, 702, (1963).

24. И.М.Соболь. "О расчёте движения заряженных частиц в плазме методом Монте-Карло". Методы Монте-Карло и их применения. Тезисы докладов на 2-ом Всесоюзном совещании по методам Монте-Карло 1969 г. ВЦ СО АН СССР, Институт кибернетики АН ГССР, Тбилиси (1969).

25. А.А.Самарский, Б.Д.Моисеенко. "Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана". Ж. вычисл.матем. и матем.. физ., 5, № 5, 816, (1965).

26. Л.Н.Бусурина, В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, Л.С.Царёва. "Численный расчёт детонации." Ж. вычисл.матем. и матем.физ., 10, № 1, 239, (1970).

27. А.А.Самарский, И.В.Фрязинов. "О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами". Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 1, № 5, 806, 1961.

28. Л.М.Дегтярев, А.П.Фаворский. "Потоковый вариант метода прогонки". Ж. вычисл.матем. и матем.физ., 8, № 3, 679, (1968).

29. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. "Полностью консервативные разностные схемы". Ж.выч. матем. и матем.физ., 9, № 4, 953, (1969).

30. Ю.П.Попов. Расчёт электротехнических цепей в задачах магнитной гидродинамики. Ж. выч. мат. и матем. физ. (в печати).

31. Ю.П.Попов. К расчету магнитогидродинамических ударных волн, ионизирующих газ. Ж. выч.мат. и матем.физ. 10, № 5, (1970).

32. В.Я.Гольдин, Г.В.Данилова, Б.Н.Четверушкин. "Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения". Доклад на Всесоюзном симпозиуме по численным методам в теории переноса. Новосибирск, март 1967. Сборник "Вычислительные методы в теории переноса". Атомиздат (1969).

33. В.Я.Гольдин, Б.Н.Четверушкин. "Методы расчёта переноса излучения в одномерных задачах низкотемпературной плазмы". Препринт ИПМ № 12 (1970). Депонирован в ВИНИТИ, № 1796-70. ДЕП.

34. В.Я.Гольдин, Б.Н.Четверушкин. "Эффективный метод решения уравнения переноса излучения в низкотемпературной плазме". ДАН. 195, № 2, (1970).

35. О.В.Локуциевский. "Численные методы решения уравнений в частных производных". УМН, XI, в.3, (1956).

36. Л.Д.Ландау, Н.Н.Мейман, И.М.Халатников. "Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток". Труды III Всесоюзного мат.съезда, т.II, стр.16, Москва (1958).

37. В.С.Рябенький, А.Ф.Филиппов. "Об устойчивости разностных уравнений". Гостехиздат (1956).

38. И.М.Гельфанд, О.В.Локуциевский. "Метод прогонки для решения разностных уравнений". Приложение к работе 41.

39. В.Ф.Дьяченко. "Методы решения нестационарных задач газовой динамики". Сб."Численные методы решения задач механики сплошных сред (лекции в летней мат.школе, Киев, 1966 г.). Труды ВЦ АН СССР, Москва (1969).

40. Р.Д.Рихтмайер. "Разностные методы решения краевых задач". И.Л. Москва (1960).

41. С.К.Годунов, В.С.Рябенький. "Введение в теорию разностных схем". М.Физматгиз, (1962).

42. С.К.Годунов. "Разностный метод численного расчёта разрывных решений гидродинамики". Матем. сб. 47 (89), (1959).

43. Н.Н.Яненко, В.Е.Неуважаев, В.Ф.Куропатенко и др. Сборник работ. Труды МИАН СССР, I, 74, 138 (1966).

44. В.Ф.Куропатенко. "Метод расчёта ударных волн". ДАН, 133, № 4, 771, (1960).

45. С.И.Брагинский, И.М.Гельфанд, Р.П.Федоренко. "Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде". Сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций". т.IУ, стр.201, Москва, АН СССР (1958).

46. В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник. "О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов". Прикл. матем. и мех., 29, № 6, 993, (1965).

47. К.В.Брушлинский, Н.М.Зуева, А.И.Морозов. "Установление квазиодномерного течения плазмы в профилированном канале". Изв.АН СССР, Механика, № 5, стр.3 (1965).

48. Г.Б.Алалыкин, С.К.Годунов, И.Л.Киреева, Л.А.Плинер. "Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках". Москва, наука, (1970).

49. Сборники Methods in computational physics, Academic press, N.Y.-L.

50. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Л.А.Заклязьминский, П.П.Волосевич, Л.М.Дегтярев, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.С.Соколов, А.П.Фаворский. "Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики". ДАН, 173, № 4 (1967).

51. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Л.А.Заклязьминский, П.П.Волосевич, Л.М.Дегтярев, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.С.Соколов, А.П.Фаворский. "Эффект Т-слоя в магнитной гидродинамике". Москва, ИПМ, (1969).

52. Л.М.Дегтярев и др. "Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля". ТВТ, 3, 471, (1969).

53. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, А.А.Самарский. "Автомодельная задача о сильноточном разряде в плазме". Ж. выч.матем. и матем. физ., 10, № 6, 1447, (1970).

54. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов. "Взаимодействие ударной волны с магнитным полем в среде с конечной проводимостью". Изв.АН СССР, МЖГ, № 1, 67, (1968).

55. П.П.Волосевич, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов. Влияние конечной проводимости среды на взаимодействие ударной волны с магнитным полем. Изв.АН СССР, МЖГ, № 4, 16 (1968).

56. Л.Н.Бусурина, В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, Л.С.Царева. "Создание плазмы взрывом". Вопросы физики низкотемпературной плазмы, стр.213, Минск (1970).

57. Л.Н.Бусурина, П.П.Волосевич, Е.И.Леванов. "Влияние теплопроводности на взаимодействие монохроматического излучения с веществом. Москва, ИПМ (1970).

58. Б.Н.Четверушкин. "Численное решение спектральной задачи о

прогреве падающим извне излучением вещества". ПМТФ, № 2, (1971).

59. Л.В.Губарев, Л.М.Дегтярев, А.П.Фаворский. "Некоторые особенности сверхзвукового течения электропроводного газа в МГД - канале". Изв.АН СССР, МЖГ, № 3, 10, (1969).

60. П.П.Волосевич, В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.А.Розанов, А.А.Самарский, Б.Н.Четверушкин. "Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме". Сборник докладов на IX Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, стр.348, Бухарест (1969).

61. Н.Н.Калиткин, Л.С.Царева. "Приближенная теория магнитной кумуляции". Магнитная гидродинамика, № 3, стр.8, (1969).

62. С.А.Беляев, Д.А.Гольдина, Л.В.Лесков, Ю.Н.Куликов, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.В.Савичев, А.А.Самарский, С.С.Филиппов. "Нестационарное ускорение плазмы в одномерном МГД приближении". Часть I. "Нелинейный механизм последовательного образования Γ-слоев в движущейся среде". Препринт ИПМ (1969).

63. С.А.Беляев, Г.В.Данилова, Л.В.Лесков, Ю.Н.Куликов, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.В.Савичев, А.А.Самарский, С.С.Филиппов, Л.С.Царева. "Нестационарное ускорение плазмы в одномерном МГД приближении". Часть II. "Особенности ускорения литиевой плазмы". Препринт ИПМ (1970).

64. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. "Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики". Ж. выч.матем. и матем.физ., 10, № 4, 990, (1970).

65. В.Я.Гольдин, Н.И.Ионкин, Н.Н.Калиткин. "Об энтропийной схеме расчёта газодинамики". Ж. выч.матем. и матем. физ., 9, № 6, 1411, (1969).

66. Б.Н.Четверушкин. "Об одном методе совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения". Ж. выч.мат. и матем. физ., I0, 5, I290, (I970).

67. В.С.Владимиров. "Численное решение кинетического уравнения для сферы". Вычислительная математика, № 3 (I958).

68. В.Я.Гольдин. "Замечание к методу прогонки". Ж. выч.мат. и матем. физ., 9, № 5, II83, (I969).

69. Н.Н.Калиткин. "Прогонка при бесконечном коэффициенте теплопроводности". Ж.выч. мат. и матем. физ., 8, № 3, 684, (I968).

70. Л.М.Дегтярев, А.П.Фаворский. "Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильноменяющимися коэффициентами". Ж.выч. мат. и матем.физ., 9, № I, 2II, (I969).

7I. Н.Н.Яненко, В.Е.Неуважаев. "Один метод расчета газодинамических движений"в сборнике работ 43 .

72. Н.Н.Калиткин, В.С.Рогов. "Проводимость плазмы при произвольных температурах". Вопросы физики низкотемпературной плазмы, стр.I23, Минск, (I970).

73. В.С.Рогов. "Транспортные коэффициенты плазмы". Препринт ИПМ (I969).

74. Н.Н.Огурцова. Диссертация, ГОИ, (I964).

75. А.А.Бакеев, Р.Е.Ровинский. "Электрические свойства плазм импульсных разрядов высокого давления в инертных газах". ТВТ, 8, № 6, II2I (I970).

77. Д.А.Франк-Каменецкий. Физические процессы внутри звезд. ФМ,I959.

78. J.M. Berger. Absorption coefficients for free-free transitions in a hydrogen plasma. Astrophysical Journal, I956, v. I24, N 3, 550-554.

79. Л.А.Вайнштейн. Вычисление волновых функций и сил осцилляторов сложных атомов. Труды ФИАН, 1961, т.15, 3-54.

80. Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, 1966.

81. A. Schlüter. Zs. Naturf. 5a, 72, 1950.

82. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, тома I-IУ (1958).

83. С.И.Брагинский "К теории развития канала искры". ЖЭТФ, 34, 1548 (1958).

84. Б.Б.Кадомцев. "Гидромагнитная устойчивость плазмы". Сборник "Вопросы теории плазмы" 2, 132 (1963).

85. М.П.Ванюков, А.А.Мак. "Испульсные источники света высокой яркости" УФН, ХУI, 301 (1958).

86. В.Ф.Дьяченко, В.С.Имшенник. "К магнито-гидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме". Сборник - Вопросы теории плазмы, в.5. Атомиздат, М., 1967.

87. Н.Г.Басов, Б.Л.Борович, В.С.Зуев, В.Б.Розанов, Ю.Ю.Стойлов "Исследование динамики мощного разряда в воздухе". Доклад на II Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы, г.Минск, 1968 г.

88. А.Д.Клементов, Т.В.Михайлов, Ф.А.Николаев, В.Б.Розанов, Ю.П.Свириденко. "Сильноточный разряд в литии", доклад на II Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы, г.Минск, 1968 г.

89. Н.Г.Басов, Б.Л.Борович, В.С.Зуев, В.Б.Розанов, Ю.Ю.Стойлов. "Сильноточный разряд в газах". ЖТФ, , № 3, 516-522, 1970; № 4, 805-813, 1970.

90. Б.Л.Борович, В.Б.Розанов. "Автомодельная теория мощных импульсных разрядов в плотных газах", препринт 147 ФИАН, 1970.

91. В.Б.Розанов "Тормозное излучение стационарного коаксиального плазменного слоя". ЖТФ, , № 1, 62-69, 1970.

92. А.А.Вехов, А.Д.Клементов, Ф.А.Николаев, В.Б.Розанов, В.А.Рубцов, Ю.П.Свириденко. "Протяженный импульсный разряд в парах лития". Краткие сообщения по физике, сборник ФИАН № 10, октябрь 1970.

93. В.Б.Розанов. "Возможные характеристики источника тормозного излучения для накачки ОКГ". ДАН, 182, № 2 (1968).

94. В.Б.Розанов, А.А.Рухадзе. "Излучение, динамика и устойчивость плотной плазмы сильноточных импульсных разрядов". Препринт ФИАН, № 132, Москва, 1969 г.

95. А.А.Рухадзе, С.А.Тригер. "О равновесии и устойчивости сильноточного разряда в плотной плазме в условиях лучистой теплопроводности". ПМТФ,№ 3, 11 (1968), препринт ФИАН, № 168 (1968).

96. А.А.Рухадзе, С.А.Тригер. "Перетяжки в плазме конечной проводимости". ЖЭТФ, 56, 1029 (1969 г.).

97. А.Д.Клементов, Г.В.Михайлов, В.Б.Розанов, Ю.П.Свириденко. "Сильноточный импульсный разряд в литии". ТВТ, № 4, 736-740, 1970 г.

98. R. Marschak. An influence of the radiation on the behavior of the shock waves. Phys. Fluids, 1958, N 1, 24-29.

99. Н.М.Кузнецов "Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах", Машиностроение, 1965.

100. П.П.Волосевич, В.Я.Гольдин, Н.Н.Калиткин, С.П.Курдюмов, Ю.П.Попов, В.Б.Розанов, А.А.Самарский, Б.Н.Четверушкин "Некоторые стадии сильноточного разряда в плазме".