Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 3

УДК 517.94 : 537.2 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

А. В. ЗАХАРОВ, член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ, А. Г. СВЕШНИКОВ

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА МЕТОДОМ БОЛЬШИХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Задача расчета движения пучка заряженных частиц в электрическом и магнитном полях с учетом собственного пространственного заряда возникает при исследовании многих электронных приборов. Уже в двумерном случае, даже при простейшей геометрической структуре поля конкретные результаты удается получить, лишь используя численные расчеты. При этом в связи с развитием вычислительной техники все большее распространение получают методы больших частиц (см., например, ([1-4])). Здесь предложен один из вариантов этого метода для расчета двумерной задачи о движении заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Авторы ставили своей основной задачей выяснение ряда методических вопросов. Исследован, в частности, выбор экономичного разностного метода решения уравнения для потенциала поля и способ расчета объемной плотности зарядов. Получены также результаты, представляющие определенный физический интерес.

1. В прямоугольной двумерной области G рассматривается задача о движении нерелятивистских заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях. Магнитное поле $\mathbf{H}$ считается заданным, электрическое поле $\mathbf{E}$, создаваемое движущимися зарядами, определяется путем решения уравнения Пуассона

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -4\pi\rho \tag{1}$$

с заданными граничными условиями. Здесь φ — потенциал электрического поля, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, ρ — плотность электрических зарядов.

Движение зарядов будем определять с помощью метода больших частиц. Пусть каждая большая частица содержит $M \gg 1$ исходных элементарных частиц с массой m и зарядом e. Тогда ее движение описывается уравнением

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -\frac{e}{m}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\left[\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times\mathbf{H}\right]\right), \tag{2}$$

в котором $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й частицы, $i = 1, 2, \ldots, N_0$.

Введем функцию $n = n(\mathbf{r}, t)$ концентрации больших частиц. Тогда $\rho = eMn$. Если указать алгоритм определения n, то система уравнений (1) — (2) станет замкнутой.

2. Уравнения (1) и (2) интегрируются с помощью метода конечных разностей. Введем прямоугольную равномерную сетку ω_h в области G и сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots\}$ по переменному t. Значения функций $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, φ, n будем определять в узлах сетки ω_h.

Для решения уравнения (2) используется симметричная схема второго порядка по τ, при определении $\mathbf{r}_i$ в момент $t = t_{j+1}$ используются значения $\mathbf{E}$ на предыдущем слое $t = t_j$. Зная $\mathbf{r}_i$ при $t = t_{j+1}$, находим $n(\mathbf{r}_i, t_{j+1})$, после чего решается уравнение Пуассона (2) и определяется напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_{j+1})$. Указанный цикл повторяется при переходе к слою $t = t_{j+2}$.

3. Концентрация больших частиц в узлах сетки ω_h подсчитывается «размазыванием» каждой частицы по ячейке сетки. Пусть x_A, y_A — координаты узла A, x_i, y_i — координаты i-й частицы. Обозначим $z_1 = (x_i - x_A) / h_1$, $z_2 = (y_i - y_A) / h_2$ (h_1 и h_2 — шаги сетки ω_h по координатам x и y соответственно). Тогда вклад $n_i(A)$ i-й частицы в значение функции $n(A) = \sum_i n_i(A)$ в узле A найдем по формуле $n_i(A) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, где f — неизвестная пока функция сглаживания.

Часто пользуются ступенчатой функцией $f = f_1$ (см., например, [1]), где $f_1(z) = 1$, если $|z| \leqslant 0{,}5$, $f_1(z) = 0$, если $|z| > 0{,}5$.

В [2, 3], как и в ряде других работ американских авторов, $f(z) = f_2(z)$, где $f_2(z) = 1 - z$, если $|z| \leqslant 1$, $f_2(z) = 0$ при $|z| > 1$.

Мы пользуемся следующим видом функции f: $f(z) = f_3(z)$, где $f_3(z) = 1 - 2z^2$ при $|z| \leqslant 0{,}5$, $f_3(z) = 2(1 - z)^2$ при $0{,}5 \lessgtr |z| \leqslant 1$, $f_3(z) = 0$, если $|z| > 1$. Заметим, что функция f_1 — разрывна, f_2 — непрерывна, f_3 — непрерывно дифференцируема. Такой же характер гладкости имеет $n = n(x, y)$.

4. Уравнение Пуассона аппроксимируется разностной схемой четвертого порядка. Полученная система разностных уравнений решается итерационным методом, который предложен в работе [5] и является модификацией метода Писмена — Рекфорда [6] для разностных схем четвертого порядка точности. Чтобы получить наибольшую скорость сходимости итерационного процесса, по формулам Жордана [7] определяется оптимальный набор итерационных параметров.

5. Для задачи, имеющей аналитическое решение, сравнивались способы определения концентрации частицы с выбором функции f в виде $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$. Оказалось, что выбор функции f в виде $f_3(z)$ обеспечивает более высокую точность решения.

6. В качестве примера применения разработанного алгоритма рассмотрена задача о прохождении электрического тока через плоский диод ($\mathbf{H} = 0$ всюду в G), когда эмиссия электронов происходит с ограниченного участка поверхности катода.

После перехода к безразмерным переменным получаем задачу совместного решения уравнения

$$\partial^2\varphi / \partial x^2 + \partial^2\varphi / \partial y^2 = -\varkappa n \tag{3}$$

в области $G = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < L\}$ с граничными условиями

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=1} = -1, \quad \varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=L} = -x \tag{4}$$

и системы уравнений движения частиц

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -k \operatorname{grad} \varphi, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, $i = 1, 2, \ldots, N_0$, $0 < t < T$. Здесь k и $\varkappa$ — безразмерные параметры, k характеризует отношение электрических сил к силам инерции, $\varkappa$ — отношение потенциала поля больших частиц к потенциалу внешнего поля.

Частицы поступают в область G с отрезка $\frac{L-a}{2} \leqslant y \leqslant \frac{L+a}{2}$ границы $x = 0$ равными порциями по n_τ частиц через равные промежутки времени τ с нулевыми скоростями. Выбрано $L = 5$, $a / L \leqslant 0{,}2$.

Поскольку уравнение (3) аппроксимируется схемой четвертого порядка точности, то взята достаточно грубая сетка ω_h: $h_1 = h_2 = 0{,}1$.

Алгоритм реализован в виде программы на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6.

7. Был проведен расчет ряда вариантов с различными значениями параметров k, $\varkappa$, a. По числу осевших на границы $x = 0$ и $x = 1$ частиц определялись токи на этих границах.

Изучалось влияние числа M зарядов в большой частице на поведение решения. При малых M (например, $\varkappa = 0{,}2$ при $k = 2$, $a = 1$) все частицы, поступающие в область G, не задерживаются в ней и уходят на границу $x = 1$. Это объясняется малостью объемного заряда в области G и соответствует режиму насыщения в электронных вакуумных приборах.

При увеличении M в несколько раз ($\varkappa \approx 1$ при $k = 2$, $a = 1$) на левой границе $x = 0$ начинаются периодические колебания тока с амплитудой порядка n_2 / τ. В этом случае величина поля, создаваемого объемным зарядом частиц, сравнима с величиной внешнего поля. Устанавливается процесс периодического запирания области у границы $x = 0$.

Объемный заряд в области G расслаивается, однако, по мере продвижения частиц вправо силы кулоновского взаимодействия размывают неоднородности плотности и расширяют поток. Поэтому колебания тока на правой границе $x = 1$ много меньше. Отметим, что с ростом M величина тока через область G уменьшается, а пульсации тока на границах растут.

8. Расчеты показали, что задача существенно неодномерная: отношение ξ ширины потока a_1 на выходе (при $x = 1$) к ширине потока a на входе (при $x = 0$) меняется в пределах от 1,5 до 4 при $k = 2$ и изменении a от 0,25 до 1, $\varkappa$ от 0,3 до 3. При этом ξ растет с увеличением $\varkappa$ (или M) или уменьшением a.

Известно [8], что в случае одномерной задачи о прохождении тока через плоский диод для плотности установившегося тока j справедлива формула Лэнгмюра

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{d^2} \tag{6}$$

при условии $j < j_н$, где $j_н$ — плотность тока насыщения, V — разность потенциалов между электродами, d — расстояние между ними.

Пользуясь безразмерными величинами a, ξ, k, $\varkappa$, получим из (6):

$$I_т = 62{,}9\, a\xi k^{1/2} / \varkappa, \tag{7}$$

$I_т$ — величина тока больших частиц в сечении $x = 1$, $\xi = a_1 / a$.

Величина среднего тока $I_п$ при $x = 1$, полученная при численном решении задачи, определяется формулой

$$I_п = \frac{N_п}{(n_2 - n_1)\tau}, \tag{8}$$

где $N_п$ — число частиц, осевших на границу $x = 1$ за время $n_1\tau \leqslant t \leqslant n_2\tau$, а n_1 и n_2 — достаточно большие целые числа, так чтобы $n_1\tau$ было больше времени установления тока при $x = 1$.

Расчеты показали хорошее совпадение токов $I_т$ и $I_п$ для всех значений $0{,}33 \leqslant a \leqslant 1$, однако, с уменьшением a намечается расхождение величин $I_т$ и $I_п$, причем $I_т > I_п$. При $a = 0{,}25$ разность $I_т - I_п$ имеет тот же порядок, что и ошибка определения тока $I_п$.

Таким образом, формула Лэнгмюра оказалась справедливой для рассмотренной модели при $0{,}33 \leqslant a \leqslant 1$.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Ломнев, Расчет и исследование электрофизических установок и электрофизических явлений на цифровых вычислительных машинах, М., 1965. [2] C. K. Birdsall, D. Fuss, J. Comp. Phys., 3, 4, 494 (1969). [3] C. G. Smith, A. S. Bishop. International Atomic Energy Agency, CN-24/0-9. Third Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Novosibirsk, August, 1968. [4] В. А. Епальский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 74, 93 (1966). [5] А. А. Самарский, ДАН, 179, 3, 423 (1968). [6] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 3, 1, 28 (1955). [7] E. L. Wachspress, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 11, 4, 994 (1963). [8] Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М.—Л, 1948.