ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 11 Март 1971 Апрель № 2

УДК 518:517.944/.947

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. А. САМАРСКИЙ, И. В. ФРЯЗИНОВ

(Москва)

Рассматриваются однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами для областей достаточно общего вида с граничным условием I рода.

Разностные схемы для уравнения эллиптического типа и особенно для уравнения Пуассона с различных точек зрения исследовались в большом числе работ. Отметим, например, работы [1–11].

В данной статье для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами для областей достаточно общего вида с граничным условием I рода рассматриваются однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Доказывается равномерная сходимость схем со скоростью $O(h^2 \ln(V_0/H_*))$. Здесь V_0 — объем рассматриваемой области G, h — максимальный шаг пространственной решетки $R_p{}^h$:

$$h = \max_{x_i \in \bar{G}} \max_{1 \leq \alpha \leq p} \hbar_\alpha(x_i),$$

где $\hbar_\alpha(x_i)$ — средний в узле x_i шаг решетки $R_p{}^h$ по направлению оси координат ox_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$, p — число измерений); H_* — минимальный объем ячейки,

$$H_* = \min_{x_i \in \bar{G}} H(x_i), \qquad H(x_i) = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha(x_i).$$

Точность решения исходной задачи определяется ошибками, допускаемыми как в узлах приграничной зоны, так и в строго внутренних узлах. Погрешность, вносимая аппроксимацией уравнения в узлах приграничной зоны, оценивается либо с помощью принципа максимума (см., например, [5]), либо с помощью мажорантной функции [7]. Для равномерной оценки погрешности, возникающей в строго внутренних узлах, используются как метод мажорантной функции [6, 7], так и метод функции Грина [1].

Для уравнения эллиптического типа с переменными и достаточно гладкими коэффициентами в [1] рассмотрены на равномерной сетке схемы об-

щего вида, и для них получены с помощью функции Грина оценки скорости сходимости в сеточной норме C. При этом предполагалось, что граница области является сколь угодно гладкой поверхностью (кривой). Случай, когда граница является кусочно-гладкой, содержит конические точки, потребовал специального исследования [7]. При этом оказалось необходимым использовать квазиравномерные сетки.

Целью данной статьи является построение и изучение однородных разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами:

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q(x)u = -f(x),$$

$$k_\alpha(x) \geqslant c_1 = \text{const} > 0, \qquad q(x) \geqslant 0, \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

на неравномерных сетках.

Естественно требовать, чтобы самосопряженный и отрицательно определенный оператор L (при однородном краевом условии) аппроксимировался разностным оператором Λ, сохраняющим те же свойства в пространстве сеточных функций. Между тем оператор Λ, соответствующий схеме «крест», в [2, 5] в случае произвольной области не является, вообще говоря, ни самосопряженным, ни отрицательно определенным, что не было замечено в [11].

В данной работе построена схема «крест» с самосопряженным, отрицательно определенным оператором Λ в произвольной области на неравномерной сетке. Установлена равномерная сходимость схемы в случае непрерывных (и достаточно гладких) коэффициентов и достаточно гладкого решения исходной задачи на последовательности неравномерных сеток со скоростью $O(h^2 \ln (V_0 / H_*))$. В классе разрывных коэффициентов равномерная сходимость схемы с этой же скоростью установлена для одного частного случая. Рассмотрены также вопросы о сходимости в сеточных нормах L_2, W_2^1.

Для равномерной оценки точности (в сеточной норме C) p-мерной схемы «крест» оказался пригодным разработанный в [10] метод энергетических неравенств n-го ранга, который позволил получить оценку решения разностной задачи в сеточной норме L_{2^n}, где n — любое целое число. Из этой оценки следует сходимость в сеточной норме C.

§ 1. Постановка задачи

1. Постановка исходной задачи

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства R_p, G — ограниченная область с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$. Предположим, что пересечение области G прямой, проходящей через точку $x \in G$ и параллельной оси координат ox_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, состоит из конечного числа интервалов.

Рассмотрим задачу: найти непрерывную в $\bar{G}$ функцию $u = u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$Lu = -f(x) \text{ при } x \in G; \quad u = \nu(x) \text{ при } x \in \Gamma, \tag{1}$$

где L — эллиптический дифференциальный оператор, не содержащий смешанных производных:

$$
(2)\qquad
\begin{gathered}
Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),\\
k_\alpha(x) \geqslant c_1 = \text{const} > 0,\\
k_\alpha(x) \in C^3(\bar{G}), \qquad f(x) \in C^2(\bar{G}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p.
\end{gathered}
$$

Предположим, что существует решение задачи (1), (2) — функция $u(x) \in C^4(\bar{G})$. Задачи с разрывными коэффициентами $k_\alpha(x)$ и правой частью $f(x)$ рассмотрены в п. 2, § 3.

2. Сетка

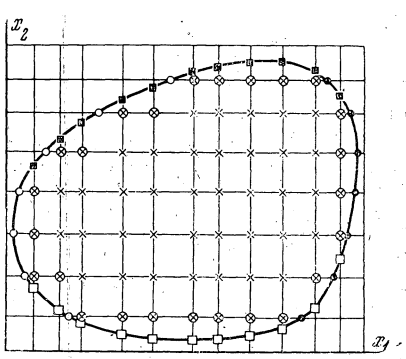
1. Решетка. Проведем p семейств гиперплоскостей

$$x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} \qquad i_\alpha = 0, \pm 1, \ldots, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad x_\alpha^{(i_\alpha)} > x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}$$

Обозначим через $x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \ldots x_p^{(i_p)})$ точки пересечения этих гиперплоскостей. Будем говорить, что точки x_i образуют решетку $R_p{}^h$ в исходном пространстве R_p.

2. Сетка. Внутренние и граничные узлы сетки. Построим сетку $\bar{\omega}_h$ узлов в области $\bar{G}$. Назовем точки x_i решетки $R_p{}^h$, принадлежащие G, внутренними узлами сетки; множество внутренних узлов сетки обозначим через $\omega_h \equiv \omega = \{x_i \in G \cap R_p{}^h\}$.

Проведем через узлы $x_i \in \omega$ прямые, параллельные оси координат ox_α. Для упрощения изложения предположим, что пересечением каждой из этих прямых с G будет только один интервал $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha(x_i)$. Концы этого интервала назовем граничными узлами по направлению x_α (по x_α). Множество всех граничных по x_α узлов обозначим через γ_α; $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha{}^+ \cup \gamma_\alpha{}^-$, где $\gamma_\alpha{}^+$, $\gamma_\alpha{}^-$ — множества правых и левых граничных узлов по x_α. Через $\gamma_h \equiv \gamma$ обозначим множество всех граничных узлов $\gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha$.



Фиг. 1. ■ — для $\gamma_2{}^+$; □ — для $\gamma_2{}^-$; ● — для $\gamma_1{}^+$; ○ — для $\gamma_1{}^-$; ⊗ — для ω_γ; × — для ω^0

Множество всех внутренних и граничных узлов назовем сеткой $\bar{\omega}_h \equiv \bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ (см. фиг. 1).

3. Цепочки узлов. Рассмотрим один из указанных выше интервалов Δ_α. Множество узлов $x \in \omega$, лежащих на этом интервале, назовем цепочкой $Ц_\alpha$. Множество, состоящее из узлов $x \in Ц_\alpha$ и концов интервала Δ_α, обозначим через $\bar{Ц}_\alpha$. Обозначим, следуя [5], через $x^{(+1_\alpha)}$ и $x^{(-1_\alpha)}$ узлы, бли-

жайшие к узлу $x \in \bar{\Pi}_\alpha$ справа и слева и принадлежащие $\bar{\Pi}_\alpha$. Узлы $x^{(\pm 1_\alpha)}$ будем называть соседними по x_α с узлом x, так что

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)}, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}).$$

Проведем детальную классификацию внутренних узлов.

4. Приграничные узлы. Назовем узел $x \in \omega$ приграничным по x_α, если хотя бы один из его соседних по направлению x_α узлов принадлежит γ_α. Обозначим множество приграничных по x_α узлов через ω_{γ_α}. Возможны три типа приграничных узлов:

1) если $x^{(-1_\alpha)} \in \gamma_\alpha^-$, $x^{(+1_\alpha)} \in \omega$, то $x \in \omega_{\gamma_\alpha}^-$;
2) если $x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_\alpha^+$, $x^{(-1_\alpha)} \in \omega$, то $x \in \omega_{\gamma_\alpha}^+$;
3) если $x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_\alpha^+$, $x^{(-1_\alpha)} \in \gamma_\alpha^-$, то $x \in \omega_{\gamma_\alpha}^0$.

Множество всех приграничных узлов есть сумма трех множеств:

$$\omega_{\gamma_\alpha} = \omega_{\gamma_\alpha}^+ \cup \omega_{\gamma_\alpha}^- \cup \omega_{\gamma_\alpha}^0.$$

Обозначим через ω_α дополнение ω_{γ_α} до ω, так что $\omega = \omega_\alpha \cup \omega_{\gamma_\alpha}$, через ω_γ — множество приграничных узлов по всем направлениям

$$\omega_\gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{p} \omega_{\gamma_\alpha},$$

через ω^0 — дополнение ω_γ до ω, так что $\omega = \omega_\gamma \cup \omega^0$. Очевидно, что ω^0 состоит из узлов, для которых все соседние узлы являются внутренними (см. фиг. 1).

5. Регулярные и нерегулярные узлы. Пусть x — внутренний узел сетки ($x \in \omega$), а $x^{(\pm 1_\alpha)} \in \bar{\omega}$ — его соседние по направлению x_α узлы, либо $x^{(\pm 1_\alpha)} \in \omega$, либо $x^{(\pm 1_\alpha)} \in \gamma$. Будем говорить:

а) узел $x \in \omega$ является регулярным по направлению x_α, если оба узла $x^{(\pm 1_\alpha)}$ являются точками решетки R_p^h;

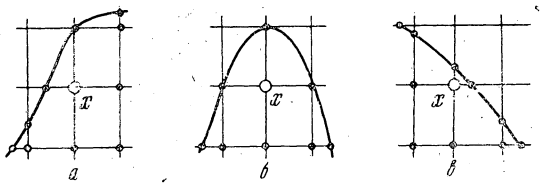
б) узел $x \in \omega$ нерегулярный по x_α, если хотя бы один из узлов $x^{(\pm 1_\alpha)}$ или $x^{(-1_\alpha)}$ не является точкой решетки R_p^h.

Введем обозначения: $\omega_{\alpha,\,\mathrm{reg}} \equiv \omega_{\alpha,\,\mathrm{r}}$ — множество регулярных по x_α узлов, $\omega_{\alpha,\,\mathrm{irreg}} \equiv \omega_{\alpha,\,\mathrm{ir}}$ — множество нерегулярных по x_α узлов, $\omega_{\mathrm{ir}} = \bigcup_{\alpha=1}^{p} \omega_{\alpha,\mathrm{ir}}$ множество всех нерегулярных узлов (нерегулярных хотя бы по одному направлению). Здесь ω_{r} — дополнение ω_{ir} до ω, так что $\omega = \omega_{\mathrm{ir}} \cup \omega_{\mathrm{r}}$. На фиг. 2*а* изображен узел, нерегулярный по x_1 и регулярный по x_2; на фиг. 2*б* — регулярный по x_1 и x_2; на фиг. 2*в* — нерегулярный по x_1 и x_2.

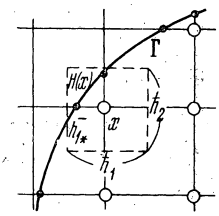
Отмеченные на фиг. 2 узлы принадлежат, соответственно, множествам $\omega_{\gamma_1}^-$, $\omega_{\gamma_2}^+$ (фиг. 2*а*); $\omega_{\gamma_1}^0$, $\omega_{\gamma_2}^+$ (фиг. 2*б*), $\omega_{\gamma_1}^+$, $\omega_{\gamma_2}^+$ (фиг. 2*в*).

6. Шаги сетки. Рассмотрим узлы $x \in \bar{\omega}$ и $x^{(\pm 1_\alpha)} \in \bar{\omega}$. Расстояния между ними будем называть шагами сетки $\bar{\omega}$ и обозначать через $h_\alpha^\pm$. Если

$x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{r}}$ — регулярный узел, то $h_\alpha^+ = x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}$, $h_\alpha^- = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}$. (Здесь и в дальнейшем через $x_\alpha^{(i_\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, будем обозначать координаты точек решетки $R_p{}^h$.) В этом случае шаг $h_\alpha^\pm = h_\alpha^\pm(x_\alpha)$ зависит только от одного аргумента $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)}$. Пусть $x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{ir}}$ — нерегулярный



Фиг. 2



Фиг. 3

узел. Его расстояние до соседнего граничного узла $x^{(+1_\alpha)}$ (или $x^{(-1_\alpha)}$), не являющегося точкой решетки $R_p{}^h$, обозначим через $h_{\alpha*}{}^+$ ($h_{\alpha*}{}^-$):

$$h_{\alpha*}^+ < x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}, \qquad h_{\alpha*}^- < x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}.$$

Шаги $h_{\alpha*}{}^\pm$ зависят, вообще говоря, от всех аргументов $x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \ldots, x_p^{(i_p)}$ (от всех индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$).

Введем также шаги

$$\hbar_\alpha = 0.5(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)})$$

во всех внутренних узлах $x \in \omega$. Очевидно, что $\hbar_\alpha$ зависит только от координаты x_α (индекса i_α). В регулярном узле

$$\hbar_\alpha = 0.5(h_\alpha{}^+ + h_\alpha{}^-)$$

Если x — нерегулярный узел и, например, $x^{(-1_\alpha)}$ не является точкой решетки $R_p{}^h$, а $x^{(+1_\alpha)}$ — регулярный узел, то

$$\hbar_\alpha = 0.5\,(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}) > \hbar_{\alpha*}, \quad \text{где } \hbar_{\alpha*} = 0.5\,(h_\alpha^+ + h_{\alpha,*}^-).$$

Отметим, что в [11] в нерегулярных узлах в качестве $\hbar_\alpha$ фактически выбирался шаг $\hbar_{\alpha*}$, зависящий, вообще говоря, от всех координат (см. фиг. 3).

Для единообразия записи положим

$$h_\alpha^+ = \begin{cases} x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha)}, & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{r}}, \\ h_{\alpha*}^+, & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{ir}}; \end{cases}$$

$$h_\alpha^- = \begin{cases} x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}, & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{r}}, \\ h_{\alpha*}^-, & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{ir}}. \end{cases}$$

7. Ячейки сетки. Поставим в соответствие каждому узлу $x \in \omega$ замкнутую область $H(x)$ (объем ячейки), ограниченную кусками $s_\alpha{}^\pm$ гиперплоскостей, проходящих через точки $\bar{x}^{(\pm 0.5_\alpha)} = (x_1^{(i_1)} \ldots x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, 0.5(x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)} + x_\alpha^{(i_\alpha)}), x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)})$ и ортогональных осям координат ox_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$).

В дальнейшем тело и объем его, фигуру и ее площадь будем обозначать одними и теми же буквами, так что

$$(3)\qquad H(x)=\prod_{\alpha=1}^{p}h_\alpha,\quad s_\alpha^{\pm}=s_\alpha=\prod_{\beta\neq\alpha}^{1\div p}h_\beta.$$

Рассмотрим цепочку узлов $Ц_\alpha$. Все узлы $Ц_\alpha$ имеют одинаковые координаты $x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}$ и разные $x_\alpha^{(i_\alpha)}$, $i_\alpha = i_\alpha^1, i_\alpha^2, \ldots$. Поэтому шаги $h_1, h_2, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_p$ во всех узлах $x \in Ц_\alpha$ одни и те же. Это дает возможность каждой цепочке $Ц_\alpha$ поставить в соответствие площадку

$$(4)\qquad s_\alpha=\prod_{\beta\neq\alpha}^{1\div p}h_\beta\qquad (s_\alpha=\mathrm{const}_\alpha \text{ при } x\in Ц_\alpha),$$

8. Потоковые (промежуточные) узлы. В дальнейшем будет удобно относить некоторые из сеточных функций к узлам основной сетки — сетки $\bar\omega$, а другие функции, как например первые разностные «производные» y_{x_α} и $y_{\bar x_\alpha}$ (см. п. 3), — к потоковым точкам $x^{(\pm 0.5\alpha)}=0.5(x+x^{(\pm 1\alpha)})$; $x, x^{(\pm 1_\alpha)}\in\bar\omega$. Множество потоковых узлов по направлению x_α, $x^{(\pm 0.5_\alpha)}\in G$ обозначим через $\tilde\omega_\alpha$, а множество потоковых узлов $x^{(\pm 0.5_\alpha)}\in\omega_\alpha$, лежащих на прямой, параллельной оси ox_α и проходящей через узел $x^{(\pm 0.5\alpha)}\in\tilde\omega_\alpha$, назовем цепочкой $\tilde Ц_\alpha$. Узлы $x^{(\pm 0.5\alpha)}\in\tilde\omega_\alpha$, ближайшие к граничным узлам $x^{(\pm 1\alpha)}\in\gamma_\alpha$, назовем приграничными потоковыми узлами. По аналогии с пп. 4 введем соответствующие обозначения для множеств приграничных потоковых узлов: $\tilde\omega_{\gamma_\alpha}^{+}$, $\tilde\omega_{\gamma_\alpha}^{-}$, $\tilde\omega_{\gamma_\alpha}=\tilde\omega_{\gamma_\alpha}^{+}\cup\tilde\omega_{\gamma_\alpha}^{-}$, $\tilde\omega_\alpha'$ — дополнение $\tilde\omega_{\gamma_\alpha}$ до $\tilde\omega_\alpha$ $(\tilde\omega_\alpha=\tilde\omega_{\gamma_\alpha}\cup\tilde\omega_\alpha')$. Каждому узлу $x^{(\pm 0.5\alpha)}\in\tilde\omega_\alpha$ поставим в соответствие объем

$$H_\alpha^{\pm}=s_\alpha h_\alpha^{\pm}.$$

Будем обозначать буквой h максимальный шаг по пространственным переменным. Условимся обозначать все постоянные, не зависящие от h, одной буквой M.

Будем считать, что у каждого узла $x\in\omega$ есть по крайней мере один соседний (по какому-либо направлению) узел $\xi\in\omega$. Этого можно добиться, выбирая достаточно малые шаги $h_\alpha^{\pm}$ решетки R_p^h. Совокупность узлов, соседних с узлом $x\in\omega$ по x_α и принадлежащих ω, обозначим через $\overline{Ш}_\alpha'(x)$:

$$\overline{Ш}_\alpha'(x)=\begin{cases} x^{(+1_\alpha)},\ x^{(-1_\alpha)}, & x\in\omega_\alpha,\\ x^{(\pm 1_\alpha)}, & x\in\omega_{\gamma_\alpha}^{\mp}.\end{cases}$$

Введем обозначение

$$\overline{Ш}'(x)=\bigcup_{\alpha=1}^{p}\overline{Ш}_\alpha'(x),\qquad x\notin\overline{Ш}'(x).$$

3. Сеточные функции и разностные операторы

В дальнейшем всюду будем рассматривать только узлы основной сетки $\bar\omega$ и потоковых сеток $\tilde\omega_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Пусть x, $x^{(\pm 1_\alpha)}$ — узлы сетки $\bar\omega$, $x^{(\pm 0.5\alpha)}$ — узлы потоковой сетки $\tilde\omega_\alpha$. Пусть $y=y(x)$, $x\in\bar\omega$ и $v_\alpha(x')$,

$x' \in \tilde{\omega}_\alpha$, — сеточные функции, заданные, соответственно, на основной сетке $\bar{\omega}$ и потоковых сетках $\tilde{\omega}_\alpha$. Введение потоковых сеточных функций позволяет придать большую наглядность и физичность выводу разностных схем и облегчает их исследование. Введем обозначения

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}) \qquad y_{x_\alpha}^{+} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_\alpha^{+}, \qquad y_{x_\alpha}^{-} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha^{-}.$$

Функцию $v_\alpha \equiv v_\alpha^{+} = y_{x_\alpha}^{+} (v_\alpha^{-} = y_{x_\alpha}^{-})$, являющуюся разностным аналогом производной $\partial u / \partial x_\alpha$, будем относить к потоковым узлам $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_\alpha$.

Перейдем к написанию разностной аппроксимации эллиптического оператора L на сетке ω. Предварительно рассмотрим одномерный аналог задачи (1):

$$Lu = (ku')' = -f(x), \quad 0 < x < l, \quad u(0) = \nu_1, \quad u(l) = \nu_2.$$

Пусть

$$\bar{\omega} = \omega \cup \gamma, \qquad \omega = \{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, N-1\}, \qquad x_{i+1} > x_i.$$
$$\gamma = \{0, l\}.$$

Для получения разностной схемы используем интегро-интерполяционный метод. Проинтегрируем уравнение $Lu = -f$ по x от $x_i^{(-0.5)} \equiv 0.5\,(x_i + x_{i-1})$ до $x_i^{(+0.5)} \equiv 0.5\,(x_{i+1} + x_i)$:

$$\frac{w^+ - w^-}{\hbar} = -\frac{1}{\hbar} \int\limits_{x^{(-0.5)}}^{x^{(+0.5)}} f dx, \quad \text{где } w^{\pm} = ku'|_{x=x^{(\pm 0.5)}}. \tag{5}$$

Заменим $\omega^{\pm}$ разностным аналогом

$$W^{\pm} = a^{\pm} y_x^{\pm},$$

где сеточная функция $a^{\pm}$ аппроксимирует коэффициент $k(x)$ в потоковых точках $x^{\pm(0.5)}$ со вторым порядком:

$$a^{\pm} = k(x^{(\pm 0.5)} + O((h^{\pm})^2).$$

Очевидно, что $W^{\pm}$ — потоковая сеточная функция. Заменим правую часть (5) сеточной функцией φ (например, положим $\varphi = f(x)$, $\varphi = (1/\hbar) \int\limits_{x^{(-0.5)}}^{(+0.5)} f\,dx$ и т. п., см. [4, 5]). В результате приходим к разностному уравнению

$$\Lambda y = -\varphi \text{ при } x \in \omega,$$

где

$$\Lambda y = (a y_x)_{\hat{x}} = \frac{1}{\hbar} (a^+ y_x^+ - a^- y_x^-).$$

Здесь введено обозначение $\Phi_{\hat{x}} = (\Phi(x^{(+0.5)}) - \Phi(x^{(-0.5)}))\,/\,\hbar$, где Φ — любая сеточная функция, определенная на $\tilde{\omega}$ (при $x_i^{(\pm 0.5)} = 0.5\,(x_{i\pm 1} + x_i)$, $\hbar_i = 0.5\,(x_{i+1} - x_{i-1})$).

В случае p измерений поступим аналогично. Рассмотрим сначала узлы $x \in \omega$, соответствующие которым объемы H принадлежат $\bar{G}$. Интегрируя уравнение (1) по объему $H \in \bar{G}$, содержащему такой узел x, получим тождество

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{1}{s_\alpha} \int\limits_{s_\alpha} w_\alpha ds_\alpha \right)_{\hat{x}_\alpha} + \frac{1}{H} \int\limits_{H} f\,dH = 0, \tag{6}$$

где

$$ds_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha}^{1\div p} dx_\beta, \qquad dH = \prod_{\alpha=1}^{p} dx_\alpha,$$

$w_\alpha = k_\alpha \partial u / \partial x_\alpha$ — поток по направлению x_α. Коэффициенту k_α поставим в соответствие сеточную функцию a_α такую, что

$$a_\alpha^\pm = k_\alpha(x^{(\pm 0,5\alpha)}) + O((h_\alpha^\pm)^2), \qquad a_\alpha^\pm \geqslant c_1 > 0. \tag{7}$$

Средний поток $(1/s_\alpha)\int_{s_\alpha} w_\alpha ds_\alpha$ через площадку s_α аппроксимируем разностным выражением

$$W_\alpha^\pm \equiv W_\alpha(x^{(\pm 0,5\alpha)}) = a_\alpha^\pm y_{x_\alpha}^\pm,$$

а левую часть (6) заменим на

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (W_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}, \quad \text{где } (W_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = (W_\alpha^+ - W_\alpha^-)/\hbar_\alpha.$$

Заменим приближенно $(1/H)\int_H f dH$ в (6) какой-либо сеточной функцией φ (например, положим $\varphi = f(x)$). При этом будем требовать, чтобы выполнялось условие аппроксимации

$$\varphi - f(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} ((\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \bar{\mu}_\alpha), \qquad \mu_\alpha^\pm = O((h_\alpha^\pm)^2), \qquad \bar{\mu}_\alpha = O(\hbar_\alpha^2). \tag{8}$$

В результате приходим к разностному аналогу оператора L — оператору Λ:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y,$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(a_\alpha^+ \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - a_\alpha^- \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-}\right),$$

где

$$\hbar_\alpha = 0.5(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}).$$

В остальных узлах сетки оператор Λ будем определять по этой же формуле. Таким образом, приходим к разностному уравнению

$$\Lambda y = -\varphi(x), \qquad x \in \omega.$$

Эта схема отличается от общепринятой [4] схемы лишь в нерегулярных приграничных узлах, где шаг $\hbar_\alpha$ имеет другой смысл, например $\hbar_\alpha = \hbar_{\alpha *} = 0.5(h_\alpha^+ + h_{\alpha *}^-)$, если узел $x^{(-1_\alpha)}$ не является точкой решетки R_p^h.

4. Постановка разностной задачи и погрешность аппроксимации

Поставим в соответствие исходной задаче (1) разностную задачу: найти сеточную функцию $y(x)$, определяемую на $\bar{\omega}$ и удовлетворяющую условиям

$$\Lambda y = -\varphi(x) \text{ при } x \in \omega, \quad y = \nu(x) \text{ при } x \in \gamma. \tag{9}$$

Здесь Λ — определенный выше оператор, сеточные функции $a_\alpha^\pm$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, φ удовлетворяют условиям аппроксимации (7) и (8).

Точность разностной схемы (9) определяется величиной ошибки $z = y - u$, где u — решение исходной задачи (1), y — решение разностной задачи (9). Подставляя в (9) $y = z + u$, для z получаем задачу

$$\Lambda z = -\psi(x) \text{ при } x \in \omega, \quad z = 0 \text{ при } x \in \gamma, \tag{10}$$

где $\psi = \Lambda u + \varphi$ — погрешность аппроксимации схемы (9). Используя формулу Тейлора при указанных выше условиях гладкости и условиях (8), погрешность ψ в регулярных узлах представим в виде

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha, \qquad \Psi_\alpha = (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha, \qquad x \in \omega_{\mathrm{r}},$$

где

$$\chi_\alpha^{\pm} = \left[(a_\alpha^{\pm} - k_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{(h_\alpha^{\pm})^2}{8}\left(\frac{a_\alpha^{\pm}}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right)\right]_{x=x^{(\pm 0.5_\alpha)}} +$$
$$+ \mu_\alpha^{\pm}, \qquad \psi_\alpha = \bar{\mu}_\alpha + O(\hbar_\alpha^2).$$

Из (7), (8) получаем, что

$$\chi_\alpha^{\pm} = O((h_\alpha^{\pm})^2), \qquad \psi_\alpha = O(\hbar_\alpha^2) \text{ при } x \in \omega_{\mathrm{r}}.$$

В нерегулярных узлах ($x \in \omega_{\mathrm{ir}}$) погрешность аппроксимации, очевидно, будет величиной $O(1)$.

В самом деле, так как

$$(W_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = (W_\alpha^+ - W_\alpha^-)/\hbar_\alpha = \frac{\hbar_{\alpha *}}{\hbar_\alpha}\frac{W_\alpha^+ - W_\alpha^-}{\hbar_{\alpha *}} = \frac{\hbar_{\alpha *}}{\hbar_\alpha} L_\alpha u +$$
$$+ O(\hbar_\alpha) = O(1),$$

то

$$\Lambda u = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\hbar_{\alpha *}}{\hbar_\alpha} L_\alpha u + O(\hbar_\alpha) = Lu + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\hbar_{\alpha *} - \hbar_\alpha}{\hbar_\alpha} L_\alpha u + O(h),$$

откуда следует

$$\Lambda u - Lu = O(1), \quad \psi = O(1) \text{ при } x \in \omega_{\mathrm{ir}}.$$

Для единообразия погрешность запишем в виде

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha, \qquad \Psi_\alpha = (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

$$\chi_\alpha^{\pm} = \chi_\alpha(x^{(\pm 0.5_\alpha)}) = O((h_\alpha^{\pm})^2), \qquad \psi_\alpha = O(\hbar_\alpha^2), \tag{11}$$
$$\psi_\alpha^* = \begin{cases} O(1), & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{ir}}, \\ 0, & x \in \omega_{\alpha,\,\mathrm{r}}. \end{cases}$$

На равномерной решетке R_p^h, когда по каждому направлению x_α имеем

$$\hbar_\alpha = 0.5\,(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}) = \mathrm{const}_\alpha, \quad \chi_\alpha(x^{(\pm 0.5_\alpha)}) = 0.$$

Решение задачи (10), (11) будем искать в виде

$$z = v_1 + v_2 + v_3, \tag{12}$$

где функции v_k, $k = 1, 2, 3$, являются решениями задач

$$(13)\qquad \begin{gathered} \Lambda v_k = -\overline{\Psi}_k \text{ при } x \in \omega, \qquad v_k = 0 \text{ при } x \in \gamma, \\ \overline{\Psi}_k = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_{\alpha,k}, \qquad \psi_{\alpha,1} = (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}, \qquad \psi_{\alpha,2} = \psi_\alpha, \qquad \psi_{\alpha,3} = \psi_\alpha^*, \\ k = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Оценки для функций $\chi_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)})$, ψ_α, ψ_α^* в классе достаточно гладких функций $u(x)$, $k_\alpha(x)$, $f(x)$ даются формулами (11).

§ 2. Априорные оценки

1. О принципе максимума и мажорантных функциях. Вспомогательные предложения

Для получения оценок решения разностных эллиптических уравнений часто применяется основанный на принципе максимума метод построения мажорантных функций (см., например, [5, 7]).

Оценки, основанные на принципе максимума, оказываются эффективными для исследования точности схемы при отсутствии аппроксимации в нерегулярных приграничных узлах.

Напомним известные результаты. Разностное уравнение $L_h v = -\varphi$; граничное условие $v|_\gamma = \nu$ (L_h — линейный оператор) запишем в виде

$$(14)\qquad A(x)v(x) = \sum_{\xi \in \overline{\Pi}'} B(x,\xi)v(\xi) + F(x) \text{ при } x \in \omega,$$

где $\overline{\Pi}'(x)$ — множество узлов, определенное в п. 2, § 1.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

$$(15)\qquad \begin{gathered} A(x) > 0, \qquad B(x,\xi) > 0, \qquad A(x) - \sum_{\xi \in \overline{\Pi}'} B(x,\xi) \equiv D(x) \geqslant 0, \\ D(x) > 0, \qquad F(x) = F^*(x) \text{ при } x \in \omega^*, \\ D(x) \geqslant 0, \qquad F(x) = 0 \text{ при } x \in \omega \setminus \omega^*, \end{gathered}$$

ω^* — *некоторое множество узлов* $x \in \omega$. *Тогда для решения задачи* (14) *справедлива оценка* [4, 5]

$$(16)\qquad \max_{\omega} |v| \leqslant \max_{\omega^*} |F^*(x)/D(x)|.$$

Лемма 1 будет использована для оценки функции v_3 из (13). Выпишем выражения для A, B, D, F в рассматриваемом случае:

$$A(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha(x), \qquad A_\alpha(x) = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left(\frac{a_\alpha^+}{h_\alpha^+} + \frac{a_\alpha^-}{h_\alpha^-}\right)$$

$$D(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} D_\alpha(x),$$

$$D_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in\omega_\alpha,\\ a_\alpha^{\pm}/(h_\alpha^{\pm}\hbar_\alpha), & x\in\omega_{\gamma_\alpha}^{\pm},\\ A_\alpha(x), & x\in\omega_{\gamma_\alpha}^{0},\end{cases}\qquad B_\alpha(x,x^{(\pm 1_\alpha)})=a_\alpha^{\pm}/(h_\alpha^{\pm}\hbar_\alpha),$$

(17)

$$\sum_{\xi\in\overline{\Ш}'(x)} B(x,\xi)v(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{\xi\in\overline{\Ш}'_\alpha(x)} B_\alpha(x,\xi)v(\xi),$$

$$\overline{\Ш}'(x)=\bigcup_{\alpha=1}^{p}\overline{\Ш}'_\alpha(x).$$

Сделаем одно замечание. Зафиксируем направление x_α и обозначим через $Q_\alpha(\widetilde{Q}_\alpha)$ множества всех цепочек $Ц_\alpha(\widetilde{Ц}_\alpha)$ направления ox_α, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Поскольку любой внутренний узел $x_i(x^{(\pm 0.5\alpha)})$ принадлежит некоторой цепочке $Ц_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)}\in\widetilde{Ц}_\alpha)$ направления ox_α, то

$$\omega=\bigcup_{Q_1}Ц_1=\bigcup_{Q_2}Ц_2=\ldots=\bigcup_{Q_p}Ц_p,\quad \widetilde{\omega}_\alpha=\bigcup_{\widetilde{Q}_\alpha}\widetilde{Ц}_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p.$$

Поэтому

$$\sum_{\omega}Hy=\sum_{Q_\alpha}\sum_{Ц_\alpha}Hy,\qquad \sum_{\widetilde{\omega}_\alpha}H_\alpha W_\alpha=\sum_{\widetilde{Q}_\alpha}\sum_{\widetilde{Ц}_\alpha}H_\alpha W_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p.$$

Здесь $H=s_1\hbar_1=s_2\hbar_2=\ldots=s_p\hbar_p$, $H_\alpha=H_\alpha^{\pm}=s_\alpha h_\alpha^{\pm}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$. Так как для всех узлов данной цепочки $Ц_\alpha(\widetilde{Ц}_\alpha)$ площадки $s_\alpha=\prod\limits_{\beta\neq\alpha}\hbar_\beta$ не зависят от координаты x_α, а зависят только от координат $x_1, x_2, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1},\ldots,x_p$, то из последних равенств следует

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\sum_{\omega}Hy=\sum_{Q_\alpha}s_\alpha\Big(\sum_{Ц_\alpha}y\hbar_\alpha\Big),\qquad \sum_{\widetilde{\omega}_\alpha}H_\alpha W_\alpha=\sum_{\widetilde{Q}_\alpha}s_\alpha\Big(\sum_{\widetilde{Ц}_\alpha}W_\alpha h_\alpha\Big).$$

2. Пространства сеточных функций

Введем в рассмотрение пространство $\mathscr{H}$ сеточных функций, определенных на сетке ω, со скалярным произведением

$$(y,z)=\sum_{\omega}yzH \text{ и нормой } \|y\|=\sqrt{(y,y)},\qquad y,z\in\mathscr{H}.$$

Будем также рассматривать пространства $\mathscr{H}_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, сеточных функций, определенных на сетках $\widetilde{\omega}_\alpha$ со скалярными произведениями

$$(v,w)_\alpha=\sum_{\widetilde{\omega}_\alpha}vwH_\alpha \text{ и нормами } \|v\|_\alpha=\sqrt{(v,v)_\alpha},\qquad v,w\in\mathscr{H}_\alpha.$$

Введем также обозначения для сумм вдоль цепочек $Ц_\alpha$ и $\widetilde{Ц}_\alpha$ при фиксированных x_β $(\beta\neq\alpha)$:

$$(18)\qquad \begin{aligned} (y, z)_{Ц_\alpha} &= \sum_{Ц_\alpha} \hbar_\alpha yz, \qquad \|y\|_{Ц_\alpha} = \sqrt{(y, y)_{Ц_\alpha}}, \\ (v, w)_{\widetilde{Ц}_\alpha} &= \sum_{\widetilde{Ц}_\alpha} h_\alpha vw, \qquad \|v\|_{\widetilde{Ц}_\alpha} = \sqrt{(v, v)_{\widetilde{Ц}_\alpha}}. \end{aligned}$$

Наконец, введем обозначение

$$\|y\|_c = \max_{\omega} |y(x)|.$$

3. Разностные операторы

Введем оператор A, отображающий пространство $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$, как сумму p операторов A_α:

$$(19)\qquad A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha.$$

Каждый оператор A_α также отображает $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}$ и определяется следующим образом:

$$(20)\qquad A_\alpha y = -\frac{1}{\hbar_\alpha} \times \begin{cases} a_\alpha^+ y_{\bar{x}_\alpha}^+ - a_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}^-, & x \in \omega_\alpha, \\ \mp a_\alpha^\mp y_{\bar{x}_\alpha}^\mp - a_\alpha^\pm y/h_\alpha^\pm, & x \in \omega_{\gamma_\alpha}^\pm, \\ -(a_\alpha^+/h_\alpha^+ + a_\alpha^-/h_\alpha^-)\, y, & x \in \omega_{\gamma_\alpha}^0. \end{cases}$$

Очевидно, что на функциях, обращающихся в нуль на γ, имеем

$$A_\alpha y = -\Lambda_\alpha y, \quad y|_\gamma = 0.$$

Введем также разностные операторы T_α, отображающие $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_\alpha$; T_α^*, отображающие $\mathscr{H}_\alpha$ на $\mathscr{H}$; операторы S_α, отображающие $\mathscr{H}_\alpha$ на $\mathscr{H}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$(T_\alpha y)^\pm \equiv (T_\alpha y)^{(\pm 0.5_\alpha)} = \begin{cases} y_{\bar{x}_\alpha}^\pm, & x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \widetilde{\omega}_\alpha', \\ \mp y/h_\alpha^\pm, & x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \widetilde{\omega}_{\gamma_\alpha}^\pm, \end{cases}$$

$$y \in \mathscr{H}, \qquad T_\alpha y \in \mathscr{H}_\alpha;$$

$$T_\alpha^* w = -w_{\hat{x}_\alpha} \quad \text{при } x \in \omega, \qquad w \in \mathscr{H}_\alpha, \qquad T_\alpha^* w \in \mathscr{H};$$

$$(S_\alpha w)^\pm \equiv (S_\alpha w)^{(\pm 0.5_\alpha)} = a_\alpha^\pm w^{(\pm 0.5_\alpha)} \quad \text{при } x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \widetilde{\omega}_\alpha,$$

$$w \in \mathscr{H}_\alpha, \qquad S_\alpha w \in \mathscr{H}_\alpha.$$

Из определения операторов T_α, S_α, T_α^*, A_α следует, что

$$(21)\qquad A_\alpha = T_\alpha^* S_\alpha T_\alpha.$$

4. Свойства разностных операторов

Лемма 3. *Разностные операторы T_α и T_α^* сопряжены друг другу:*

$$(22)\qquad (T_\alpha^* w, y) = (w, T_\alpha y)_\alpha, \quad y \in \mathscr{H}, \quad w \in \mathscr{H}_\alpha.$$

Используя разностные формулы Грина [5], нетрудно проверить, что

$$(23)\qquad (y, T_\alpha^* w)_{Ц_\alpha} = \sum_{Ц_\alpha} y\,(T_\alpha^* w)\,\hbar_\alpha = \sum_{\widetilde{Ц}_\alpha} w\,(T_\alpha y)\,h_\alpha = (w, T_\alpha y)_{\widetilde{Ц}_\alpha}.$$

Умножая последнее равенство на s_α, суммируя по всем цепочкам $Q_\alpha(\widetilde{Q}_\alpha)$ и учитывая (18), получим (22).

Лемма 4. *Операторы S_α самосопряженные и положительно определенные*:

$$(24)\qquad (S_\alpha w, v)_\alpha = (w, S_\alpha v)_\alpha, \qquad (S_\alpha w, w)_\alpha \geqslant c_1 \|w\|_\alpha^2.$$

Соотношения (24) следуют из вида оператора S_α и неравенства (7). Введем обозначение: будем писать, что оператор $B \geqslant B_1$, если $(By, y) \geqslant (B_1 y, y)$ при всех $y \in \mathscr{H}$; например, $B \geqslant c_1 E > 0$, E — единичный оператор, если $(By, y) \geqslant c_1 \|y\|^2$, где c_1 — положительная постоянная, а y — любая сеточная функция, определенная на ω.

Лемма 5. *Операторы A_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, A самосопряженные и положительно определенные*:

$$A_\alpha = A_\alpha^* \geqslant \bar{\delta} E, \qquad A = A^* \geqslant \delta E,$$

где $\bar{\delta} \geqslant 4c_1 / 3D^2$, $\delta = \bar{\delta} p$, D — диаметр области G.

Самосопряженность операторов A_α и A следует из представления (19), (21) и лемм 3, 4. Покажем положительную определенность оператора A_α.

Запишем тождество

$$y(x) = \sum_{x' \in \widetilde{Ц}_\alpha}^{x' = x^{(-0.5\alpha)}} h_\alpha^- (T_\alpha y)^-,$$

где суммирование проводится по $x' \in \widetilde{Ц}_\alpha$ до $x' = x^{(-0.5\alpha)}$. Возводя это равенство в квадрат, оценивая правую часть с помощью неравенства Коши — Буняковского, умножая на $H(x)$ и суммируя по всем узлам $x \in \omega$, получаем

$$(25)\qquad \|y\|^2 \leqslant \|T_\alpha y\|_\alpha^2\, 3D^2 / 4.$$

Используя (21), (24), имеем

$$(A_\alpha y, y) = (S_\alpha T_\alpha y, T_\alpha y)_\alpha \geqslant c_1 \|T_\alpha y\|_\alpha^2.$$

Из (25) и последнего неравенства следует

$$(A_\alpha y, y) \geqslant \frac{4c_1}{3D^2} \|y\|^2.$$

Отсюда и из (19) получаем, что

$$(26)\qquad (Ay, y) \geqslant \delta \|y\|^2, \qquad \delta = \frac{4c_1}{3D^2} p.$$

Введем норму $W_2^1(\omega)$:

$$\|y\|_{W_2^1}^2 = (Ay, y) + \|y\|^2,$$

где

$$\mathring{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{A}_\alpha, \qquad \mathring{A}_\alpha = T_\alpha^* T_\alpha.$$

На функциях y, обращающихся в нуль на γ, эта норма имеет вид

$$\|y\|^2_{W_2^1} = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\widetilde{\omega}_\alpha} H_\alpha y^2_{x_\alpha} + \sum_{\widetilde{\omega}} H y^2.$$

5. Априорные оценки n-го ранга

Рассмотрим уравнение

$$(27) \qquad Av = \theta, \text{ где } \theta = \sum_{\alpha=1}^{p} \theta_\alpha, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(28) \qquad A_\alpha v = \theta_\alpha + F_\alpha, \text{ где } F_\alpha = -\sum_{\beta \neq \alpha}^{1 \div p} (A_\beta v - \theta_\beta).$$

Очевидно, что

$$(29) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} F_\alpha = 0.$$

Далее поступим, как в [10]. Введем функции $v^{(0)} = v$, $v^{(1)} = v^2, \ldots, v^{(n)} = v^{2^n}$ и напишем уравнение для v^{2^n} (см. [10]):

$$(30) \qquad A_\alpha v^{(n)} + \frac{1}{\hbar_\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} v^{\nu_n - \nu_{k+1}} [h_\alpha^+ a_\alpha^+ ((T_\alpha v^k)^{(+0.5\alpha)})^2 +$$

$$+ h_\alpha^- a_\alpha^- ((T_\alpha v^{(k)})^{(-0.5\alpha)})^2] = 2^n v^{\nu_n} (F_\alpha + \theta_\alpha), \qquad \nu_k = 2^k - 1.$$

Умножим это уравнение на $\hbar_\alpha$ и просуммируем по $x \in Ц_\alpha$; получим

$$(31) \qquad I_\alpha^{(n-1)} = 2^n [(v^{\nu_n}, \theta_\alpha)_{Ц_\alpha} + (v^{\nu_n}, F_\alpha)_{Ц_\alpha}],$$

где

$$(32) \qquad I_\alpha^{(n-1)} = 2(A_\alpha v^{(n-1)}, v^{(n-1)})_{Ц_\alpha} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} 2^{n-k-1} \left(\frac{v^{\nu_n - \nu_{k+1}}}{\hbar_\alpha}, h_\alpha^+ a_\alpha^+ ((T_\alpha v^{(k)})^+)^2 + h_\alpha^- a_\alpha^- ((T_\alpha v^{(k)})^-)^2 \right)_{Ц_\alpha}$$

Здесь $(T_\alpha v^{(k)})^\pm \equiv (T_\alpha v^{(k)})^{(\pm 0.5\alpha)}$.

Лемма 6. *Справедлива оценка*

$$(33) \qquad v^{(n)} \leqslant M_0 I_\alpha^{(n-1)},$$

где $M_0 = D / 2c_1$ (см. лемму 1* в [10]).

1. Первая априорная оценка. Оценим первое слагаемое правой части (31). Используя лемму 6, имеем

$$|2^n(v^{\nu_n}, \theta_\alpha)_{Ц_\alpha}| \leqslant 2^n(1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha} \max_{Ц_\alpha} |v^{\nu_n}| \leqslant$$

$$\leqslant 2^n(1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha} (\max_{Ц_\alpha} |v^{(n)}|)^{\nu_n/2^n} \leqslant 2^n(1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha} (M_0 I_\alpha^{(n-1)})^{1-1/2^n},$$

$$\nu_n = 2^n - 1, \quad v^{(n)} = v^{2^n}.$$

Оценим правую часть последнего неравенства так:

$$|x_1 x_2| \leqslant \frac{|x_1|^{q_1}}{q_1} + \frac{|x_2|^{q_2}}{q_2}, \qquad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \tag{34}$$

где

$$q_1 = 2^n, \qquad q_2 = 1/(1 - 1/2^n), \qquad x_1 = 2^n(1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha} (2M_0/q_2)^{1/q_2},$$

$$x_2 = (I_\alpha^{(n-1)} q_2/2)^{1/q_2};$$

окончательно получаем

$$|2^n(v^{\nu_n}, \theta_\alpha)_{Ц_\alpha}| \leqslant {}^1/_2 I_\alpha^{(n-1)} + (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}^{2^n} (2M_0(2^n - 1))^{2^n - 1}. \tag{35}$$

Из (31), (35) имеем

$${}^1/_2 I_\alpha^{(n-1)} \leqslant (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}^{2^n} (2M_0(2^n - 1))^{2^n - 1} + 2^n(v^{\nu_n}, F_\alpha)_{Ц_\alpha};$$

умножим это уравнение на s_α и просуммируем по всем цепочкам $Ц_\alpha$. Усиливая неравенство, имеем

$${}^1/_2 \sum_{Q_\alpha} s_\alpha I_\alpha^{(n-1)} \leqslant [2M_0(2^n - 1)]^{2^n - 1} M_s \max_{Q_\alpha} (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}^{2^n} + \tag{36}$$

$$+ \sum_{Q_\alpha} s_\alpha (2^n v^{\nu_n}, F_\alpha)_{Ц_\alpha}, \qquad M_s = \max_\alpha \sum_{Q_\alpha} s_\alpha.$$

Используя лемму 2, второе слагаемое правой части (36) перепишем в виде

$$\sum_{Q_\alpha} s_\alpha (2^n v^{\nu_n}, F_\alpha)_{Ц_\alpha} = \sum_\omega 2^n v^{\nu_n} F_\alpha H.$$

Просуммируем (36) по α от 1 до p. Учитывая (29), получим

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{Q_\alpha} s_\alpha I_\alpha^{(n-1)} \leqslant [2M_0(2^n - 1)]^{2^n - 1} M_s \max_\alpha \max_{Q_\alpha} (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}^{2^n}. \tag{37}$$

Из (32) и оценок лемм 2 и 5 имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{Q_\alpha} s_\alpha I_\alpha^{(n-1)} \geqslant 2 \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{Q_\alpha} s_\alpha (A_\alpha v^{(n-1)}, v^{(n-1)})_{Ц_\alpha} = \tag{38}$$

$$= 2 \sum_{\alpha=1}^{p} (A_\alpha v^{(n-1)}, v^{(n-1)}) = 2(Av^{(n-1)}, v^{(n-1)}) \geqslant 2\delta \| v^{(n-1)} \|^2,$$

Из (37), (38) при $n = 1$ получаем

$$\|v\| \leqslant M_1 \max_{\alpha} \max_{Q_\alpha} (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}, \qquad M_1 = \sqrt{\frac{2M_0M_s}{\delta}}. \tag{39}$$

Заметим (как и в [11]), что

$$\|v^{(n-1)}\|^2 = \sum_{\omega} (v^{2^{n-1}})^2 H = \sum_{\omega} v^2 \; H \geqslant \|v\|_c^{2^n} H_*, \tag{40}$$

где

$$H_* = \min H(x).$$

Собирая оценки (37), (38), (40) и извлекая из обеих частей получающегося неравенства корень степени 2^n, получим

$$\|v\|_c \leqslant M_2 2^n (M_3 H_*)^{-1/2^n} \max_{\alpha} \max_{Q_\alpha} (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha},$$

где $M_2 = 2M_0$, $M_3 = \delta / M_s$. Отсюда следует

Лемма 7. *Для решения задачи* $Av = \sum_{\alpha=1}^{m} \theta_\alpha$ *справедлива оценка*

$$\|v\|_C \leqslant M 2^n H_*^{-1/2^n} \max_{\alpha} \max_{Q_\alpha} (1, |\theta_\alpha|)_{Ц_\alpha}, \tag{41}$$

где M — постоянная, не зависящая от n и h.

2. Вторая априорная оценка. Получим оценку решения задачи

$$Av = \sum_{\alpha=1}^{p} T_\alpha^* g_\alpha. \tag{42}$$

Используя лемму 3 (равенство (23)), имеем

$$2^n (v^{\nu_n}, T_\alpha^* g_\alpha)_{Ц_\alpha} = 2^n (T_\alpha v^{\nu_n}, g_\alpha)_{\widetilde{Ц}_\alpha}. \tag{43}$$

Подставляя выражение $T_\alpha v^{\nu_n}$ через $T_\alpha v^{(k)}$ и v (см. [10], § 2, (19))

$$(T_\alpha v^{\nu_n})^{(\pm 0.5\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} (v^{(\pm 1\alpha)})^{\nu_k} v^{\nu_n - \nu_{k+1}} (T_\alpha v^{(k)})^{(\pm 0.5\alpha)} \tag{44}$$

в правую часть (43), получим

$$2^n |(T_\alpha v^{\nu_n}, g_\alpha)_{\widetilde{Ц}_\alpha}| \leqslant 2^n \sum_{\widetilde{Ц}_\alpha} h_\alpha^+ |g_\alpha^{(+0.5\alpha)}| \sum_{k=0}^{n-1} v^{(\nu_n - \nu_{k+1})/2} |(T_\alpha v^{(k)})^+| \times \tag{45}$$
$$\times |(v^{(+1\alpha)})^{\nu_k} v^{(\nu_n - \nu_{k+1})/2}|.$$

Воспользуемся леммой 2; оценим два последних множителя в правой части (45):

$$(46)\qquad \max_{Ц_\alpha} v^{(+1_\alpha)\nu_k} \max_{Ц_\alpha} v^{(\nu_n-\nu_k+1)/2} = (\max_{Ц_\alpha} v^{(n)})^{(\nu_k+(\nu_n-\nu_k+1)/2)/2^n} \leqslant$$
$$\leqslant (M_0 I_\alpha^{(n-1)})^{1/2-1/2^n}.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, неравенство (7) и выражение для I_α^{n-1} (формулу (32)), получаем

$$(47)\qquad \sum_{\widetilde{Ц}_\alpha} h_\alpha^+ |g_\alpha^{(+0.5_\alpha)}| \sum_{k=0}^{n-1} [v^{(\nu_n-\nu_k+1)/2} \sqrt{a_\alpha^+} |(T_\alpha v^{(k)})^{(+0.5_\alpha)}| 2^{(n-k-1)/2}] / \sqrt{a_\alpha^+} 2^{(n-k-1)/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \Big(\sum_{\widetilde{Ц}_\alpha} h_\alpha g_\alpha^2\Big)^{1/2} \Big\{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \Big(\frac{v^{\nu_n-\nu_k+1}}{\hbar_\alpha}, a_\alpha^+ [(T_\alpha v^{(k)})^+]^2\Big)_{Ц_\alpha}\Big\}^{1/2} \times$$
$$\times \Big(\sum_{m=0}^{n-1} 1/2^{n-m-1}\Big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|g_\alpha\|_{\widetilde{Ц}_\alpha} \sqrt{I_\alpha^{(n-1)}}.$$

Собирая вместе оценки (45) — (47), получаем

$$(48)\qquad |2^n (v^{\nu_n}, T_\alpha^* g_\alpha)_{Ц_\alpha}| \leqslant \frac{2^n}{\sqrt{(M_0 c_1)}} \|g_\alpha\|_{\widetilde{Ц}_\alpha} (M_0 I_\alpha^{(n-1)})^{1-1/2^n}.$$

Оценим, наконец, правую часть (48) с помощью (34), где положим

$$(49)\qquad q_1 = 2^n, \quad q_2 = 1/(1-1/2^n), \quad x_1 = \frac{2^n \|g_\alpha\|_{Ц_\alpha}}{\sqrt{(c_1 M_0)}} (2M_0/q_2)^{1/q_2},$$
$$x_2 = q_2 I_\alpha^{(n-1)}/2.$$

Окончательно получаем

$$(50)\qquad |2^n (v^{\nu_n}, T_\alpha^* g_\alpha)_{Ц_\alpha}| \leqslant {}^1/_2 I_\alpha^{(n-1)} + 2\sqrt{\frac{M_0}{c_1}} \Big[2\sqrt{\frac{M_0}{c_1}} (2^n-1)\Big]^{2^n-1} \times$$
$$\times \|g_\alpha\|_{\widetilde{Ц}_\alpha}^{2^n}.$$

Повторяя далее рассуждения, проведенные при выводе первой априорной оценки (ср. (50) и (35)), убеждаемся, что верны оценка

$$(51)\qquad \|v\| \leqslant M \max_\alpha \max_{\widetilde{Q}_\alpha} \|g_\alpha\|_{\widetilde{Ц}_\alpha}$$

и

Лемма 8. *Для решения задачи* (42) *справедлива оценка*

$$(52)\qquad \|v\|_C \leqslant M 2^n H_*^{-1/2^n} \max_\alpha \max_{\widetilde{Q}_\alpha} \|g_\alpha\|_{\widetilde{Ц}_\alpha}.$$

До сих пор число n в оценках было произвольным. Выберем теперь n в зависимости от H_* следующим образом:

$$(52')\qquad 0.5 \log_2 V_0 / H_* < 2^n < \log_2 V_0 / H_*,$$

где V_0 — объем G. Отсюда следует, что

$$2^n H_*^{-1/2^n} \leqslant M \ln V_0 / H_*.$$

Учитывая это неравенство в оценках (41), (52), имеем следующий результат.

Лемма 9. *Для решения задач* (27), (42) *справедливы оценки*

$$\|v\|_C \leqslant M \ln (V_0/H_*) \max_{\alpha} \max_{Q_\alpha} |(1, |\theta_\alpha|)_{U_\alpha}|, \tag{53}$$

$$\|\bar{v}\|_C \leqslant M \ln (V_0/H_*) \max_{\alpha} \max_{\widetilde{Q}_\alpha} \|g_\alpha\|_{\widetilde{U}_\alpha}. \tag{54}$$

6. Априорные оценки в норме $W_2^1(\omega)$

Получим априорные оценки решения задач (27) и (42) в сеточной норме $W_2^1(\omega)$. Как следует из п. 4, § 2,

$$(\mathring{A}v, v) = \sum_{\alpha=1}^{p} \|T_\alpha v\|_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\widetilde{\omega}_\alpha} H_\alpha v_{x_\alpha}^2 \quad \text{при } v|_\gamma = 0,$$

где $\mathring{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{A}_\alpha$, $\mathring{A}_\alpha = T_\alpha^* T_\alpha$. Справедливы оценки

$$A \geqslant c_1 \mathring{A}, \qquad \mathring{A} \geqslant \delta E, \tag{55}$$

где $\delta = 4p / 3D^2$, D — диаметр области G, $0 < c_1 \leqslant a_\alpha^{\pm}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Положим $\varepsilon = \delta / (1 + \delta)$, из (55) имеем (см. также п.4, § 2)

$$(\mathring{A}v, v) \geqslant \varepsilon(\mathring{A}v, v) + (1 - \varepsilon)\delta\|v\|^2 = \frac{\delta}{1-\delta}\|v\|_{W_2^1}^2. \tag{55'}$$

Оценим решение задачи (27). Умножим (27) скалярно на v. С помощью обобщенного неравенства Коши — Буняковского $(Av, w)^2 \leqslant (Av, v) \times \times (Aw, w)$, если $A = A^* \geqslant 0$ (см. [12]) и оценок (55) имеем

$$c_1(\mathring{A}v, v) \leqslant (Av, v) = (v, \theta) = (\mathring{A}v, \mathring{A}^{-1}\theta) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{[(\mathring{A}v, v)(\mathring{A}^{-1}\theta, \theta)]}.$$

Отсюда и из (55), учитывая, что $\|\mathring{A}^{-1}\| \leqslant 1 / \delta$, следует

Лемма 10. *Для решения задачи* (27) *справедлива оценка*

$$\|v\|_{W_2^1} \leqslant \frac{\sqrt{(1+\delta)}}{c_1\delta}\|\theta\|.$$

Оценим решение задачи (42). Умножим (42) скалярно на v. Учитывая (55), (22), имеем

$$c_1(\mathring{A}v, v) \leqslant (Av, v) = \sum_{\alpha=1}^{p} (g_\alpha, T_\alpha v)_\alpha \leqslant \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \|g_\alpha\|_\alpha^2\right)^{1/2} \sqrt{(\mathring{A}v, v)}.$$

Отсюда и из (55) следует

Лемма 11. *Для решения задачи* (42) *справедлива оценка*

$$\|v\|_{W_2^1} \leqslant \frac{1}{c_1}\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1/2} \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \|g_\alpha\|_\alpha^2\right)^{1/2}.$$

Оценим, наконец, решение задачи

$$Av = \psi^*$$

при условии, что правая часть ψ^* равна нулю во всех регулярных узлах сетки: $\psi^* = 0$ при $x \in \omega_r$. Для оценки решения задачи воспользуемся леммой 1, где положим $\omega^* = \omega_{ir}$, $F^* = \psi^*$, D определяется по формуле (17). Так как $D(x) \geqslant C_1 / h^2$ (см. (17)), то в силу (11) имеем

$$\|v\|_C \leqslant h^2 \|\psi^*\|_C / c_1$$

и, соответственно,

$$\|v\| \leqslant h^2 \sqrt{V_0} \|\psi^*\|_C / c_1.$$

Оценим решение задачи $Av = \psi^*$ в норме $W_2^1(\omega)$, умножим уравнение $Av = \psi^*$ скалярно на v и воспользуемся полученной выше оценкой $|v|_C$ и оценками (55). Имеем

$$c_1(Av, v) \leqslant (Av, v) = (v, \psi^*) \leqslant h^2 \|\psi^*\|_C (1, |\psi^*|)/c_1 \leqslant$$
$$\leqslant h^2 \|\psi^*\|_C^2 \sum_{\omega_{ir}} H/c_1 \leqslant Mh^3 \|\psi^*\|_C^2.$$

Отсюда и из (55′) следует

Лемма 12. *Для решения задачи* $Av = \psi^*$, $\psi^* = 0$ *при* $x \in \omega_r$ *справедливы оценки*

$$\|v\|_C \leqslant Mh^2 \|\psi^*\|_C, \qquad \|v\| \leqslant Mh^2 \|\psi^*\|_C,$$
$$\|v\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2} \|\psi^*\|_C.$$

Перейдем к изучению вопроса о сходимости и точности в сеточных нормах $C(\omega)$, $L_2(\omega)$, $W_2^1(\omega)$ решения исходной разностной задачи.

§ 3. О порядке точности разностных схем

1. О порядке точности в классе гладких коэффициентов

Перепишем в новых обозначениях задачи (9), (11), (13) ($k = 1, 2, 3$). Положим

$$\Phi = \varphi + \sum_{\alpha=1}^{p} \bar{\nu}_\alpha, \tag{56}$$

где

$$\bar{\nu}_\alpha = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \begin{cases} 0, & x \in \omega_\alpha, \\ a_\alpha^{\pm} \nu(x^{(\pm 1_\alpha)})/h_\alpha^{\pm}, & x \in \omega_{\gamma_\alpha}^{\pm}, \\ a_\alpha^{+} \nu(x^{(+1_\alpha)})/h_\alpha^{+} + a_\alpha^{-} \nu(x^{(-1_\alpha)})/h_\alpha^{-}, & x \in \omega_{\gamma_\alpha}^{0}. \end{cases}$$

Тогда задачи (9), (10), (13) соответственно запишутся в виде

$$Ay = \Phi, \qquad x \in \omega, \tag{57}$$

$$Az = -\psi, \qquad x \in \omega, \tag{58}$$

$$Av_k = -\Psi_k, \qquad x \in \omega, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{59}$$

Здесь $\overline{\Psi}_k$, $k = 1, 2, 3$, определяются формулами (11), (13) и ошибка

$$z = y - u = v_1 + v_2 + v_3.$$

Для оценок функций v_k, $k = 1, 2, 3$, используем леммы 9—11 и оценки (16), (39), (51).

Оценим функцию v_1. Из (11) для χ_α следует оценка

$$\max_\alpha \max_{\widetilde{Q}_\alpha} \|\chi_\alpha\|_{\widetilde{\Pi}_\alpha} \leqslant Mh^2, \qquad h = h_{\max}. \tag{60}$$

Для оценки v_1 воспользуемся леммами 9 и 11, где положим $g_\alpha \equiv \chi_\alpha$. Из (54), (51), (60) и оценки леммы 11 следует, что

$$\|v_1\|_C \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*), \qquad \|v_1\|_{W_2^1} \leqslant Mh^2, \qquad \|v_1\| \leqslant Mh^2. \tag{61}$$

Для оценки функции v_2 воспользуемся леммами 9 и 10, где положим $\theta_\alpha = \psi_\alpha$. Из (11) для ψ_α следует оценка

$$\max_\alpha \max_{Q_\alpha} (1, |\psi_\alpha|)_{\Pi_\alpha} \leqslant Mh^2. \tag{62}$$

Из (39), (53), (62) и оценки леммы 10 получаем

$$\|v_2\|_C \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*), \qquad \|v_2\|_{W_2^1} \leqslant Mh^2, \qquad \|v_2\| \leqslant Mh^2. \tag{63}$$

Оценим, наконец, функцию v_3. Воспользуемся оценками леммы 12. Так как

$$\psi^* = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha{}^* = 0 \quad \text{при} \quad x \in \omega_r, \qquad \|\psi^*\|_C = O(1),$$

то оценки леммы 12 дают

$$\|v_3\|_C \leqslant Mh^2, \qquad \|v_3\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2}, \qquad \|v_3\| \leqslant Mh^2. \tag{64}$$

Из (61), (63), (64), (12) следует, что

$$\|z\|_C \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*), \qquad \|z\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2}, \qquad \|z\| \leqslant Mh^2. \tag{65}$$

Теорема 1. *Для погрешности $z = y - u$ на произвольной неравномерной сетке справедлива оценка*

$$\|y - u\|_C \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*). \tag{66}$$

Теорема 2. *Решение разностной схемы* (9) *сходится в сеточных нормах $L_2(\omega)$ и $W_2^1(\omega)$ на произвольной неравномерной сетке. Справедливы оценки*

$$\|y - u\| \leqslant Mh^2, \qquad \|y - u\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2}. \tag{67}$$

Теорема 3. *Пусть решетка $R_p{}^h$ является равномерной по каждому направлению x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Тогда разностная схема* (9) *сходится в сеточных нормах $C(\omega)$, $L_2(\omega)$ и $W_2^1(\omega)$. Справедливы оценки*

$$\|y - u\|_C \leqslant M|h|^2 \ln (V_0 / H), \qquad \|y - u\| \leqslant M|h|^2, \qquad \|y - u\|_{W_2} \leqslant M|h|^{3/2},$$

где

$$|h|^2 = \sum_{\alpha=1} h_\alpha^2, \qquad H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

Рассмотрим последовательность сеток, неравномерных (при $h \to 0$) и таких, что

$$H_* \geqslant m_0 h^{\varkappa p}, \qquad m_0 = \text{const} > 0, \qquad \varkappa = \text{const} > 0. \tag{68}$$

Из (65), (67) и неравенства $V_0 < D^p$ следует

Теорема 4. *Решение разностной задачи* (9) *при условии* (68) *сходится к решению исходной задачи в сеточной норме* $C(\omega)$. *Справедлива оценка*

$$\|y - u\|_C \leqslant Mh^2 \ln (D/h). \tag{69}$$

Замечания. 1. Все результаты сохраняют силу для задачи с операторами

$$L_\alpha{}^q = L_\alpha - q_\alpha(x)E, \qquad q_\alpha(x) \geqslant 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

В качестве A_α в этом случае следует выбрать оператор

$$A_\alpha{}^q = A_\alpha + q_\alpha E.$$

2. Пусть граница Γ такова, что можно построить последовательность (при $h \to 0$) решеток $R_p{}^h$, согласованных с границей Γ в том смысле, что $\gamma \in R_p{}^h$. Тогда $\psi^* = 0$, $\omega_{1\Gamma} = \varnothing$ и

$$\| y - u \|_{W_2^1} \leqslant Mh^2. \tag{70}$$

2. О сходимости схемы в классе разрывных коэффициентов

Пусть коэффициенты $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, и функция $f(x)$ терпят разрывы на конечном числе непересекающихся поверхностей Σ_s, $s = 1, 2, \ldots, K$. Тогда задача ставится так: найти непрерывную в замкнутой области $\overline{G}$ функцию $u = u(x)$, удовлетворяющую уравнению и граничному условию

$$\begin{aligned} &Lu = -f(x) \quad \text{при} \quad x \in G \setminus \Big(\bigcup_{s=1}^{k} \Sigma_s\Big) \equiv Q, \\ &u = \nu(x) \quad \text{при } x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{71}$$

а на поверхностях Σ_s, $s = 1, 2, \ldots, K$,— условиям сопряжения

$$[u]_{\Sigma_s} = 0, \qquad \left[\sum_{\alpha=1}^{p} k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos (\widehat{n_s, x_\alpha})\right]_{\Sigma_s} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, K. \tag{72}$$

Здесь введены обозначения: $[v(x)]_{\Sigma_s} = v^+(x) - v^-(x)$ — разность предельных значений функции $v(x)$ на противоположных сторонах Σ_s, n_s — нормаль к Σ_s.

Предположим, что существует решение задачи (71)—(72): функция $u = u(x) \in Q^{(4)}(\overline{G})$, $k_\alpha \in Q^{(3)}(\overline{G})$, $f(x) \in Q^{(2)}(\overline{G})$ ($Q^{(n)}(\overline{G})$ — класс функций, обладающих кусочно-гладкими n-ми производными в $\overline{G}$). Задача (71), (72) детально исследована в работах [13, 16].

Проведем дополнительную классификацию узлов. Будем говорить, что узел $x \in \omega_\Sigma$, если соответствующий ему объем $H(x)$ пересекает хотя бы одна из поверхностей Σ_s. Дополнение ω_Σ до ω обозначим через ω_Q, так что

$$\omega = \omega_\Sigma \cup \omega_Q.$$

Будем говорить, что потоковый (промежуточный) узел $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_{\Sigma,\alpha}$, если соответствующий ему объем $H_\alpha^\pm = H_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)})$ пересекает хотя бы одна из поверхностей Σ_s.

Дополнение $\tilde{\omega}_{\Sigma,\alpha}$ до $\tilde{\omega}_\alpha$ обозначим через $\tilde{\omega}_{Q,\alpha}$, так что

$$\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_{\Sigma,\alpha} \cup \tilde{\omega}_{Q,\alpha}.$$

Будем исследовать сходимость однородных схем вида (9). Пусть коэффициенты $a_\alpha^\pm$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяют условию аппроксимации (7) в узлах $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_{Q,\alpha}$. В узлах $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_{\Sigma,\alpha}$ потребуем лишь выполнения условия

$$0 < c_1 \leqslant a_\alpha^\pm.$$

Например, положим

$$a_\alpha^\pm = 0.5\left(k_\alpha^+(x^{(\pm 0.5\alpha)}) + k_\alpha^-(x^{(\pm 0.5\alpha)})\right) \text{ при } x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_\alpha \tag{73}$$

($a_\alpha^\pm = k_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)})$, если $k_\alpha^+ = k_\alpha^-$, т. е. поверхности Σ_s не проходят через узлы $x^{(\pm 0.5\alpha)}$). Предположим, что функция $\varphi = \varphi(x)$ в узлах $x \in \omega_Q$ удовлетворяет условию аппроксимации (8), а при $x \in \omega_\Sigma$ предполагается лишь ограниченность постоянной, не зависящей от сетки ω. Например, всюду положим

$$\varphi = 0.5(f^+ + f^-) \text{ при } x \in \omega. \tag{74}$$

Поставим в соответствие исходной задаче (71), (72) разностную задачу

$$Ay = \Phi \text{ при } x \in \omega, \tag{75}$$

где A и Φ определяются по формулам (19), (20), (56). Для ошибки $z = y - u$ получаем задачу

$$Az = -\Psi \text{ при } x \in \omega, \tag{76}$$

где Ψ — погрешность аппроксимации

$$\Psi = -Au + \Phi = \Lambda u + \varphi. \tag{77}$$

1. Сходимость в сеточной норме $W_2^1(\omega)$. В случае произвольного расположения поверхностей Σ_s, $s = 1, 2, \ldots, K$, относительно узлов сетки ω, чтобы не усложнять изложение, ограничимся доказательством сходимости схемы (75) для областей G, составленных из p-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям (ступенчатые области).

Преобразуем выражение для погрешности аппроксимации (77). Вычтем из (77) тождество (6). Имеем

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \theta, \tag{78}$$

где

$$\chi_\alpha^{\pm} = a_\alpha^{\pm} u_{\bar{x}_\alpha}^{\pm} - \frac{1}{s_\alpha^{\pm}} \int\limits_{s_\alpha^{\pm}} w_\alpha^{\pm}\, ds_\alpha^{\pm}, \qquad \theta = \varphi - \frac{1}{H} \int\limits_{H} f\, dH.$$

Очевидно, что при сделанных предположениях о коэффициентах $a_\alpha^{\pm}$, φ справедливы оценки

$$\chi_\alpha^{\pm} = \begin{cases} O(h), & x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \tilde{\omega}_{Q,\alpha}, \\ O(1), & x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \tilde{\omega}_{\Sigma,\alpha}, \end{cases} \qquad \theta = \begin{cases} O(h), & x \in \omega_Q, \\ O(1), & x \in \omega_\Sigma. \end{cases} \tag{79}$$

Оценим решение задачи (76)—(79). Представим функцию z в виде

$$z = v_1 + v_2, \tag{80}$$

где v_1 и v_2 — решения задач

$$Av_1 = -\theta \text{ при } x \in \omega, \tag{81}$$

$$Av_2 = -\sum_{\alpha=1}^{p} T_\alpha^* \chi_\alpha \quad \text{при} \quad x \in \omega. \tag{82}$$

Для оценок функций v_1 и v_2 воспользуемся леммами 10 и 11. Учитывая (80), получаем

$$\|z\|_{W_2^1} \leqslant M' \Big(\|\theta\| + \sum_{\alpha=1} \|\chi_\alpha\|_\alpha \Big). \tag{83}$$

В силу (79)

$$\|\theta\| \leqslant M\sqrt{h}, \qquad \|\chi_\alpha\|_\alpha \leqslant M\sqrt{h}. \tag{84}$$

Из (83), (84) заключаем, что справедлива

Теорема 5. *Схема* (75) *в классе разрывных коэффициентов сходится к решению задачи* (71), (72). *Справедлива оценка*

$$\|y - u\|_{W_2^1} \leqslant M\sqrt{h}. \tag{85}$$

Отметим, что хотя оценка (85) и является весьма грубой, однако она устанавливает сходимость однородных схем, коэффициенты которых могут быть вычислены по простейшим формулам, например

$$a_\alpha^{\pm} = 0.5\left(k_\alpha^{+}(x^{(\pm 0.5\alpha)}) + k_\alpha^{-}(x^{(\pm 0.5\alpha)})\right),$$

$$\varphi = 0.5\left(f^{+}(x) + f^{-}(x)\right).$$

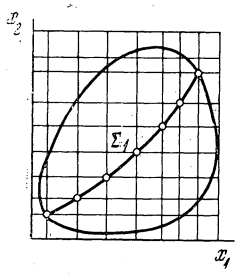
Оценка точности (85) справедлива для схемы (75) в классе разрывных коэффициентов и в случае произвольной области.

2. О равномерной сходимости. При исследовании вопроса о равномерной сходимости схемы (75) в классе разрывных коэффициентов ограничимся лишь одним частным случаем. Область G предполагать ступенчатой не будем.

Рассмотрим задачу (71), (72) для $p=2$ при следующих предположениях:

а) пусть имеется всего лишь одна линия Σ_1 разрыва коэффициентов k_α, $\alpha=1, 2$, и f;

б) линия Σ_1 такова, что можно построить последовательность сеток ω (при $h\to 0$), согласованных с линией Σ_1 в следующем смысле: любая прямая C_α, проведенная через узел $x\in\omega$ параллельно оси координат ox_α, $\alpha=1, 2$, пересекает Σ_1 лишь в узлах сетки ω;



Фиг. 4

в) каждая прямая C_α пересекает кривую Σ_1 в одной точке (см. фиг. 4).

Заметим сразу, что предположения а) и в) сделаны лишь для упрощения изложения.

Относительно существования и гладкости решения и коэффициентов рассматриваемой задачи сделаем те же предположения, что и в п.1. Узлы $x\in\bar\omega\cap\Sigma_1$ делят кривую Σ_1 на дуги с длинами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Выберем сетку ω так, чтобы

$$|\sigma_{i+1}-\sigma_i|\leqslant Mh\max_i\sigma_i. \tag{86}$$

Вопрос о сходимости рассматриваемой ниже схемы будем проводить на последовательности согласованных с Σ_1 сеток $\bar\omega$, удовлетворяющих условию (86).

Рассмотрим схему (75), коэффициенты $a_\alpha^\pm$ и φ которой будем вычислять по простейшим формулам

$$a_\alpha^\pm=k_\alpha(x^{(\pm 0.5_\alpha)}),\qquad \varphi=0.5(f^+(x)+f^-(x)). \tag{87}$$

Ошибка $z=y-u$ удовлетворяет уравнению (76) с правой частью ψ, определяемой формулой (77). Используя разложения в строку Тейлора, погрешность аппроксимации ψ можно представить в виде

$$\psi=\sum_{\alpha=1}^{2}\Psi_\alpha,\qquad \Psi_\alpha=T_\alpha^*\chi_\alpha+\psi_\alpha+\psi_\alpha^*, \tag{88}$$

где при условии (86)

$$\psi_\alpha=\begin{cases}O(h_\alpha^2), & x\in\omega\setminus\Sigma_1,\\ O(h_\alpha), & x\in\Sigma_1,\end{cases} \tag{89}$$

$$\psi_\alpha^*=\begin{cases}0, & x\in\omega_\Gamma,\\ O(1), & x\in\omega_{1\Gamma},\end{cases}\qquad \chi_\alpha^\pm=O((h_\alpha^\pm)^2).$$

Как и ранее, ошибку z представим в виде суммы

$$z=v_1+v_2+v_3, \tag{90}$$

где v_1 — решение задачи (76) с правой частью $-\sum_{\alpha=1}^{p}(\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} T_\alpha^* \chi_\alpha$,

v_2 — с правой частью $\sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha$, v_3 — с правой частью $\psi^* = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^*$.

Оценим функции v_1, v_2, v_3 с помощью лемм 9—12 и оценок (39), (51). Из (89), (51), (39), (53), (54) и оценок лемм 10, 11 для v_1 и v_2 имеем

$$\|v_k\|_C \leqslant Mh^2 \ln(V_0 / H_*), \qquad \|v_k\| \leqslant Mh^2,$$

$$\|v_k\|_{W_2^1} \leqslant Mh^2, \qquad k = 1, 2.$$

Для v_3, как и в случае непрерывных коэффициентов, из оценки (89) и оценок леммы 12 получаем

$$\|v_3\|_C \leqslant Mh^2, \qquad \|v_3\| \leqslant Mh^2, \qquad \|v_3\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2}.$$

Замечание. Если условие (86) не выполнено, то в (89) $\psi_\alpha = O(1)$ при $x \in \Sigma_1$ и для v_1 справедливы оценки

$$\| v_1 \|_C \leqslant Mh \ln (V_0 / H_*), \qquad \| v_1 \| \leqslant Mh.$$

Собирая оценки для v_1, v_2, v_3 и учитывая (90), получаем следующий результат.

Теорема 6. *Решение задачи* (75), (87) *сходится на последовательности сеток* ω, *согласованных с линией* Σ_1 *разрыва коэффициентов, удовлетворяющей условиям* а), б), в), *к решению задачи* (71), (72). *При выполнении условия* (86) *справедливы оценки*

$$\|y - u\|_C \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*), \qquad \|y - u\| \leqslant Mh^2,$$
$$\|y - u\|_{W_2^1} \leqslant Mh^{3/2},$$

а при условиях (86), (68)

$$\|y - u\|_C \leqslant Mh^2 \ln (D / h).$$

Замечания. 1. Пусть сетка $\bar{\omega}$ согласована с границами $\Sigma_1 \ldots \Sigma_K$ разрывов в случае $p \geqslant 2$ измерений. Тогда справедливы оценки

$$\| y - u \|_C \leqslant Mh \ln (V_0 / H), \qquad \| y - u \|_{W_2^1} \leqslant Mh,$$

а при условии (68) — оценка

$$\| y - u \|_C \leqslant Mh \ln (D / h).$$

2. Если сетка $\bar{\omega}$ не согласована с линией (поверхностью при $p > 2$) разрыва, то в ряде частных случаев при дополнительных условиях на шаги сетки и их отношения удается получить оценку

$$\| y - u \|_C \leqslant M\sqrt{h} \ln (V_0 / H),$$

а при условии (68) — оценку

$$\| y - u \|_C \leqslant M\sqrt{h} \ln (D / h).$$

Поступила в редакцию 3.09.1970

Цитированная литература

1. J. H. Bramble, B. E. Hubbard, T. Vidar. Convergence estimates for essentially positive type discrete dirichlet problem. Math. Comput., 1969, **23**, № 108, 695—709.
2. Ш. Е. Микеладзе. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1941, **5**, № 1, 57—74.
3. В. Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во ин. лит. 1963.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
5. А. А. Самарский. Лекции по теории разностных схем. Гл. IV. М., ВЦ АН СССР, 1969.
6. S. A. Gerschgorin. Fehlerschätzung für das Differenzverfahren zur Lösung partielen. Differentialgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., 1930, **10**, № 4, 373—382.
7. Е. А. Волков. Метод неравномерных сеток для конечных и бесконечных областей с коническими точками. Дифференц. ур-ния, 1966, **11**, № 10, 1358—1373.
8. В. Б. Андреев. О равномерной сходимости некоторых разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 2, 238—250.
9. D. Greenspan. Lectures on the numerical solution of linear singular and nonlinear differential equations. New York, Univ. of Michigan, 1968.
10. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
11. А. А. Самарский. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—465.
12. А. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
13. В. А. Ильин. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора. Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 1, 28—31.
14. В. А. Ильин, В. А. Шишмарев. Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами. Сибирский матем. ж., 1961, **2**, № 1, 46—58.
15. О. А. Олейник. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 6, 1219—1223.
16. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.