ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 11 Май 1971 Июнь № 3

УДК 518:517.944/.947

О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. А. САМАРСКИЙ, И. В. ФРЯЗИНОВ

(Москва)

Рассматривается вопрос о сходимости локально одномерной схемы (см. [1–5]) решения первой краевой задачи в произвольной области и второй и третьей краевых задач в ступенчатых областях для уравнения теплопроводности, не содержащего смешанных производных, на последовательности неравномерных сеток.

Установлена сходимость рассматриваемых схем в сеточной норме C на последовательности неравномерных сеток со скоростью $O(h^2 \ln (V_0 / H_*) + \tau)$, где τ — шаг сетки по времени, V_0 — объем рассматриваемой области $\overline{G}$, h — максимальный шаг пространственной решетки (сетки) $R_p{}^h$:

$$h = \max_{x_i \in \overline{G}} \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \hbar_\alpha (x_i),$$

где $\hbar_\alpha(x_i)$ — средний шаг решетки $R_p{}^h$ в узле x_i по направлению оси координат ox_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, p — число измерений; H_* — минимальный объем ячейки,

$$H_* = \min_{x_i \in \overline{G}} H(x_i), \qquad H(x_i) = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha (x_i).$$

Для оценки скорости сходимости схемы на неравномерной сетке в данной работе используется как принцип максимума, так и разработанный в [6] (см. также [3]) метод энергетических неравенств n-го ранга, который позволяет получить оценку решения разностной задачи в сеточной норме L_{2n}, где n — любое целое число. Из этой оценки следует сходимость в сеточной норме C. Использование одного лишь принципа максимума и связанных с ним теорем приводит к заниженной оценке скорости сходимости рассматриваемой схемы. При получении априорных оценок n-го ранга необходимо, чтобы разностные операторы Λ_α, соответствующие дифференциальным операторам $(\partial / \partial x_\alpha)(k_\alpha(x, t) \partial / \partial x_\alpha)$ (и однородным краевым условиям), были бы отрицательными на произвольной неравномерной сетке. Операторы, выбранные в [3], сохраняют свойство отрицательности не для всех областей G и решеток $R_p{}^h$. В настоящей работе в качестве Λ_α используются отрицательные операторы (на любой неравномерной сетке в произвольной области), введенные в [7].

В данной статье § 1 и 2 посвящены построению и исследованию сходимости локально одномерной схемы на неравномерной решетке (сетке) в

произвольной области в случае первой краевой задачи. В § 3 построена локально одномерная схема решения второй и третьей краевых задач в ступенчатых областях. Эти схемы также сходятся равномерно со скоростью $O(h^2 \ln(V_0/H_*) + \tau)$.

§ 1. Постановка задачи

1. Постановка исходной задачи

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — точка p-мерного пространства R_p, G — ограниченная в R_p область с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$. Предположим, что пересечение области G прямой, проходящей через точку $x \in G$ и параллельной оси координат ox_α, состоит из конечного числа интервалов. Для упрощения изложения предположим, что пересечением каждой из этих прямых с G будет только один интервал $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha(x)$. Введем обозначения: $Q_T = G \times (0 < t \leqslant T)$, $\bar{Q}_T = \bar{G} \times (0 \leqslant t \leqslant T)$.

Рассмотрим задачу: найти непрерывную в $\bar{Q}_T$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} (L_\alpha u + f_\alpha(x, t)), \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

и граничному и начальному условиям

$$\begin{aligned} &u(x, t) = \nu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ &u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \bar{G}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь L_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$,— одномерные эллиптические операторы

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad k_\alpha(x, t) \geqslant c_1 = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Предположим, что существует единственное и достаточно гладкое в $\bar{Q}_T$ решение задачи (1)—(3). Относительно гладкости входных данных — функций $k_\alpha(x, t)$, $f_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $\nu(x, t)$, $u_0(x)$ и решения задачи (1)—(3) — функции $u = u(x, t)$ сделаем те же предположения, что и в [3].

2. Сетка. Классификация узлов

В данной работе будем пользоваться обозначениями из [7]. Построим в $\bar{G}$ сетку $\bar{\omega}$ и классифицируем ее узлы, как и в [7].

Проведем p семейств гиперплоскостей

$$x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)}, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} > x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}.$$

Будем говорить, что точки $x_i = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_p^{(i_p)})$ пересечения гиперплоскостей образуют решетку $R_p{}^h$ в пространстве R_p. Назовем точки x_i решетки $R_p{}^h$, принадлежащие G, внутренними узлами сетки, множество внутренних узлов сетки обозначим через ω, $\omega = R_p{}^h \cap G$. Множество концов интервалов $\Delta_\alpha(x)$, проведенных через узлы $x \in \omega$, назовем множеством граничных узлов по направлению x_α (по x_α) и обозначим через γ_α; $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha{}^+ \cup \gamma_\alpha{}^-$, где $\gamma_\alpha{}^+$ и $\gamma_\alpha{}^-$ — множество правых и левых граничных по x_α узлов; $\gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{p} \gamma_\alpha$ — множество граничных узлов. Множество внутренних и граничных узлов назовем сеткой $\bar{\omega}$ в $\bar{G}$, $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$. Множество узлов, ле-

жащих на интервале Δ_α, обозначим через $Ц_\alpha$. Множество, состоящее из узлов $x \in Ц_\alpha$ и концов интервала Δ_α, обозначим через $\bar{Ц}_\alpha$. Обозначим через $x^{(+1_\alpha)}$ и $x^{(-1_\alpha)}$ узлы, ближайшие к узлу $x \in \bar{Ц}_\alpha$ справа и слева и принадлежащие $\bar{Ц}_\alpha$. Будем называть их соседними по x_α с узлом x:

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)}, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}).$$

Назовем узел $x \in \omega$ приграничным, если хотя бы один из его соседних узлов по какому-либо направлению x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, принадлежит γ. Множество приграничных узлов обозначим через ω_γ, множество всех остальных внутренних узлов — через ω^0, так что $\omega = \omega_\gamma \cup \omega^0$.

Расстояния между узлом сетки $x \in \bar{\omega}$ и соседними с ним узлами $x^{(\pm 1_\alpha)} \in \bar{\omega}$ будем называть шагами сетки и обозначать через $h_\alpha^\pm$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$,

$$h_\alpha^+(x) = x^{(+1_\alpha)} - x, \quad h_\alpha^-(x) = x - x^{(-1_\alpha)}, \quad h_\alpha^+(x) = h_\alpha^-(x^{(+1_\alpha)}).$$

Введем также шаги

$$\hbar_\alpha(x) = \hbar_\alpha(x_\alpha^{(i_\alpha)}) = 0.5\,(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}),$$

где $x_\alpha^{(i_\alpha \pm 1)}$ — координаты точек решетки R_p^h (а не сетки $\bar{\omega}$). Очевидно, что $\hbar_\alpha$ зависит только от координаты x_α (индекса i_α). В узлах $x \in \omega^0$ имеем $\hbar_\alpha = 0.5\,(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)$. В приграничных узлах

$$h_\alpha \geqslant 0.5\,(h_\alpha^+ + h_\alpha^-) \equiv \hbar_\alpha^*.$$

Каждому узлу $x \in \omega$ поставим в соответствие объем $H(x)$, ограниченный кусками $s_\alpha^\pm$ гиперплоскостей, ортогональных осям координат ox_α и проведенных через точки $(x^{(\pm 1_\alpha)} + x)/2$, $x^{(\pm 1_\alpha)}$, $x \in R_p^h$:

$$H(x) = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha(x), \qquad s_\alpha^\pm = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{p} \hbar_\beta(x).$$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать тело и его объем, фигуру и ее площадь одними и теми же буквами. Обозначим через $\tilde{\omega}_\alpha$ множество потоковых узлов $x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in G$ по x_α, через $\tilde{Ц}_\alpha$ — цепочку потоковых узлов $x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \tilde{\omega}_\alpha$ и лежащих на Δ_α

$$x^{(\pm 0.5_\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \ldots, x_{\alpha-1}^{(i_{\alpha-1})}, x_\alpha^{(i_\alpha \pm 0.5)}, x_{\alpha+1}^{(i_{\alpha+1})}, \ldots, x_p^{(i_p)}),$$

где

$$x_\alpha^{(i_\alpha \pm 0.5)} = x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm 0.5 h_\alpha^\pm.$$

Каждому потоковому узлу $x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \tilde{\omega}_\alpha$ поставим в соответствие объем $H_\alpha^\pm = s_\alpha^\pm h_\alpha^\pm$. Будем обозначать через h максимальный средний шаг $\hbar_\alpha$ сетки ω:

$$h = \max_{x_i \in G} \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \hbar_\alpha(x_i).$$

Введем, наконец, сетку ω_τ по времени с шагом τ и дробным шагом τ/p:

$$\omega_\tau = \left\{ t_{j+\alpha/p} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau,\ j = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1 = j_0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Все положительные постоянные, не зависящие от h и τ, будем в дальнейшем обозначать одной и той же буквой M.

3. Сеточные функции. Операторы

Пусть $y = y(x)$ — сеточная функция, определенная в узлах сетки $\bar{\omega}$. Введем обозначения:

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}), \quad y_{\bar{x}_\alpha}^{+} = (y^{(+1_\alpha)} - y)/h_\alpha^{+}, \quad y_{\bar{x}_\alpha}^{-} = (y - y^{(-1_\alpha)})/h_\alpha^{-}.$$

Функцию $y_{\bar{x}_\alpha}^{\pm}$, являющуюся аналогом производной $\partial u / \partial x_\alpha$, будем относить к потоковым узлам $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in \tilde{\omega}_\alpha$. Коэффициентам $k_\alpha(x, t)$ поставим в соответствие сеточные функции $a_\alpha t = a_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)}, t)$. Будем предполагать, что

$$a_\alpha^{\pm} = k_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)}, t) + O((h_\alpha^{\pm})^2), \qquad a_\alpha^{\pm} \geqslant c_1 > 0. \tag{4}$$

Функциям $w_\alpha = k_\alpha(x, t)\partial u / \partial x_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, поставим в соответствие сеточные функции W_α, определенные в узлах $\tilde{\omega}_\alpha$: $W_\alpha^{\pm} = W_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)}, t) \equiv \equiv a_\alpha^{\pm} y_{\bar{x}_\alpha}^{\pm}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Введем обозначение $(\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} \equiv (\chi_\alpha^{+} - \chi_\alpha^{-}) / \hbar_\alpha$, где $\chi_\alpha^{\pm} = \chi_\alpha(x^{(\pm 0.5\alpha)}, t)$ — функция, определенная в потоковых точках $\tilde{\omega}_\alpha$.

Дифференциальному оператору L_α поставим в соответствие разностный оператор Λ_α:

$$\Lambda_\alpha y = (W_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left[a_\alpha^{+}\,\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^{+}} - a_\alpha^{-}\,\frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^{-}}\right]. \tag{5}$$

Функциям f_α поставим в соответствие сеточные функции φ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяющие условиям аппроксимации

$$\varphi_\alpha = f_\alpha^{j+1} + (\mu_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \bar{\mu}_\alpha, \qquad \mu_\alpha^{\pm} = O((h_\alpha^{\pm})^2), \qquad \bar{\mu}_\alpha = O(\hbar_\alpha^2). \tag{6}$$

Введем пространство $\mathscr{H}$ сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ, со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{\omega} Hyz \text{ и нормой } \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Как показано в [7], операторы Λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, являются самосопряженными и отрицательно определенными. Пусть сеточные функции $z(x)$ и $y(x)$ обращаются в нуль в узлах $x \in \gamma$, тогда

$$(\Lambda_\alpha z, y) = (z, \Lambda_\alpha y), \qquad -(\Lambda_\alpha z, z) \geqslant \delta_0 \|z\|^2, \tag{7}$$

где $\delta_0 = 4c_1 / 3D^2$, D — диаметр области G.

4. Постановка разностной задачи и погрешность аппроксимации

Поставим в соответствие исходной задаче (1)—(3) разностную задачу: найти сеточную функцию $y(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} y_0 \equiv y^j, \quad x \in \bar{\omega}; \\ \frac{y_\alpha - y_{\alpha-1}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_\alpha + \varphi_\alpha, \quad x \in \omega, \quad y_\alpha = \nu(x, t_{j+1}), \quad x \in \gamma_\alpha; \\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad y^{j+1} \equiv y_p, \quad x \in \bar{\omega}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0; \\ y^0 = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}, \end{gathered} \tag{8}$$

где операторы Λ_α определяются по формуле (5), сеточные функции $a_\alpha^\pm$, φ_α удовлетворяют условиям аппроксимации (4) и (5), $j_0 = T/\tau - 1$.

Точность схемы (8) определяется величиной ошибки $z_\alpha = y_\alpha - u(x, t_{j+1})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $z^j = y^j - u(x, t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, j_0$, где y — решение задачи (8), $u(x, t)$ — решение задачи (1)—(3). Подставляя в (8) $y_\alpha = z_\alpha + u(x, t_{j+1})$, $y^j = z^j + u(x, t_j)$, для функции z получаем задачу

$$
\begin{aligned}
&z_0 \equiv z^j, \qquad x \in \bar\omega;\\
(9)\qquad &\frac{z_\alpha - z_{\alpha-1}}{\tau} = \Lambda_\alpha z_\alpha + \Psi_\alpha, \qquad x \in \omega; \qquad z_\alpha = 0, \qquad x \in \gamma;\\
&\alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad z^{j+1} \equiv z_p, \qquad x \in \bar\omega, \qquad j = 0, 1, \ldots, j_0;\\
&z^0 = 0, \qquad x \in \bar\omega,
\end{aligned}
$$

где Ψ_α — погрешность аппроксимации уравнения (8) номера α:

$$
(10)\qquad \Psi_\alpha = -\delta_{\alpha,1}\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \Lambda_\alpha u^{j+1} + \varphi_\alpha,
$$

где $\delta_{\alpha,1}$ — символ Кронекера, $\delta_{1,1} = 1$, $\delta_{\alpha,1} = 0$ при $\alpha > 1$.

В узлах $x \in \omega^0$ используем формулу Тейлора. При условиях (4), (6) имеем

$$
(11)\qquad \Lambda_\alpha u^{j+1} + \varphi_\alpha = (L_\alpha u + f_\alpha)^{j+1} + (\chi_\alpha)_{\hat x_\alpha} + O(\hbar_\alpha^2),
$$

где

$$
\chi_\alpha^\pm = \left\{(a_\alpha^\pm - k_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{(h_\alpha^\pm)^2}{8}\left[\frac{a_\alpha^\pm}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3} + \right.\right.
$$
$$
\left.\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]\right\}^{j+1}_{x = x(\pm 0.5_\alpha)} + \mu_\alpha^\pm = O((h_\alpha^\pm)^2).
$$

В приграничных узлах ω_γ, где $\hbar_\alpha \geqslant 0.5(h_\alpha^+ + h_\alpha^-) \equiv \hbar_\alpha^*$, получаем

$$
(12)\qquad \Lambda_\alpha u^{j+1} + \varphi_\alpha = \frac{\hbar_\alpha^*}{\hbar_\alpha}\left(\frac{W_\alpha^+ - W_\alpha^-}{\hbar_\alpha^*}\right) + \varphi_\alpha = \frac{\hbar_\alpha^*}{\hbar_\alpha}(L_\alpha u)^{j+1} +
$$
$$
+ f_\alpha^{j+1} + O(\hbar_\alpha) = (L_\alpha u + f_\alpha)^{j+1} + \psi_\alpha^*,
$$

где

$$
\psi_\alpha^* = \frac{\hbar_\alpha^* - \hbar_\alpha}{\hbar_\alpha}(L_\alpha u)^{j+1} + O(\hbar_\alpha).
$$

Отсюда следует, что

$$
\psi_\alpha^* = O(1) \text{ при } \hbar_\alpha > \hbar_\alpha^*, \qquad \psi_\alpha^* = O(\hbar_\alpha) \text{ при } \hbar_\alpha = \hbar_\alpha^*.
$$

Учитывая, что

$$
\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} + O(\tau),
$$

и, объединяя (10)—(12), погрешность Ψ_α запишем в виде

$$
(13)\qquad \Psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha + (\chi_\alpha)'_{x_\alpha} + \psi_\alpha^*,
$$

где

$$\mathring{\psi}_\alpha = \left[-\delta_{\alpha,1}\frac{\partial u}{\partial t} + L_\alpha u + f_\alpha\right]^{j+1};$$

(14)
$$\psi_\alpha = O(\hbar_\alpha^2 + \tau), \qquad \chi_\alpha^\pm = O((h_\alpha^\pm)^2), \qquad \psi_\alpha^\circ = 0 \text{ при } x \in \omega_\alpha^0;$$
$$\psi_\alpha^\circ = O(1) \text{ при } x \in \omega_\gamma \text{ и } \hbar_\alpha > \hbar_\alpha^*;$$
$$\psi_\alpha^* = O(\hbar_\alpha) \text{ при } x \in \omega_\gamma \text{ и } \hbar_\alpha = \hbar_\alpha^*.$$

Так как $\mathring{\psi}_\alpha = O(1)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, то из (13) следует, что $\Psi_\alpha = O(1)$ и во всех узлах $x \in \omega$ разностные уравнения (8) ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$) не аппроксимируют исходного уравнения. Однако на решении исходной задачи (1)—(3)

(15) $$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0, \qquad x \in \omega,$$

и, следовательно,

(16) $$\left\| \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha \right\| \to 0 \text{ при } h \to 0, \qquad \tau \to 0,$$

т. е. схема аппроксимирует исходную задачу в суммарном смысле. В дальнейшем схему (8) будем рассматривать как составную схему, аппроксимирующую исходную задачу в суммарном смысле, т. е. как аддитивную схему (о суммарной аппроксимации, составных схемах см. в [1, 2, 4]).

§ 2. О сходимости и точности схемы

1. Выделение главного члена погрешности метода

Следуя работам [1–5], решение задачи (9), (13), (14) представим в виде

(17) $$z_\alpha = v_\alpha + \eta_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad z^j = v^j + \eta^j,$$
$$j = 0, 1, \ldots, j_0,$$

где функцию η определим во всех узлах сетки $\bar{\omega}$, как решение задачи

(18) $$\eta_0 \equiv \eta^j, \qquad \frac{\eta_\alpha - \eta_{\alpha-1}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad \eta^{j+1} \equiv \eta_p,$$
$$j = 0, 1, \ldots, j_0, \qquad x \in \bar{\omega}, \qquad \eta^0 = 0 \text{ при } x \in \bar{\omega}.$$

Тогда функция v удовлетворяет условиям

$$v_0 \equiv v^j, \qquad x \in \bar{\omega}, \qquad \frac{v_\alpha - v_{\alpha-1}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_\alpha + \overline{\Psi}_\alpha, \qquad x \in \omega;$$

(19) $$v_\alpha = -\eta_\alpha \text{ при } x \in \gamma, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad v^{j+1} \equiv v_p, \; x \in \bar{\omega},$$
$$j = 0, 1, \ldots, j_0, \qquad v^0 = 0 \text{ при } x \in \bar{\omega},$$

где

(20) $$\overline{\Psi}_\alpha = \bar{\psi}_\alpha + (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha} + \psi_\alpha^*, \qquad \bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha + \Lambda_\alpha \eta_\alpha.$$

Суммируя уравнения (18) для $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, учитывая условие (15) и условие $\eta^0 = 0$ при $x \in \bar{\omega}$, получаем

(21) $$\eta^j = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, j_0, \qquad x \in \bar{\omega},$$

а на промежуточных слоях

$$\eta_\alpha = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} \mathring{\psi}_\beta = O(\tau), \qquad \Lambda_\alpha \eta_\alpha = O(\tau). \tag{22}$$

Для функции $\bar{\psi}_\alpha$ из (20), (22), (14) следует оценка

$$\bar{\psi}_\alpha = O(\tau + \hbar_\alpha^2). \tag{23}$$

Таким образом, для функции v получена задача (19); причем правая часть каждого из уравнений (19) $\overline{\Psi}_\alpha \to 0$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$ в строго внутренних узлах $x \in \omega^0$; $\|\overline{\Psi}_\alpha\| \to 0$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$; $v_\alpha = -\eta_\alpha \to 0$ при $\tau \to 0$ в граничных узлах $x \in \gamma$; $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Введем обозначения

$$P_\alpha v \equiv (v_\alpha - v_{\alpha-1}) / \tau - \Lambda_\alpha v_\alpha, \qquad v_0 \equiv v^j, \qquad v_p \equiv v^{j+1}.$$

Решение задачи (19) — функцию v представим в виде суммы функций:

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + v^{(4)}, \tag{24}$$

где $v^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, 4$,— решения следующих задач:

$$P_\alpha v^{(1)} = 0, \quad x \in \omega; \quad v_\alpha^{(1)} = -\eta_\alpha, \quad x \in \gamma, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \quad v^{(1)}|_{t=0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}; \tag{25}$$

$$P_\alpha v^{(2)} = \mathring{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega; \quad v_\alpha^{(2)} = 0, \quad x \in \gamma, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \quad v^{(2)}|_{t=0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}; \tag{26}$$

$$P_\alpha v^{(3)} = \bar{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega; \quad v_\alpha^{(3)} = 0, \quad x \in \gamma, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \quad v^{(3)}|_{t=0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}; \tag{27}$$

$$P_\alpha v^{(4)} = (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}, \quad x \in \omega; \quad v_\alpha^{(4)} = 0, \quad x \in \gamma, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0, \quad v^{(4)}|_{t=0} = 0, \quad x \in \bar{\omega}. \tag{28}$$

2. Принцип максимума и оценка функций $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$

В работах [1-3] была рассмотрена схема (8) с операторами Λ_α, несколько отличными от операторов, рассматриваемых в данной работе, а именно, в качестве Λ_α выбирались операторы

$$\Lambda_\alpha' y = \frac{1}{\hbar_\alpha^*} [a_\alpha^+ y_{x_\alpha}^+ - a_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}^-],$$

где $\hbar_\alpha^* = 0.5(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)$ во всех узлах сетки ω. Операторы Λ_α' совпадают с операторами Λ_α, определяемыми по формуле (5), в том случае, когда множество граничных узлов $\gamma \in R_p^h$ и, следовательно, $\hbar_\alpha = 0.5(x_\alpha^{(i_\alpha+1)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}) = \hbar_\alpha^*$ во всех узлах сетки ω (в строго внутренних узлах $x \in \omega^0$ равенство $\hbar_\alpha = \hbar_\alpha^*$ всегда имеет место). Для решения задач (25)—(27) с операторами Λ_α' ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$) на равномерной решетке R_p^h с шагами $h_\alpha = \mathrm{const}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ (сетка ω неравномерна лишь в приграничных узлах, где $\hbar_\alpha^* \neq h_\alpha$), в работе [2] при помощи принципа максимума и связанных с ним теорем были получены априорные оценки. Способ получения

этих оценок никак не связан с равномерностью или неравномерностью сетки (решетки). Каждому узлу $P=(x, t)$ пространственно-временной сетки $\Omega=\{\omega\times\omega_\tau\}$ ставится в соответствие множество узлов $Ш(P)$ — шаблон схемы и множество $Ш'(P)=Ш(P)\setminus P$ — окрестность узла P. В каждом узле $P\in\Omega$ разностное уравнение записывается в канонической форме, в граничных узлах $P\in S=\{\gamma\times\omega_\tau\}$ ставится краевое условие. Рассматривается задача

$$(29)\qquad A(P)y(P)=\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)y(Q)+F(P)\ \text{при}\ P\in\Omega,$$
$$y(P)=\nu(P)\quad\text{при}\ P\in S,$$

где $A(P)$, $B(P, Q)$ — коэффициенты схемы. Введем нормы

$$\|y\|_{c,\Omega}=\max_{P\in\Omega}|y(P)|,\qquad \|y\|_{c,S}=\max_{P\in S}|y(P)|,$$
$$\|y\|_{c,\omega}=\max_{x\in\omega}|y(x,t)|$$

и обозначим через $D(P)$ величину

$$D(P)=A(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q).$$

В [2] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A(P)>0$, $B(P, Q)>0$, $D(P)\geqslant 0$. *Тогда для задачи* (29) *при* $\nu(P)\equiv 0$ *справедлива оценка*

$$(30)\qquad \|y\|_{c,\Omega}\leqslant\|\nu\|_{c,S}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A(P)>0$, $B(P, Q)>0$, $D(P)>0$. *Тогда для задачи* (29) *при* $\nu(P)\equiv 0$ *справедлива оценка*

$$(31)\qquad \|y\|_{c,\Omega}\leqslant\|F/D\|_{c,\Omega}.$$

Пусть $\nu(P)=0$. Тогда в уравнении (29) при $P\in\{\omega_\gamma\times\omega_\tau\}\equiv\Omega_\gamma$ суммирование фактически проводится лишь по внутренним узлам сетки $Q\in Ш'(P)\cap\Omega\equiv\bar{Ш}'(P)$. В строго внутренних узлах $P\in\{\omega^0\times\omega_\tau\}\equiv\Omega^0$ положим $\bar{Ш}'(P)=Ш'(P)$. Введем обозначение

$$\bar{D}(P)=A(P)-\sum_{Q\in\bar{Ш}'(P)}B(P,Q).$$

Теорема 3. *Пусть* $\bar{D}(P)=0$, $F(P)=0$ *при* $P\in\Omega^0$, $\bar{D}(P)>0$ *при* $P\in\Omega_\gamma$; $A(P)>0$, $B(P, Q)>0$. *Тогда для решения задачи* (29) *при* $\nu(P)=0$ *справедлива оценка*

$$(32)\qquad \|y\|_{c,\Omega}\leqslant\max_{P\in\Omega_\gamma}\left|\frac{F(P)}{\bar{D}(P)}\right|.$$

Оценим с помощью теорем 1—3 решения задач (25), (27). Для оценки функций $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ выберем четырехточечный шаблон

$$Ш(P)=\{P=(x,t_{j+\alpha/p}),\ (x^{(\pm 1\alpha)},t_{j+\alpha/p}),\ (x,t_{j+(\alpha-1)/p})\}.$$

Запишем уравнения (25), (26) в виде (29). Нетрудно убедиться в том, что для задачи (25) условия теоремы 1 выполнены ($A(P)>0$, $B(P, Q)>0$,

$D(P)=0, F(P)=0$). Из (30), (25), (22) получаем (см. также оценку (57), стр. 379 из [2])

$$\|v^{(1)}\|_{c,\Omega} \leqslant M\tau. \tag{33}$$

Для задачи (26) выполнены условия теоремы 3 ($\bar{D}(P)=F(P)=0$ при $P\in\Omega^0$; $F(P)=\psi_\alpha{}^*$, $\bar{D}(P)>0$ при $P\in\Omega_\gamma$; $A(P)>0$, $B(P,Q)>0$, $\nu(P)=0$). При этом оказывается, что

$$\bar{D}(P) \geqslant c_1/h^2 > 0, \qquad P\in\Omega_\gamma. \tag{34}$$

Из (32), (34), (14) имеем (см. также оценку (58), стр. 380, [2])

$$\|v^{(2)}\|_{c,\Omega} \leqslant Mh^2. \tag{35}$$

Оценим, наконец, функцию $v^{(3)}$. Выберем трехточечный шаблон

$$Ш(P)=\{P=(x,t_{j+\alpha/p}),\quad (x^{(\pm 1\alpha)},t_{j+\alpha/p})\}$$

и запишем уравнение (27) в виде (29). Тогда

$$F(P)=\frac{(v^{(3)})^{j+\alpha/p}}{\tau}+\bar{\psi}^{j+\alpha/p}, \qquad D(P)=1/\tau, \qquad A(P)>0; \tag{36}$$

$$B(P,Q)>0 \text{ при } P\in\Omega, \qquad \nu(P)=0 \text{ при } P\in S.$$

Здесь и далее введены обозначения

$$(v^{(3)})^{j+(\alpha-1)/p}\equiv v^{(3)}_{\alpha-1}, \qquad (v^{(3)})^{j+\alpha/p}\equiv v_\alpha{}^{(3)}, \qquad \bar{\psi}^{j+\alpha/p}\equiv\bar{\psi}_\alpha \text{ и т. п.}$$

Из (36) следует, что условия теоремы 2 выполнены. Из (36), (31) получаем

$$\|(v^{(3)})^{j+\alpha/p}\|_{c,\omega} \leqslant \|(v^{(3)})^{j+(\alpha-1)/p}\|_{c,\omega}+\tau\|\bar{\psi}^{j+\alpha/p}\|_{c,\omega}. \tag{37}$$

Суммируя неравенства (37) по всем индексам α и j, учитывая (23) и условие $v^{(3)}|_{t=0}=0$, имеем (см. также оценку (59), стр. 381, [2])

$$\|v^{(3)}\|_{c,\Omega} \leqslant M(h^2+\tau). \tag{38}$$

Если аналогично оценивать решение задачи (28), то, поскольку на неравномерной сетке $(\chi_\alpha)\hat{x}_\alpha=O(\hbar_\alpha)$, из (31) будем иметь

$$\|v^{(4)}\|_{c,\Omega} \leqslant Mh. \tag{39}$$

Оценка (39) является заниженной. Поэтому для оценки функции $v^{(4)}$ воспользуемся методом энергетических неравенств n-го ранга.

3. Априорные оценки n-го ранга. Оценка функции $v^{(4)}$

Оценим функцию $v^{(4)}$ в сеточной норме C. Для этой цели будем пользоваться априорными оценками n-го ранга, полученными в [6]. Введем функции $\overset{0}{v}=v$, $\overset{1}{v}=v^2,\ldots,\overset{n}{v}=v^{\overset{n}{2}}$ и запишем уравнение (28) для функции

$(v^{(4)})^{2n}$. Чтобы не загромождать обозначений, вместо $v^{(4)}$ будем писать просто v. Тогда (см. [6])

$$(40)\qquad \frac{\overset{n}{v}_\alpha - \overset{n}{v}_{\alpha-1}}{\tau} - \Lambda_\alpha \overset{n}{v}_\alpha + \frac{1}{\hbar_\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} v_\alpha^{\nu_n-\nu_{k+1}}\Big\{h_\alpha^+ a_\alpha^+ (\overset{k}{v}{}^+_{\alpha x_\alpha})^2 +$$

$$+ h_\alpha^- a_\alpha^- (\overset{k}{v}{}^-_{\alpha x_\alpha})^2 + \left(\frac{\overset{k}{v}_\alpha - \overset{k}{v}_{\alpha-1}}{\tau}\right)^2\Big\} = 2^n v_\alpha^{\nu_n}(\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha}, \quad \nu_k = 2^k - 1.$$

Введем обозначения

$$(y, z)_{Ц_\alpha} = \sum_{x\in Ц_\alpha} yz\hbar_\alpha, \qquad (v, w)_{\widetilde{Ц}_\alpha} = \sum_{x^{(+0.5_\alpha)}\in\widetilde{Ц}_\alpha} (vw)^{(+0.5_\alpha)} h_\alpha^+,$$

$$\|y\|_{Ц_\alpha} = \sqrt{(y, y)_{Ц_\alpha}}, \qquad \|w\|_{\widetilde{Ц}_\alpha} = \sqrt{(w, w)_{\widetilde{Ц}_\alpha}},$$

$$\overset{n-1}{I}_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1}\left(\frac{v_\alpha^{\nu_n-\nu_{k+1}}}{\hbar_\alpha}, h_\alpha^+ a_\alpha^+ (\overset{k}{v}{}^+_{\alpha x_\alpha})^2 + h_\alpha^- a_\alpha^- (\overset{k}{v}{}^-_{\alpha x_\alpha})^2 +\right.$$

$$\left. + \tau\left(\frac{\overset{k}{v}_\alpha - \overset{k}{v}_{\alpha-1}}{\tau}\right)^2\right)_{Ц_\alpha}.$$

Умножим уравнение (40) на $\hbar_\alpha$ и просуммируем по цепочке $Ц_\alpha$:

$$(41)\qquad \frac{(\overset{n}{v}_\alpha, 1)_{Ц_\alpha} - (\overset{n}{v}_{\alpha-1}, 1)_{Ц_\alpha}}{\tau} + \overset{n-1}{I}_\alpha = 2^n (v_\alpha^{\nu_n}, (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha})_{Ц_\alpha}.$$

Для правой части (41) в [7] (см. также [6]) получена оценка

$$(42)\qquad 2^n \left|(v_\alpha^{\nu_n}, (\chi_\alpha)_{\hat{x}_\alpha})_{Ц_\alpha}\right| \leqslant {}_1/_2 \overset{n-1}{I}_\alpha + M_1 (2^n M_1)^{2^n} \|\chi_\alpha\|^{2^n}_{\widetilde{Ц}_\alpha},$$

где $M_1 = \sqrt{(2D)} / c_1$, D — диаметр области G. Оценим правую часть (41) с помощью (42), умножим получающееся неравенство на $s_\alpha^\pm$ и просуммируем по всем цепочкам $Ц_\alpha$. Получаем

$$(43)\qquad \frac{(\overset{n}{v}{}^{j+\alpha/p}, 1) - (\overset{n}{v}{}^{j+(\alpha-1)/p}, 1)}{\tau} \leqslant M_s M_1 (M_1 2^n)^{2^n} \max_{Q_\alpha} \|\chi^{j+\alpha/p}\|^{2^n}_{\widetilde{Ц}_\alpha}.$$

Здесь $M_s = \max\limits_\alpha \sum\limits_{Q_\alpha} s_\alpha$, Q_α — множество всех цепочек $\widetilde{Ц}_\alpha$, $\overset{n}{v}{}^{j+\alpha/p} \equiv \overset{n}{v}_\alpha$, $\overset{n}{v}{}^{j+(\alpha-1)/p} \equiv \overset{n}{v}_{\alpha-1}$, $\chi^{j+\alpha/p} \equiv \chi_\alpha$. Просуммируем (43) по всем α и j. Так как $v \equiv v^{(4)} = 0$ при $t = 0$, то

$$(44)\qquad \sum_\omega (v^{j+\alpha/p})^{2^n}) H \leqslant T M_s M_1 (2^n M_1)^{2^n} \max_{j,\alpha} \max_{Q_\alpha} \|\chi^{j+\alpha/p}\|^{2^n}_{\widetilde{Ц}_\alpha}.$$

Далее, как и в [3, 7], оценим снизу левую часть неравенства (44). Извлечен из обеих частей получающегося неравенства корень степени 2^n. Как и в [7], выберем n в зависимости от H_*. Усиливая получающееся неравенство, окончательно имеем

$$(45)\qquad \|v^{(4)}\|_{c,\Omega} \leqslant M \ln \frac{V_0}{H_*} \max_{j,\alpha} \max_{Q_\alpha} \|\chi^{j+\alpha/p}\|_{\widetilde{Ц}_\alpha},$$

где V_0 — объем G, $M = \text{const}$, не зависящая от τ и h. Из (45), (14) вместо

(39) получаем

(46) $$\|v^{(4)}\|_{c,\,\Omega} \leqslant Mh^2 \ln (V_0 / H_*).$$

Наконец, из оценки (44) при $n = 1$ и (14) имеем

(47) $$\|v^{(4)}\| \leqslant Mn^2.$$

Поскольку $\|v\| \leqslant \|v\|_{c,\,\Omega}\sqrt{V_0}$, то из (33), (35), (38), (22) следуют оценки в сеточной норме L_2:

(48) $$\|v^{(1)}\| \leqslant M\tau, \qquad \|v^{(2)}\| \leqslant Mh^2, \qquad \|v^{(3)}\| \leqslant M(h^2 + \tau),$$
$$\|\eta\| \leqslant M\tau.$$

4. О точности локально одномерной схемы (8) на неравномерных сетках

Точность схемы (8) определяется величиной ошибки $z = y - u$, удовлетворяющей условиям (9). В п. 1, § 2 ошибка z была представлена в виде

(49) $$z_\alpha = v_\alpha^{(1)} + v_\alpha^{(2)} + v_\alpha^{(3)} + v_\alpha^{(4)} + \eta_\alpha.$$

Для функции η были получены оценки (21), (22), (48), для функции $v^{(1)}$ — оценки (33), (48), $v^{(2)}$ — оценки (35), (48), $v^{(3)}$ — оценки (38), (48), $v^{(4)}$ — оценки (46), (47), (39). Собирая эти оценки и учитывая (49), получаем следующие результаты.

Теорема 4. *Локально одномерная разностная схема* (8) *равномерно сходится на произвольной последовательности неравномерных сеток при независимом стремлении к нулю шагов сетки. Справедлива оценка*

(50) $$\|y - u\|_{c,\,\Omega} \leqslant M[h^2 \ln (V_0 / H_*) + \tau].$$

Если выполнены условия

(51) $$m_0 h^{\varkappa p} \leqslant H(x) \leqslant h^p,$$

где $m_0 = \text{const} > 0$ и $\varkappa = \text{const} > 0$, не зависящие от h и τ, то из (50) следует оценка

(52) $$\|y - u\|_{c,\,\Omega} \leqslant M[h^2 \ln (D / h) + \tau],$$

где D — диаметр области G.

Теорема 5. *Локально одномерная разностная схема* (8) *сходится в сеточной норме* $L_2(\omega)$ *на произвольной последовательности неравномерных сеток. Справедлива оценка*

(53) $$\|y - u\| \leqslant M(h^2 + \tau).$$

Замечание. Аналогичные оценки имеют место для задачи (1)—(2), где

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha u, \qquad k_\alpha \geqslant c_1 > 0,$$

и соответствующих монотонных [2] схем. Если $b_\alpha \neq 0$ либо $q_\alpha < 0$, то оценки (50)—(51) справедливы при $\tau \leqslant \tau_0 = \text{const}$.

§ 3. О локально одномерной схеме для второй и третьей краевых задач

1. Постановка задачи

Пусть G — область, составленная из p-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям (ступенчатая область). Граница Γ ступенчатой области G состоит из кусков Γ_α гиперплоскостей, ортогональных осям координат ox_α, $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^+ \cup \Gamma_\alpha^-$, где Γ_α^+ и Γ_α^- — правые и левые куски границы Γ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Как и ранее,

$$Q_T = G \times (0 < t \leqslant T), \qquad \overline{Q}_T = \overline{G} \times (0 \leqslant t \leqslant T),$$
$$\overline{G} = G \cup \Gamma.$$

Рассмотрим задачу: найти непрерывную в $\overline{Q}_T$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f_\alpha(x, t) \right\}, \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{54}$$

краевому и начальному условиям

$$\mp k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sigma_\alpha^\pm(x, t) u = \nu_\alpha^\pm(x, t) \text{ при } x \in \Gamma_\alpha^\pm, \tag{55}$$
$$0 < t \leqslant T, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p;$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ при } x \in \overline{G},$$

где k_α, $\sigma_\alpha^\pm$, $\nu_\alpha^\pm$, f_α — заданные функции, причем

$$k_\alpha(x, t) \geqslant c_1 = \text{const} > 0, \qquad \sigma_\alpha^\pm \geqslant 0. \tag{56}$$

Предположим, что существует единственное и достаточно гладкое решение задачи (54) — (56).

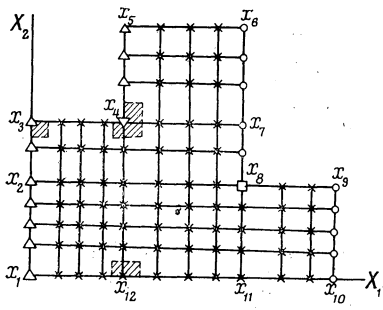
2. Сетка. Классификация узлов. Обозначения

Построим решетку R_p^h так, чтобы куски $\Gamma_\alpha^\pm$ границы Γ принадлежали бы гиперплоскостям $x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha^s)}$, $s = 1, 2, \ldots, M$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Рассмотрим сетку узлов $\bar{\omega} = R_p^h \cap \overline{G}$. Обозначим через γ_α множество узлов сетки $\bar{\omega}$, принадлежащих Γ_α, через ω_α^0 — множество остальных узлов сетки $\bar{\omega}$. Отметим, что к множеству ω_α^0 относятся как все узлы $x \in G$ $(x \in R_p^h \cap G)$, так и узлы, принадлежащие кускам $\Gamma \setminus \Gamma_\alpha$ границы $\Gamma (x \in R_p^h \cap (\Gamma \setminus \Gamma_\alpha))$. Будем говорить, что $x \in \overset{*}{\gamma}_\alpha$, если $x \in \gamma_\alpha$ и отрезки $(x, x^{(\pm 1_\alpha)}) \in \overline{G}$. Введем также множества $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha \setminus \overset{*}{\gamma}_\alpha$, причем $\overset{*}{\gamma}_\alpha = \overset{*}{\gamma}_\alpha^+ \cup \overset{*}{\gamma}_\alpha^-$, $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha = \overset{\circ}{\gamma}_\alpha^+ \cup \overset{\circ}{\gamma}_\alpha^-$, где $\overset{*}{\gamma}_\alpha^+$, $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha^+$ и $\overset{*}{\gamma}_\alpha^-$, $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha^-$ — множества правых и левых узлов $\overset{*}{\gamma}_\alpha$, $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha$. Обозначим через ω_α множество внутренних по направлению ox_α узлов $\omega_\alpha = \omega_\alpha^0 \cup \overset{*}{\gamma}_\alpha$.

Как и ранее, введем шаги h_α^+ и h_α^- и положим

$$(57)\qquad \hbar_\alpha = \begin{cases} 0.5\,(h_\alpha^+ + h_\alpha^-), & x \in \omega_\alpha, \\ 0.5 h_\alpha^{\mp}, & x \in \overset{\circ}{\gamma}_\alpha^{\pm}. \end{cases}$$

Каждому узлу $x \in \bar{G}$ поставим в соответствие объем $H(x) \in \bar{G}$, ограниченный кусками $s_\alpha^{\pm}$ гиперплоскостей, проходящих через потоковые точки $x^{(\pm 0.5\alpha)} \in G$ и ортогональных осям координат ox_α, а также куском $\bar{s}(x)$ границы Γ в случае $x \in \Gamma$. Если узел $x \in \bar{\omega}$ является граничным узлом по направлениям $ox_{\alpha_1}, ox_{\alpha_2}, \ldots, ox_{\alpha_m}$, $m \leqslant p$, то



$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} \bar{s}_{\alpha_k},$$

где

$$\bar{s}_\alpha = \begin{cases} s_\alpha^{\pm}, & x \in \overset{\circ}{\gamma}_\alpha^{\mp}, \\ |s_\alpha^+ - s_\alpha^-|, & x \in \overset{*}{\gamma}_\alpha. \end{cases}$$

Объем $H(x)$ вычисляется по формуле

$$(58)\qquad H(x) = \begin{cases} 0.5 h_\alpha^{\pm} s_\alpha^{\pm} \equiv \hbar_\alpha s_\alpha, & x \in \overset{\circ}{\gamma}_\alpha, \\ 0.5\,(h_\alpha^+ s_\alpha^+ + h_\alpha^- s_\alpha^-), & x \in \overset{*}{\gamma}_\alpha. \end{cases}$$

На фигуре знаком $\triangle$ отмечены узлы, принадлежащие множеству $\overset{\circ}{\gamma}_1^-$, $\bigcirc$ — множеству $\overset{\circ}{\gamma}_1^+$, ∇ — множеству $\overset{*}{\gamma}_1^-$, $\square$ — множеству $\overset{*}{\gamma}_1^+$, $\times$ — множеству ω_1^0. Отмечены также площадки $H(x)$, соответствующие узлам x_3, x_4, x_{12}:

$$H(x_3) = {}^1/_4 h_1^+(x_3)\, h_2^-(x_3),$$
$$H(x_4) = {}^1/_4\,[h_1^+(x_4)\,(h_2^+(x_4) + h_2^-(x_4)) + h_1^-(x_4)\, h_2^-(x_4)],$$
$$H(x_{12}) = {}^1/_4\,(h_1^+(x_{12}) + h_1^-(x_{12}))\, h_2^+(x_{12}).$$

Введем, как и ранее, временную сетку ω с шагом τ и дробным шагом τ/p. Пространственно-временную сетку обозначим через $\Omega = \{\bar{\omega} \times \omega_\tau\}$.

3. Разностные операторы и их свойства

Введем операторы Λ_α, соответствующие дифференциальным операторам L_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$. В узлах $x \in \omega_\alpha^0$, как и раньше, положим

$$(59)\qquad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} = \frac{1}{\hbar_\alpha}\left[a_\alpha^+ \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - a_\alpha^- \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^-}\right],\ x \in \omega_\alpha^0.$$

Рассмотрим узлы $x \in \overset{\circ}{\gamma}_\alpha$. В узлах $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha^+$ с точностью до $O(h_\alpha^-)$ справедливо равенство

$$(60)\qquad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \approx \left[k_\alpha(x, t)\, \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x, t) - k_\alpha(x^{(-0.5\alpha)}, t) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x^{(-0.5\alpha)}, t)\right] (0.5 h_\alpha^-)^{-1}.$$

Из (4) и формулы Тейлора получаем

$$k_\alpha(x^{(-0.5\alpha)}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x^{(-0.5\alpha)}, t) = a_\alpha^- \frac{u - u^{(-1\alpha)}}{h_\alpha^-} + O((h_\alpha^-)^2). \tag{61}$$

Из (55), (60) и (61) следует

$$L_\alpha u = \frac{-(\sigma_\alpha^+ u + \nu_\alpha^+) - a_\alpha^- u_{\bar{x}_\alpha}}{0.5 h_\alpha^-} + O(h_\alpha^-) \text{ при } x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^+. \tag{62}$$

Аналогично при $x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^+$ имеем

$$L_\alpha u = \frac{-(\sigma_\alpha^- u + \nu_\alpha^-) + a_\alpha^+ u_{x_\alpha}^+}{0.5 h_\alpha^+} + O(h_\alpha^+) \text{ при } x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^-. \tag{63}$$

Учитывая (62), (63), определим

$$\Lambda_\alpha y = \frac{\mp a_\alpha^\mp y_{x_\alpha}^\mp - (\sigma_\alpha^\pm u + \nu_\alpha^\pm)}{0.5 h_\alpha^\mp} \text{ при } x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^\pm. \tag{64}$$

Рассмотрим, наконец, узлы $x \in \overset{*}{\gamma}_\alpha$. Введем весовые множители $\delta_\alpha = \delta_\alpha^\pm$ при $x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm$:

$$\begin{aligned} &\delta_\alpha^+ = \frac{s_\alpha^+ \hbar_\alpha}{H}, \quad 1 - \delta_\alpha^+ = \frac{\bar{s}_\alpha h_\alpha^-}{2H} \text{ при } x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^+, \quad s_\alpha^- > s_\alpha^+, \\ &\delta_\alpha^- = \frac{s_\alpha^- \hbar_\alpha}{H}, \quad 1 - \delta_\alpha^- = \frac{\bar{s}_\alpha h_\alpha^+}{2H} \text{ при } x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^-, \quad s_\alpha^- < s_\alpha^+ \end{aligned} \tag{65}$$

($\delta_\alpha^+ = \delta_\alpha^- = 1$ при $s_\alpha^+ = s_\alpha^-$). В узлах $x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm$ будем $L_\alpha u$ аппроксимировать суммой выражений (59), (64), взятых с весами δ_α и $1 - \delta_\alpha$ соответственно. Положим

$$\Lambda_\alpha y = \delta_\alpha^\pm (a_\alpha y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha} + (1 - \delta_\alpha^\pm)\left[\frac{\mp a_\alpha^\mp y_{x_\alpha}^\mp - (\sigma_\alpha^\pm y + \nu_\alpha^\pm)}{0.5 h_\alpha^\mp}\right]$$

при $x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm$. Учитывая (65), отсюда получаем

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{H}(s_\alpha^+ a_\alpha^+ y_{x_\alpha}^+ - s_\alpha^- a_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}^- - \bar{s}_\alpha(\sigma_\alpha^\pm y + \nu_\alpha^\pm)) \text{ при } x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm. \tag{66}$$

Поставим в соответствие оператору L_α разностный оператор Λ_α, определяемый по формулам (59), (64), (66). Определим теперь операторы $\tilde{\Lambda}_\alpha$, отвечающие оператору L_α и однородным краевым условиям (55):

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} (a_\alpha y_{x_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}, & x \in \overset{\circ}{\omega}_\alpha; \\ \dfrac{\mp a_\alpha^\mp y_{x_\alpha}^\mp - \sigma_\alpha^\pm y}{0.5 h_\alpha^\mp}, & x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^\pm; \\ \dfrac{1}{H}(s_\alpha^+ a_\alpha^+ y_{x_\alpha}^+ - s_\alpha^- a_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}^- - \bar{s}_\alpha \sigma_\alpha^\pm y), & x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm. \end{cases} \tag{67}$$

Введем также функцию

$$(68)\qquad \tilde{\varphi}_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x \in \overset{\circ}{\omega}_\alpha, \\ \varphi_\alpha - \dfrac{\nu_\alpha^\pm}{0.5h_\alpha^\mp}, & x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^\pm, \\ \varphi_\alpha - \dfrac{\bar{s}_\alpha \nu_\alpha^\pm}{H}, & x \in \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^\pm. \end{cases}$$

Сравнение (67), (68) и (59), (64), (66) показывает, что

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y + \tilde{\varphi}_\alpha \equiv \Lambda_\alpha y + \varphi_\alpha.$$

Введем в рассмотрение пространство $\mathscr{H}$ сеточных функций, определенных на сетке $\bar{\omega}$, со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{\bar{\omega}} yzH, \qquad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

(Здесь суммирование проводится по замкнутой области $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$.) Прямые вычисления позволяют установить, что операторы $\tilde{\Lambda}_\alpha$ в $\mathscr{H}$ являются самосопряженными и неположительными:

$$(69)\qquad (\tilde{\Lambda}_\alpha z, y) = (z, \tilde{\Lambda}_\alpha y), \qquad (\tilde{\Lambda}_\alpha y, y) \leqslant 0.$$

При $\sigma_\alpha^\pm \geqslant 0$, $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\alpha^- > 0$ операторы $\tilde{\Lambda}_\alpha$ являются отрицательно определенными. Введем также норму

$$\|y\|_{c,\,\bar{\Omega}} = \max_{(x,\,t)\in\bar{\Omega}} |y(x, t)|.$$

4. Разностная задача. Точность схемы

Поставим в соответствие исходной задаче (54)—(56) следующую разностную задачу:

$$(70)\qquad \begin{aligned} & y_0 \equiv y^j \quad \text{при } x \in \bar{\omega}; \\ & \frac{y_\alpha - y_{\alpha-1}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y_\alpha + \tilde{\varphi}_\alpha, \qquad x \in \bar{\omega}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p; \\ & y^{j+1} \equiv y_p, \qquad x \in \bar{\omega}, \qquad j = 0, 1, \ldots, j_0, \qquad y^0 = u_0(x), \qquad x \in \bar{\omega}, \end{aligned}$$

где $j_0 = T/\tau - 1$; $\tilde{\Lambda}_\alpha$, $\tilde{\varphi}_\alpha$ определяются по (67), (68).

Отметим, что на каждой цепочке $\bar{Ц}_\alpha$ уравнение (70) номера α в узлах $x \in \overset{\circ}{\gamma}_\alpha$ связывает значения искомой функции y_α в двух соседних узлах x и $x^{(-1\alpha)}$ (x и $x^{(+1\alpha)}$), если $x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^+$ ($x \in \overset{\circ}{\gamma}{}_\alpha^-$), а в узлах $Ц_\alpha$, принадлежащих множеству ω_α,— в трех соседних узлах $x^{(-1\alpha)}$, x, $x^{(+1\alpha)}$. На каждой цепочке $Ц_\alpha$ решение уравнения (70) находится методом прогонки. Уравнение (70) номера α следует решать на всех цепочках $\bar{Ц}_\alpha$, в том числе и на тех, узлы которых принадлежат границе Г. Так, при $p = 2$ в области, изображенной на фигуре, уравнение (70) при $\alpha = 1$ следует решать также и на цепочках узлов, принадлежащих отрезкам $[x_1, x_{10}]$, $[x_2, x_9]$, $[x_3, x_7]$, $[x_5, x_6]$, а при $\alpha = 2$ — на цепочках узлов, принадлежащих отрезкам $[x_1, x_3]$, $[x_2, x_4]$, $[x_{11}, x_6]$, $[x_{10}, x_9]$.

Используя теоремы 1—3 и априорные оценки n-го ранга, удается доказать равномерную сходимость локально одномерной схемы (70) на последовательности неравномерных сеток. Справедлива

Теорема 6. *Локально одномерная схема* (70) *сходится на последовательности неравномерных сеток при* $h \to 0$ *и* $\tau \to 0$ *к решению задачи* (54)—(56). *Справедливы оценки*

$$\|y - u\|_{c,\overline{\Omega}} \leqslant M\,[h^2 \ln (V_0/H_*) + \tau], \qquad \|y - u\| \leqslant M\,(h^2 + \tau).$$

При условии (51) *справедлива оценка*

$$\|y - u\|_{c,\overline{\Omega}} \leqslant M\,[h^2 \ln (D/h) + \tau].$$

Если $\sigma_\alpha^{\pm} \leqslant c_2 = \mathrm{const} < 0$, то оценки теоремы 6 имеют место лишь при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0(c_1, c_2)$. Справедливо также замечание к теоремам 4, 5.

Поступила в редакцию 3.09.1970

Цитированная литература

1. А. А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5, 787—811.
2. А. А. Самарский. Лекции по теории разностных схем. М., ВЦ АН СССР, 1969.
3. А. А. Самарский. Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 3, 431—466.
4. А. А. Самарский. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики. Apl. Mat., 1965, **10**, № 2, 146—164.
5. И. В. Фрязинов. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 6. 1106—1111.
6. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 431—465.
7. А. А. Самарский, И. В. Фрязинов. О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**, № 2, 385—410.