Некоторые вопросы общей теории разностных схем

А. А. Самарский

Одной из быстро развивающихся областей современной математики является теория разностных схем для решения дифференциальных уравнений математической физики. Разностные схемы широко применяются и в общей теории дифференциальных уравнений как аппарат для доказательства теорем существования решения и исследования его дифференциальных свойств. Однако в этом случае основной интерес представляют лишь асимптотические (при $h \to 0$) свойства разностных аппроксимаций.

Теория разностных схем имеет ряд своих специфических проблем.

С точки зрения вычислительной математики наиболее важным, в конечном счете, является отыскание алгорифмов, позволяющих получить решение дифференциального уравнения на электронновычислительной машине (ЭВМ) с заданной точностью за конечное число действий. При этом возникает вопрос о качестве алгорифма, т. е. о том, как зависит точность алгорифма от объема информации об исходной задаче и от объема вычислительной работы (от машинного времени, затрачиваемого на решение задачи с заданной точностью). Опыт вычислений на ЭВМ стимулировал постановку ряда специфических для теории разностных методов проблем: 1) выяснение достижимого порядка точности разностных схем для различных классов задач, 2) построение схем для решения широкого класса задач с некоторой гарантированной точностью, 3) построение схем, дающих повышенный порядок точности в более узких классах задач, 4) разработка методов исследования устойчивости и сходимости разностных схем, 5) формулировка общих принципов построения устойчивых разностных схем, экономящих объем вычислений (экономичных схем) и др.

В данной статье мы останавливаемся лишь на круге вопросов, связанных с такими фундаментальными понятиями теории разностных схем, как устойчивость и аппроксимация.

Основная задача статьи — показать, как результаты общей теории разностных схем могут быть использованы для формулировки принципов построения разностных схем заданного качества. Такой подход требует отказа от детального описания структуры разностных операторов для конкретных классов дифференциальных уравнений и изложения теории на языке функционального анализа. Разностные схемы, являющиеся аналогом нестационарных дифференциальных уравнений математической физики, при этом трактуются как разностные (по переменному t) уравнения с операторными коэффициентами, заданными в абстрактном пространстве (любого числа измерений). Разностные схемы для эллиптических уравнений трактуются как операторные уравнения первого рода. Следует, впрочем, подчеркнуть, что указанные понятия схем имеют значительно более широкое содержание.

В § 1 излагается общая теория устойчивости двухслойных и трехслойных операторно-разностных схем в гильбертовом пространстве. Изучение устойчивости разностных схем проводится вне связи с аппроксимацией для

семейств допустимых разностных схем. Здесь получены необходимые и достаточные условия устойчивости и соответствующие априорные оценки. Достаточные условия, выделяющие классы устойчивых схем, имеют вид удобных для проверки линейных операторных неравенств. Формулированы простые правила для проверки устойчивости схем конкретного вида. Для исследования устойчивости двухслойных схем применен метод более тонкий, чем энергетический метод.

Теория устойчивости используется для формулировки общего принципа регуляризации разностных схем с целью получения устойчивых схем заданного качества.

В § 2 теория итерационных методов для решения уравнения $Au = f$ где $A \in (H \to H)$ — линейный оператор в гильбертовом пространстве (Г. П.) H, трактуется как раздел общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Основное внимание уделяется получению эффективных оценок для скорости сходимости итераций и выбору оптимальных итерационных параметров. Рассмотрен класс неявных схем с факторизованным оператором B на верхнем слое вида $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$, где E — единичный оператор, $\omega > 0$ — параметр, R_1 и $R_2 = R_1^*$—сопряженные или «треугольные» (с треугольной матрицей) линейные операторы; формула для параметра ω получена из условия минимума числа итераций.

Получена оценка скорости сходимости для метода минимальных поправок в случае, когда A — несамосопряженный оператор и др.

В § 3 рассматривается метод суммарной аппроксимации как конструктивный метод построения экономичных разностных схем для многомерных уравнений математической физики. Введено понятие аддитивной схемы как системы операторно-разностных уравнений, аппроксимирующей исходное дифференциальное уравнение в суммарном смысле. Обсуждаются два (ранее предложенных автором) достаточно общих эвристических приема получения аддитивных экономичных схем. Для аддитивных схем потребовалась новая техника исследования сходимости и априорные оценки нового типа, учитывающие определение аппроксимации.

Отсутствие сравнительного анализа работ различных авторов (такой анализ потребовал бы существенного увеличения объема статьи) в некоторой мере компенсируется довольно подробным списком литературы.

Мы не имели возможности остановиться на работах по разностным методам прикладного характера, хотя такие работы лучше всего иллюстрируют возможности разностных методов и являются постоянным стимулом для постановки новых теоретических проблем.

§ 1. Общая теория устойчивости разностных схем

1. Основными априорными характеристиками разностной схемы является погрешность аппроксимации и устойчивость. Под погрешностью аппроксимации для схемы обычно понимают невязку, возникающую при подстановке в разностное уравнение решения дифференциального уравнения. Устойчивость разностной схемы определяется как свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных (от начальных и краевых данных, от правой части уравнения); в отличие от дифференциального уравнения эта зависимость должна быть равномерной относительно допустимых шагов сетки. Для линейной схемы устойчивость означает выполнение априорной оценки для решения разностной задачи через входные данные. В этом случае из устойчивости и аппроксимации следует сходимость разностной схемы, причем порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется порядком аппроксимации. Оценка порядка аппроксимации является, вообще говоря (см. § 3), сравнительно простой задачей, исследование устойчивости представляет значительные трудности и является центральной проблемой общей теории разностных схем.

Первое строгое определение понятия устойчивости разностных схем было дано В. С. Рябеньким и А. Ф. Филипповым [1—3]. В дальнейшем общие вопросы теории устойчивости рассматривались в работах [4—22].

Один из основных методов исследования устойчивости разностных схем состоит в применении преобразования Фурье к разностным уравнениям. Условия устойчивости при этом даются в виде ряда ограничений на спектр операторов схемы (или на спектр преобразования Фурье этих операторов). Сюда относятся, например, работы [4—15]. Подобный подход к изучению устойчивости имеет ряд особенностей: рассматривается, как правило, задача Коши, делается предположение о связи между шагами схемы по пространству и времени, часто завышаются требования на гладкость коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения. Многие критерии устойчивости (такие, например, как в работах [6, 10, 12, 13]) трудно использовать непосредственно при исследовании конкретных разностных схем.

В большинстве работ этого направления исследование устойчивости и сходимости проводится в пространстве решений дифференциального уравнения, что не соответствует действительному положению дел, так как фактически решение разностной задачи является сеточной функцией. Выяснению связи между устойчивостью, аппроксимацией и сходимостью в пространствах, отличных от исходного (в фактор-пространствах), посвящены работы [23 и 24].

В работах [19—21] спектральными методами получены необходимые условия устойчивости двухслойных разностных схем с краевыми условиями общего вида.

При исследовании устойчивости конкретных схем с успехом применяется энергетический метод, позволивший освободиться от детального изучения спектральных свойств операторов разностной схемы (см., например, [25] — [30]). Начало этому направлению положила известная работа Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [32]. Используются также разностные аналогии теорем вложения С. Л. Соболева [31].

2. Основной задачей теории устойчивости является получение достаточных условий устойчивости, удобных для проверки в случае конкретных схем. Эффективные достаточные условия устойчивости разностных схем с операторами, заданными в абстрактном гильбертовом пространстве, были получены в работах [34—36].

Перейдем к изложению некоторых результатов этой теории. Заметим, прежде всего, что устойчивость разностной схемы есть ее внутреннее свойство, не зависящее от аппроксимации того или иного дифференциального уравнения. Поэтому естественно изучение устойчивости проводить вне связи с аппроксимацией.

Разностные схемы (являющиеся аналогом нестационарных задач математической физики) мы определяем как разностные (по переменному t) уравнения с операторными коэффициентами, заданными на абстрактных гильбертовых пространствах H_h (являющихся аналогами пространств сеточных функций, зависящих от шага сетки h). Никаких предположений о структуре операторов схемы не делается. Исходное семейство схем определяется лишь требованиями положительности и, быть может, самосопряженности операторов схемы.

Ставится задача: выделить классы устойчивых схем, принадлежащих исходному семейству. Оказывается, что достаточные условия устойчивости (двухслойных и трехслойных) схем имеют вид линейных неравенств между операторами схемы и удобны для проверки.

К разностным схемам обычно предъявляют требования: 1) аппроксимации с определенным порядком исходного уравнения, 2) устойчивости, 3) минимума (в некотором условном смысле) числа арифметических действий, достаточного для нахождения решения разностной задачи с заданной точностью (экономичность схемы, в случае многомерных уравнений, например, параболического типа, означает, что для отыскания разностного решения доста-

точно числа действий, пропорционального числу использованных при этом узлов сетки). Сходимость схемы, как было отмечено выше, является следствием устойчивости и аппроксимации. Указанные требования конкурируют друг с другом и их одновременное удовлетворение является трудной задачей.

Имея классы устойчивых схем, естественно искать в этих классах схемы нужного качества. Это оказывается возможным, так как запись схем в канонической форме позволяет выделить операторы (регуляризаторы), ответственные за устойчивость. Используя произвол в выборе R, меняя R и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно строить схемы нужного качества. Общий метод регуляризации схем изложен в работе [34].

Таким образом, предлагаемая теория устойчивости разностных схем носит конструктивный характер.

Исследуется вопрос о минимальном запасе информации относительно операторов схемы, достаточном для суждения об устойчивости.

При изучении устойчивости применяются метод сведения неявной схемы к явной и оценки нормы оператора перехода явной схемы. Этот метод является более тонким, чем энергетический метод, и позволяет получить совпадающие необходимые и достаточные условия устойчивости в случае, когда один из операторов схемы является несамосопряженным.

Перейдем к изложению теории устойчивости для двухслойных схем [33—36].

3. Пусть $\{H_h\}$ множество вещественных гильбертовых пространств, зависящих от параметра h, являющегося вектором некоторого нормированного пространства, $|h| > 0$ — норма вектора h. На отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ введем равномерную (для простоты) сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau,\ k = 0, 1, \ldots, k_0,\ k_0\tau = t_0\}$ с шагом $\tau = t_0 / k_0$. Пусть $A_{h\tau}(t_k)$, $B_{h\tau}(t_k)$, $R_{h\tau}(t_k)$, $C_{h\tau}(t_k)$ и т. д.— линейные операторы, отображающие H_h на H_h при каждом значении параметра $t_k \in \overline{\omega}_\tau$; $\varphi_{h\tau}(t_k)$, $y_{h\tau}(t_k)$, $F_{h\tau}(t_k)$ и т. д.— абстрактные функции параметра $t_k \in \overline{\omega}_\tau$ со значениями в H_h; $y_{0,h\tau}$ и $y_{1,h\tau}$— произвольные векторы из H_h. Для упрощения записи зависимость операторов, функций и векторов от h и τ в дальнейшем, как правило, не будем указывать.

Назовем m-слойной разностной схемой разностное по $t = t_k$ уравнение $(m-1)$-го порядка с операторными коэффициентами

$$B(t)\,y(t+\tau) = \sum_{k=0}^{m-2} C_k(t)\,y(t-k\tau) + F(t), \qquad \text{где } t = s\tau \geqslant (m-2)\,\tau.$$

К этому уравнению следует присоединить $m-1$ начальное условие, т. е. задать векторы $y(0)$, $y(\tau), \ldots, y((m-2)\tau)$.

Мы будем здесь рассматривать только двухслойные ($m = 2$) и трехслойные схемы ($m = 3$). Важную роль для дальнейшего играет запись этих схем в канонической форме.

Двухслойная схема

$$B(t)\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} + A(t)\,y(t) = \varphi(t), \qquad 0 \leqslant t = k\tau < t_0, \qquad y(0) = y_0 \in H_h. \tag{1}$$

Трехслойная схема

$$\left.\begin{aligned} &B(t)\frac{y(t+\tau) - y(t-\tau)}{2\tau} + \tau^2 R(t)\frac{y(t+\tau) - 2y(t) + y(t-\tau)}{\tau^2} + \\ &\qquad + A(t)\,y(t) = \varphi(t) \\ &\text{при } 0 < t = k\tau < t_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad y(\tau) = y_1, \qquad y_0,\ y_1 \in H_h. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Схемы (1) и (2) являются разностными аналогами абстрактных задач Коши для уравнений первого и второго порядков

$$\mathcal{B}\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \qquad u(0) = u_0,$$

$$\mathcal{B}\frac{du}{dt} + \mathcal{R}\frac{d^2u}{dt^2} + \mathcal{A}u = f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \qquad u(0) = u_0, \qquad \frac{du}{dt}(0) = u_1.$$

Чтобы учесть случай положительных и несамосопряженных операторов B в (1) и (2) мы рассматриваем здесь вещественное гильбертово пространство H. Аналогичная теория устойчивости для схем в комплексном гильбертовом пространстве $\tilde{H}$ развита в работе [37].

4. Меняя h и τ, получаем множество $\{y_{h\tau}(t)\}$ решений задач (1) и (2). Устойчивость для схем (1) и (2) определяется как свойство равномерной по (h, τ) непрерывности $\{y_{h\tau}(t)\}$ относительно входных данных $\{\varphi_{h\tau}(0)\}$, $\{y_{h\tau}(0)\}$ (и $\{y_{h\tau}(\tau)\}$ в случае (2)). Будем предполагать, что схемы (1) и (2) разрешимы при любых входных данных, т. е. существуют обратные операторы B_k^{-1} для (1) и $(B_k + 2\tau R_k)^{-1}$ для схемы (2). Дадим определение устойчивости двухслойной схемы (1). Решение задачи (1) есть сумма решений задач

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A_k y_k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad k_0 - 1, \qquad y_0 \in H_h, \tag{1а}$$

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A_k y_k = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad k_0 - 1, \qquad y_0 = 0. \tag{1б}$$

Пусть H_h — любое линейное нормированное пространство. Будем говорить (см. работу [36]), что *схема (1) устойчива по начальным данным* в норме $\|\cdot\|_{(1_h, k)}$, если существует постоянная c_0, не зависящая от выбора τ, h и y_0, такая, что при любом $y_0 \in H_h$ для решения задачи (1а) выполняется неравенство

$$\|y_k\|_{(1_h, k)} \leqslant \rho^k \|y_0\|_{(1_h, 0)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3а}$$

где $\rho = e^{c_0\tau}$, $\|\cdot\|_{(1_h, k)}$ некоторая норма в H_h, зависящая, быть может, от k.

Схема (1) устойчива по правой части, если существует такая постоянная $M_2 = \text{const} > 0$, не зависящая от h, τ и φ_k, что при всех $\varphi_k \in H_h$ для решения задачи (1б) имеет место априорная оценка

$$\|y_k\|_{(1_h, k)} \leqslant M_2 \max_{0 \leqslant j < k} \|\varphi_j\|_{(2_h, j)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3б}$$

где $\|\cdot\|_{(2_h, j)}$ некоторая норма в H_h, зависящая от j.

Обычно требуется, чтобы схема была устойчивой при достаточно малых $\tau \leqslant \tau_0$, $|h| \leqslant h_0$, где τ_0 и h_0 — постоянные, не зависящие ни от k, ни от входных данных. Схему (1) называют условно устойчивой, если она устойчива при некотором соотношении между τ и h. Если же схема (1) устойчива при любых $\tau > 0$ и $|h| > 0$ ($h_0 = \infty$, $\tau_0 = \infty$), то ее называют абсолютно устойчивой.

Данные выше определения устойчивости не предполагают, что H_h — Г. П.

Схему (1а) часто записывают в виде $y_{k+1} = S_k y_k$, где $S_k = E - \tau B_k^{-1} A_k$, где S_k — оператор перехода со слоя k на слой $k + 1$. Отсюда следует, что

$$y_k = T_k y_0, \qquad T_k = S_{k-1} S_{k-2} \ldots S_1 S_0,$$

где T_k — разрешающий оператор, так что

$$\|y_k\|_{(1_h, k)} \leqslant \|T_k\| \, \|y_0\|_{(1_h, 0)}.$$

Схема (1а) устойчива, если

$$\|T_k\| \leqslant \rho^k = e^{c_0 \tau k} < e^{c_0 t_0} = M_1 \qquad \text{при } c_0 \geqslant 0.$$

Таким образом устойчивость схемы (1а) означает ограниченность ее разрешающего оператора.

Основной вопрос состоит в следующем: *какими свойствами должны обладать операторы A_k и B_k, чтобы схема (1) была устойчива?* Ответ на этот вопрос удается получить в случае, когда H_h — Г. П.

5. Наряду с основным Г. П. H_h будем рассматривать энергетические пространства H_D, состоящие из тех же векторов, что и H_h, имеющие скаляр-

ные произведения $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормы $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$, где $D = D^* > 0$ самосопряженный положительный оператор в H_h ($D > 0$ означает, что $(Dx, x) > 0$ при всех $x \neq 0$ из H_h). Оператор D может зависеть от t_k: $D = D_k = D(t_k)$.

Будем говорить, что схема (1а):

1) устойчива в H_D, если выполнено (3а) с $\|\cdot\|_{(1_{h,k})} = \|\cdot\|_{(1_h,0)} = \|\cdot\|_D$, т. е.

$$\|y_k\|_D \leqslant \rho^k \|y_0\|_D, \quad \rho = e^{c_0\tau} \qquad (D \text{ не зависит от } t_k);$$

2) устойчива в H_{D_k}, если

$$\|y_{k+1}\|_{D_h} \leqslant \rho^{k+1} \|y_0\|_D \qquad (D \text{ зависит от } t_k).$$

В случае двухслойных схем естественными являются нормы $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$ ($D = A$ или $D = B$). Будем писать $B \geqslant \gamma A$, если $(Bx, x) \geqslant \gamma (Ax, x)$ для всех $x \in H_h$, где γ — постоянная.

6. Исходное семейство схем (1) зададим условиями

$$B_k > 0, \qquad A_k = A_k^* \text{ для всех } k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1,$$

т. е. B_k — несамосопряженный оператор. Рассмотрим сначала случай схем с постоянными, т. е. не зависящими от k (от t_k) операторами A и B:

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1, \; y_0 \in H_h. \qquad (1а^*)$$

В дальнейшем всюду предполагается, что схема принадлежит исходному семейству, т. е. $B > 0$, $A = A^*$.

Теорема 1. *Пусть $A > 0$. Тогда условие*

$$B \geqslant \frac{1}{2}\tau A \qquad (4)$$

необходимо и достаточно для устойчивости с $\rho = 1$ ($c_0 = 0$) в H_A схемы (1а*), *т. е. для выполнения оценки*

$$\|y_k\|_A \leqslant \|y_0\|_A.$$

Теорема 2. *Пусть $B = B^* > 0$. Тогда условия*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leqslant A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B \qquad (5)$$

при любом $\rho > 0$ необходимы и достаточны для устойчивости схемы в H_B, а при $A > 0$ — необходимы и достаточны для устойчивости в H_A.

Замечание 1. Если $A > 0$ и $\rho \geqslant 1$, то условие (5) эквивалентно неравенству

$$B \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A. \qquad (5^*)$$

В частности, при $\rho = 1$ получаем $B \geqslant (1/2)\,\tau A$.

Замечание 2. Перестановочность операторов A и B нигде не предполагается.

Если A и B перестановочны, то условия (5) необходимы и достаточны для устойчивости в H_h, H_{A^2}, H_{B^2} и т. д.

7. Пусть $A_k = A(t_k)$ и $B_k = B(t_k)$ — переменные операторы. Будем говорить, что $A_k > 0$ липшиц-непрерывен по t_k, если

$$|((A_k - A_{k-1})x, x)| \leqslant c_1\tau(A_{k-1}x, x) \quad \text{для всех } x \in H_h \text{ и } k = 1, 2, \ldots,$$

где $c_1 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h.

Теорема 3. *Пусть $A_k > 0$ и A_k липшиц-непрерывен по t_k. Тогда условие*

$$B_k \geqslant \frac{\tau}{1+\rho} A_k, \quad \rho = e^{c_0\tau} \qquad \text{для всех } k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$$

с $c_0 \geqslant 0$ достаточно для устойчивости схемы (1а) *в H_{A_k} с $\bar{c}_0 = c_0 + 0{,}5\, c_1$:*

$$\|y_{k+1}\|_{A_k} \leqslant \bar{\rho}^k \|y_0\|_{A_0}, \quad \bar{\rho} = e^{\bar{c}_0\tau}.$$

Теорема 4. *Пусть $B_k = B_k^*$ и $B_k = B(t_k)$ липшиц-непрерывен по t_k. Тогда условие*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B_k \leqslant A_k \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B_k \qquad \text{для всех } k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$$

с $c_0 \geqslant 0$ достаточно для устойчивости с постоянной $\bar{c}_0 = c_0 + 0{,}5\, c_1$ в H_{B_k}, т. е. для выполнения оценки

$$\|y_{k+1}\|_{B_k} \leqslant \bar{\rho}^k \|y_0\|_{B_0}, \qquad \bar{\rho} = e^{\bar{c}_0\tau}.$$

Запишем схему (1) в виде

$$(E + \tau R_k)\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A_k y = \varphi_k, \qquad B_k = E + \tau R_k, \tag{6}$$

где E — единичный оператор.

Тогда условие $B_k \geqslant {}^1/_2(\tau A_k)$ будет выполнено, если

$$R_k \geqslant \sigma_0^{(k)} A_k, \qquad \sigma_0^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A_k\|}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Индекс k в условиях устойчивости в дальнейшем опускаем. Из (7) следует, что условие $R \geqslant {}^1/_2\, A$ также достаточно для устойчивости схемы (1).

Пример 1. Рассмотрим схему с весами

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A(\sigma y_{k+1} + (1-\sigma) y_k) = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1, \ y_0 \in H_h, \tag{8}$$

где σ — параметр (весовой множитель), $A = A(t_k) > 0$. Приводя схему (8) к каноническому виду (1) или (6), найдем $B = E + \sigma\tau A$ или $R = \sigma A$. Если $A = A^*$ и справедлива оценка (5), то, в силу (7) и теоремы 4, схема (8) при $\varphi_k = 0$ устойчива для $\sigma \geqslant \sigma_0^{(k)}$. Если $A(t_k) > 0$ — несамосопряженный оператор, то сначала применим к (8) оператор $A^{-1} > 0$ и затем приведем к каноническому виду (1а) с $\tilde{B} = A^{-1} + \sigma\tau E$, $\tilde{A} = E$ и воспользуемся теоремой 1, из которой следует, что схема (8) при $\varphi_k = 0$ устойчива в H_h с $\rho = 1$ для $\sigma \geqslant 0{,}5$ и при любом несамосопряженном операторе $A(t) > 0$.

8. Условия (4), (5) и (5*) достаточны для устойчивости схемы (1) по правой части в соответствующих нормах. Так, имеет место оценка (3б) с $\|y\|_{(1)} = \|y\|_B = \sqrt{(By, y)}$, $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{B^{-1}} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)}$ при (7) или с $\|y\|_{(1)} = \|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$, $\|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(AB^{-1}\varphi, B^{-1}\varphi)}$ при (5*). Для теории разностных схем важны оценки решения задачи в H_A или H_B через правую часть, взятую в возможно более слабой норме. Такими нормами являются $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{A^{-1}}$ в $H_{A^{-1}}$ или негативная норма $\|\varphi\|_{(2)} = \sup\,[|(\varphi, x)| / \|x\|_A]$ (норма функционала), аналог которой широко применяется в общей теории дифференциальных уравнений. Например, верна

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 4, то для решения задачи* (1б) *верна оценка*

$$\|y_{k+1}\|_{A_k} \leqslant M_2 \max_{0<j\leqslant k} \left[\|\varphi_j\|_{A_j^{-1}} + \left\|\frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\tau}\right\|_{A_j^{-1}}\right]. \tag{9}$$

Если же $R \geqslant \frac{1}{2}A$, то схема (1б) *устойчива в H_{A_k} и верна оценка* (3б) *с $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$, $\|y\|_{(1} = \|y\|_A$.*

Отметим, что для схемы с весами (8) при $y_0 = 0$, $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ и $A(t) = A^*(t) > 0$ верна оценка (3б), в которой

$$\|\cdot\|_{(1_h,\,k)} = \|\cdot\|_{(1_h,\,0)} = \|\cdot\|,\quad \|\cdot\|_{(2_h,\,k)} = \|\cdot\|_{A_k^{-1}}.$$

9. Рассмотрим теперь *трехслойные схемы* (2). Будем предполагать, что $B(t)$ несамосопряженный оператор, $R(t) = R^*(t) > 0$, $A(t) = A^*(t) > 0$. Эти условия определяют исходное семейство схем.

Устойчивость схемы (2) по начальным данным выражается неравенством (3а). Однако под нормой $\|y_{k+1}\|_{(1_h,k)}$ следует понимать функционал, зависящий от y_k и y_{k+1} и равный при $\rho = 1$:

$$\|Y_{k+1}\|^2_{(1_h,\,k)} = \frac{1}{4}(A_k(y_{k+1} + y_k),\ y_{k+1} + y_k) + \\ + \left(\left(R_k - \frac{1}{4}A_k\right)(y_{k+1} - y_k),\ y_{k+1} - y_k\right). \tag{10}$$

(Выражения для нормы при $\rho \neq 1$ см. в [38].)

Приведем одну из теорем об устойчивости схемы (2).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия: A и R — постоянные операторы, $B \geqslant 0$,*

$$R > \frac{1}{4}A. \tag{11}$$

Тогда схема (2) устойчива по начальным данным с $\rho = 1$, так что для решения задачи (2) при $\varphi = 0$ верна априорная оценка

$$\|Y_k\|_{(1_h)} \leqslant \|Y_1\|_{(1_h)}, \tag{12}$$

где $\|Y_k\|$ определяется по формуле (10). При этих же условиях для решения задачи (2) с $\varphi \neq 0$ верна оценка

$$\|Y_{k+1}\|_{(1_h)} \leqslant \|Y_1\|_{(1_h)} + M_2 \max_{0<j\leqslant k}\left[\|\varphi_j\|_{A^{-1}} + \left\|\frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\tau}\right\|_{A^{-1}}\right], \tag{13}$$

где M_2 не зависит от $|h|$ и τ.

Замечание 3. Если $B \geqslant \delta E$, $\delta > 0$, $R > {}^1/_4 A$, то вместо (13) верна оценка

$$\|Y_{k+1}\|_{(1_h)} \leqslant \|Y_1\|_{(1_h)} + M_2 \max_{0<j\leqslant k}\|\varphi_j\|. \tag{14}$$

Рассмотрим трехслойную схему во второй канонической форме

$$(E + \tau^2 R)\,\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\tau^2} + B\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + Ay_k = \varphi_k. \tag{2*}$$

Она получается из (2) формальной заменой $\tau^2 R$ на $E + \tau^2 R$. Условие $R > {}^1/_4 A$ достаточно для устойчивости схемы (2*) с $\rho = 1$ в норме $\|Y\|_{(1^*)}$, где

$$\|Y\|^2_{(1^*)} = \|Y_{k+1}\|^2_{(1)} + \left\|\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau}\right\|^2 \quad \text{при } \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|. \tag{15}$$

Пример 2. Рассмотрим трехслойную схему с весами

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + A(\sigma_1 y_{k+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y_k + \sigma_2 y_{k-1}) = 0, \tag{16}$$

где $A > 0$. Применим A^{-1} к схеме (16) и приведем полученное уравнение к каноническому виду (2) с операторами $\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E$, $\tilde{R} = {}^1/_2 \times (\sigma_1 + \sigma_2)E$, $\tilde{A} = E$. Так как $\tilde{R}$ и $\tilde{A}$ — самосопряженные постоянные операторы,

то из замечания 3 следует, что схема (16) устойчива при любом несамосопряженном $A = A(t) > 0$, если

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Схема с весами

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\tau^2} + A\,(\sigma_1 y_{k+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\,y_k + \sigma_2 y_{k-1}) = 0, \qquad (17)$$

где $A = A^* > 0$ приводится к каноническому виду (2*) с операторами

$$R = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A, \qquad B = (\sigma_1 - \sigma_2)\,\tau A.$$

Условия $R + \frac{E}{\tau^2} > {}^1/_4\, A$, $B \geqslant 0$ выполнены при $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geqslant {}^1/_2$.

10. Из предыдущего следуют простые правила для проверки устойчивости конкретных схем: 1) разностная схема приводится к каноническому виду (1) или (2) и тем самым находятся операторы B, A или B, R, A, 2) вводится пространство H_h сеточных функций (зависящее от структуры операторов схемы) и исследуются основные свойства (положительность, самосопряженность и др.) операторов схемы как линейных операторов на H_h, 3) проверяется выполнение достаточных условий устойчивости, указанных выше, 4) если достаточные условия выполнены, то данная схема принадлежит классу устойчивых схем и можно воспользоваться априорными оценками, полученными для двухслойных и трехслойных схем общего вида.

Устойчивость многослойных схем рассматривалась А. В. Гулиным [38]. Здесь показано в частности, что достаточные условия устойчивости трехслойных схем, полученные в работе [35], являются и необходимыми в случае постоянных операторов. Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости

$$\| Y_{n+1} \|_{(1_\rho)} \leqslant \rho^n \| Y_1 \|_{(1_\rho)}, \qquad \rho = e^{c_0 \tau},$$

где $\| \cdot \|_{(1_\rho)}$ — аналог нормы (10), зависящий от ρ. Эти условия имеют вид линейных операторных неравенств, связывающих не только A и R, но и B при $\rho \neq 1$.

11. Изложенная выше теория устойчивости носит конструктивный характер и может быть использована не только для исследования устойчивости конкретных схем, но и для построения новых схем заданного качества. Эта возможность связана с тем, что 1) запись схем в канонической форме (1) с $B = E + \tau R$ (см. (6) или (2), (2*)) позволяет выделить операторы R (регуляризаторы), ответственные за устойчивость, 2) достаточные условия устойчивости: $R \geqslant \sigma_0 A$ или $R \geqslant {}^1/_2\, A$ для двухслойных схем, $R > {}^1/_4\, A$ для трехслойных схем, накладывают слабые ограничения на произвол в выборе регуляризаторов R.

Если данная схема (1) неустойчива, то, меняя лишь оператор R, всегда можно заменить ее устойчивой схемой с тем же оператором A.

Имея классы устойчивых схем, естественно искать в этих классах схемы нужного качества, удовлетворяющие дополнительным требованиям: 1) аппроксимации определенного порядка, 2) экономичности схемы. Требование экономичности применительно к нестационарным задачам математической физики обычно означает, что число арифметических действий при решении разностной задачи должно быть пропорционально числу используемых узлов сетки.

Основная идея метода регуляризации состоит в переходе от некоторой исходной (например, явной) схемы путем изменения оператора R (а, может быть, и операторов A, B) к некоторой другой схеме нужного качества.

Так как условия устойчивости имеют вид энергетических неравенств $(Rx, x) \geqslant \sigma_0 (Ax, x)$ для (6) или $(Rx, x) > {}^1/_4\, (Ax, x)$ для (2), то естественно выбирать в качестве R операторы возможно более простой структуры, энергети-

чески эквивалентные (полусходные (см. работу [39]), эквивалентные по спектру (см. [50])) оператору A. Пусть A и A_0 энергетически эквивалентны, т. е.

$$\gamma_1 A_0 \leqslant A \leqslant \gamma_2 A_0, \quad \gamma_2 > \gamma_1 > 0. \tag{18}$$

Выбирая $R = \sigma A_0$, получим устойчивую схему (6) при $\sigma \geqslant \sigma_0 \gamma_2$ или устойчивую схему (2) при $\sigma > {}^1/_4 \gamma_2$.

Следует отметить, что энергетически эквивалентные операторы в той или иной форме применяются в теории приближенных методов решения дифференциальных уравнений и систем алгебраических уравнений (см., например, работы [49—53]).

Укажем некоторые примеры выбора регуляризатора R:

1) $R = \sigma E$, где E — единичный оператор, $\sigma \geqslant \sigma_0 \|A\|$ для (6) и $\sigma > {}^1/_4 \|A\|$ для (2);

2) $R = \sigma A_1$ или $R = \sigma A_2$, где A_1 и $A_2 = A_1^*$ — сопряженные («треугольные») операторы, $A_0 = A_1 + A_2$,

$$\sigma \geqslant \left(1 - \frac{2}{\tau \|A\|}\right) \gamma_2 \text{ для (6)}; \qquad \sigma > \frac{1}{2} \gamma_2 \text{ для (2)};$$

3) R выбирается так, что $\widetilde{B} = E + \tau \widetilde{R}$ для (1) и $\widetilde{B} + 2\tau \widetilde{R}$ для (2) — факторизованные операторы (Ф. О.), представимые в виде произведения конечного числа операторов более простой структуры

$$\widetilde{B} = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau R_\alpha) \text{ для (1) и } \widetilde{B} + 2\tau \widetilde{R} = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau R_\alpha) \text{ для (2)}.$$

Такие схемы будем называть факторизованными схемами (Ф. С.) Рассмотрим частные случаи:

а) R_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ — положительные, самосопряженные и попарно перестановочные операторы; Ф. С. (1) устойчива, например, при условии

$$R_0 = \sum_{\alpha=1}^{p} R_\alpha \geqslant \frac{1}{2} A;$$

в самом деле, если схема (1) с $B = E + \tau R_0$ устойчива, то устойчива и Ф. С. с $\widetilde{B} = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau R)$, так как $\widetilde{B} > B$;

б) $p = 2$, $R = R_1 + R_2$, $R_2 = R_1^*$; Ф. С. устойчива при $R \geqslant {}^1/_2 A$.

Применявшиеся на практике приемы получения устойчивых схем для конкретных задач можно трактовать как простейшие примеры регуляризации. Так, явная схема Дюфорта и Франкела [40] для уравнения теплопроводности принадлежит классу устойчивых схем (2) с $B = E$, $R = \sigma E$, $\sigma > {}^1/_4 \|A\|$; асимметричные схемы В. К. Саульева [41] принадлежат классу устойчивых схем (6) с $R = \sigma A_1$ или $R = \sigma A_2$, $A_1^* = A_2$, $A_1 + A_2 = A$. Эти схемы получены из явных схем при помощи преобразований, которые соответствуют введению простейших регуляризаторов (единичного или треугольного операторов). Экономичные методы переменных направлений (схемы с расщепляющимся оператором по терминологии [42]; литературу см. [42—48]) основаны на использовании Ф. С. с R_α перестановочными или «почти перестановочными» (в случае уравнений с переменными коэффициентами) разностными операторами попарно, которые соответствуют эллиптическим операторам, содержащим производные только по одному переменному x_α («одномерные» операторы).

Общий принцип регуляризации позволяет получить новые абсолютно устойчивые экономичные Ф. С. для основных уравнений математической физики с переменными коэффициентами [34]. Для этого в качестве регуляризаторов R выбираются разностные эллиптические операторы с постоянными коэффициентами. Так, например, в случае системы параболических уравнений со смешанными производными в p-мерном параллелепипеде в качестве R выбирается разностный эллиптический оператор с диагональной клеточ-

ной матрицей, клетки которой также являются диагональными матрицами. После этого строится двухслойная или трехслойная Ф. С. Решение разностных уравнений сводится к последовательному применению стандартного алгоритма трехточечной (в случае уравнений второго порядка) прогонки.

Особенно большие возможности для регуляризации дает использование трехслойных схем, так как в этом случае удается сохранить второй порядок точности по τ (при R стоит множитель τ^2). В случае двух измерений получены абсолютно устойчивые Ф. С. для параболических уравнений с разрывными коэффициентами точности $O(\tau^2 + h^2)$, когда линии разрывов параллельны осям координат. Отметим, что регуляризация трехслойных схем проводится, вообще говоря, путем изменения не только оператора R, но и оператора B (это, например, имеет место при некоторых способах факторизации оператора $B + 2\tau R$).

Каждому оператору A можно поставить в соответствие большое число операторов более простой структуры, которые можно использовать в качестве регуляризаторов для двухслойных и трехслойных схем. Составление каталога регуляризаторов и выбор наилучших регуляризаторов — важная задача теории разностных схем. Для различных эллиптических операторов можно использовать один и тот же регуляризатор R. Это делает возможным создание стандартных программ для решения классов задач. При этом алгоритм для определения решения на новом слое не меняется, а конкретный вид оператора A задачи учитывается при вычислении правой части.

12. До сих пор мы рассматривали устойчивость схем (1) и (2) относительно правых частей и начальных данных. В случае реального вычислительного алгоритма для решения задачи (1) (или (2)) из-за ошибок округления фактически находится точное решение не уравнения (1), а уравнения с возмущенными операторами $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}$ и $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{y_0}$. Поэтому понятие устойчивости должно быть расширено. Под устойчивостью реальной схемы, очевидно, следует понимать не только непрерывную зависимость решения от φ и y_0, но и непрерывную зависимость от $\|\widetilde{B} - B\|$ и $\|\widetilde{A} - A\|$. Метод оценки нормы оператора перехода эквивалентной явной схемы, применявшийся нами выше, в сочетании с энергетическим методом позволяет получить априорные оценки, выражающие (равномерную по h, τ) устойчивость (коэффициентную устойчивость) решения задачи (1) относительно операторов схемы (1). При этом выяснилось, что схема должна иметь некоторый «запас устойчивости». В частности, для схемы (1) коэффициентная устойчивость имеет место при $R \geqslant {}^1/_2 A$.

§ 2. Итерационные схемы

1. Теория итерационных методов для решения уравнения

$$Au = f, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, заданный на вещественном Г. П. H, является частью общей теории устойчивости разностных схем.

Итерационные схемы записываются в той же канонической форме, что и разностные схемы для эволюционных уравнений.

Двухслойная (одношаговая) итерационная схема имеет вид

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad y_0 \in H_h, \tag{2}$$

где k — номер итерации, y_k — итерация номера k, $\tau_{k+1} > 0$ — параметр, B_k — произвольный оператор, имеющий обратный B_k^{-1}. Если $B_k = E$, то схема (2) явная, при $B_k \neq E$ — неявная. Так как решение u уравнения (1) удовлетворяет (2), то для погрешности $z_k = y_k - u$ имеем однородное уравнение

$$B_k \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad z_0 = y_0 - u. \tag{3}$$

Оценка скорости сходимости итераций по схеме (2) сводится к получению априорных оценок, выражающих устойчивость схемы (3) по начальным данным.

Исходное семейство схем (2) задаем условиями

$$A = A^* > 0, \quad B_k = B_k^* > 0.$$

Неявная схема (3) эквивалентна явной схеме

$$x_{k+1} = S_{k+1}x_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}C_k, \qquad C_k = A^{\frac{1}{2}} B_k^{-1} A^{\frac{1}{2}},$$

$$x_k = A^{\frac{1}{2}} z_k, \tag{4}$$

где S_{k+1} — оператор перехода для явной схемы. Отсюда

$$x_n = T_n x_0, \qquad T_n = S_n S_{n-1} \ldots S_1; \tag{5}$$

$$\|x_n\| \leqslant \|T_n\| \|x_0\|, \qquad \|x_k\| = \|z_k\|_A,$$

где T_n — разрешающий оператор явной схемы (4). Таким образом

$$\|x_n\| \leqslant q_n \|x_0\|, \qquad \|z_n\|_A \leqslant q_n \|z_0\|_A, \qquad \text{если } \|T_n\| \leqslant q_n. \tag{6}$$

Итерации сходятся в H_A, если $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. Норма оператора T_n зависит от B_k и τ_{k+1}, которые следует выбирать из решения задачи о нахождении $\inf \|T_n\|$ или $\inf q_n$. Основная задача теории итерационных схем (2) сводится к оценке нормы разрешающего оператора эквивалентной явной схемы и выбору итерационных параметров $\{\tau_{k+1}\}$ и операторов $\{B_k\}$ из условия минимума этой нормы.

В теории итерационных методов используются лишь границы операторов или постоянные эквивалентности операторов схемы. Все результаты, полученные спектральными методами, естественно получаются путем оценки нормы разрешающего оператора с использованием определения нормы операторной функции. Конечномерность пространства H_h при этом нигде не используется

2. В случае «стационарных» схем с постоянными

$$B_{k+1} = B \text{ и } \tau_{k+1} = \tau:$$

$$B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad z_0 = y_0 - u \in H_h, \tag{7}$$

оператор перехода $S = E - \tau C$ постоянен, $T_n = S^n$ и задача о нахождении $\inf \|T_n\|$ сводится к задаче о минимуме нормы оператора перехода S. Решение этой задачи известно [60]: если γ_1, γ_2 — границы оператора C

$$\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E, \qquad \gamma_2 \geqslant \gamma_1 > 0, \tag{8}$$

то $\inf \|S\|$ достигается при $\tau = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ и равен:

$$\inf_{\tau > 0} \|S\| = \|E - \tau_0 C\| = \rho_0, \qquad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \ \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \qquad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{9}$$

При этом для схемы (7) верна оценка

$$\|z_n\|_D \leqslant \rho_0^n \|z_0\|_D, \qquad D = A \text{ или } D = B, \tag{10}$$

если

$$\gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B, \tag{11}$$

так как условия (8) и (11) эквивалентны при $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ или $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ (см. работу [36]).

Метод сведения неявной схемы (7) к явной позволяет доказать вычислительную устойчивость схемы (2) с $\tau = \tau_0$. От выбора оператора B зависит

не только число действий для вычисления одной итерации, но и число итераций $n_0(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность итераций. Поэтому естественно выбирать B в некотором допустимом семействе операторов так, чтобы 1) отношение $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ было максимальным (ρ_0 минимальным), 2) B был экономичным оператором (число операций Q, необходимое для решения уравнения $By = \varphi$ с любым $\varphi \in H$, было бы минимальным в некотором смысле, например, по порядку относительно ξ при $\xi \to 0$).

При построении B обычно исходят из некоторого оператора $R = R^*$ (см. работу [39], [49—53]), энергетически эквивалентного с A и B:

$$c_1 R \leqslant A \leqslant c_2 R, \qquad c_2 \geqslant c_1 > 0, \tag{12}$$

$$\dot{\gamma}_1 B \leqslant R \leqslant \dot{\gamma}_2 B, \qquad \dot{\gamma}_2 > \dot{\gamma}_1 > 0. \tag{13}$$

Тогда справедливы неравенства (11) с $\gamma_1 = c_1 \mathring{\gamma}_1^0$, $\gamma_2 = c_2 \mathring{\gamma}_2^0$. Представим R в виде суммы $R = R_1 + R_2$, где R_1 и $R_2 = R_1^*$ — сопряженные («треугольные» операторы) и рассмотрим факторизованный оператор

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad B = B^* > 0, \tag{14}$$

где $\omega > 0$ — параметр. Числа $\mathring{\gamma}_1^0$ и $\mathring{\gamma}_2^0$ в этом случае зависят от параметра ω, который следует выбирать так, чтобы отношение $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{c_1}{c_2}\frac{\mathring{\gamma}_1}{\mathring{\gamma}_2}$ или, что то же (так как c_1 и c_2 не зависят от ω), отношение $\mathring{\gamma}_1/\mathring{\gamma}_2 = f(\omega)$ было максимальным [49]. Справедлива

Теорема 7.

Пусть $R_2 = R_1^*$, $R = R_1 + R_2$ *и*

$$R \geqslant \delta E; \ \|R_2 x\|^2 \geqslant \frac{1}{4}\Delta(Rx, x), \qquad \Delta \geqslant \delta > 0. \tag{15}$$

Тогда справедливы формулы

$$\mathring{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\eta})}, \qquad \mathring{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \qquad \frac{\mathring{\gamma}_1}{\mathring{\gamma}_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \qquad \eta = \frac{\delta}{\Delta}$$

$$\text{при } \omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}. \tag{16}$$

Зная $\mathring{\gamma}_1, \mathring{\gamma}_2$, находим $\gamma_1 = c_1\mathring{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2\mathring{\gamma}_2$ и $\tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Для числа итераций $n_0(\varepsilon)$ при $\eta \to 0$ верна оценка

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

На практике часто применяют Ф. О. вида

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2), \tag{17}$$

где R_1 и R_2 — самосопряженные, перестановочные операторы. Оптимальный выбор параметров ω_1 и ω_2 из условия максимума $\mathring{\gamma}_1/\mathring{\gamma}_2$ в этом случае не представляет труда.

3. Рассмотрим теперь итерационные схемы (2) для уравнения (1) в случае, когда $A > 0$ — несамосопряженный оператор,

$$B = B^* > 0. \tag{18}$$

Уравнение для погрешности $z_k = y_k - u$ эквивалентно явной схеме

$$x_{k+1} = Sx_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, S = E - \tau C, \qquad x_0 \in H_h, \tag{19}$$

где $C = B^{-1/2} A B^{-1/2}$, $x_k = B^{1/2} z_k$, так что $\|x_k\| = \|z_k\|_B$. Имея в виду эту связь между явной схемой (19) и неявной схемой (7) для z_k, можно ограничиться изучением явной схемы (19).

Пусть выполнены условия

$$C \geqslant \gamma_1 E,\ C^{-1} \geqslant \frac{1}{\gamma_2} E \text{ или } \|Cx\|^2 \leqslant \gamma_2 (Cx, x) \text{ для всех } x \in H_h. \tag{20}$$
$$(\gamma_2 > \gamma_1 > 0).$$

Тогда для нормы оператора перехода верна оценка

$$\|S\| \leqslant \sqrt{1-\xi}, \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ при } \tau = \frac{1}{\gamma_2}. \tag{21}$$

Эта оценка является грубой, в чем можно убедиться на примере схемы (7) с $B = E + \omega A$, $\tau = 2\omega$. Пусть

$$A \geqslant \delta E, \qquad \|Ax\|^2 \leqslant \Delta (Ax, x), \qquad \Delta \geqslant \delta > 0. \tag{22}$$

В работе [49] была получена оценка $\|S\| \leqslant \sqrt{\frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}}$, $\eta = \frac{\delta}{\Delta}$, в то время как формула (21) дает

$$\|S\| \leqslant \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

Для улучшения оценки надо, следуя работе [51], выделить симметричную и кососимметричную части оператора C:

$$C = C_0 + C_1, \qquad C_0 = \frac{1}{2}(C + C^*), \qquad C_1 = \frac{1}{2}(C - C^*).$$

Теорема 8.

Пусть выполнены условия

$$\gamma_1 E \leqslant C_0 \leqslant \gamma_2 E,\ \|C_1\| \leqslant \gamma_3, \qquad \gamma_2 \geqslant \gamma_1 > 0, \qquad \gamma_3 \geqslant 0. \tag{23}$$

Тогда при

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_0(1-\varkappa^2)}{1+\varkappa\rho_0}, \text{ где } \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},\ \varkappa = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2+\gamma_3^2}},\ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \tag{24}$$

справедлива оценка

$$\inf \|S\| \leqslant \|E - \tau C\| \leqslant \bar{\rho}, \text{ где } \bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \varkappa}{1+\varkappa\rho_0} < 1, \tag{25}$$

которая при $\varkappa = 0$ $(C = C^*)$ *переходит в оценку*

$$\|S\| \leqslant \rho_0 \text{ при } \tau = \tau_0, \tag{26}$$

т. е. оценка (25) неулучшаема.

В работе [51] были получены приближенные формулы для $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$ в случае, когда $\tilde{H}_h$ — комплексное конечномерное пространство со скалярным произведением

$$C = C_0 + iC_1,\ C_0 = \operatorname{Re} C = {}^1/_2 (C + C^*),\ C_1 = \operatorname{Im} C = \frac{1}{2i}(C - C^*).$$

Условия (23) эквивалентны условиям (ср. работы [50], [51])

$$\gamma_1 B \leqslant A_0 \leqslant \gamma_2 B, \qquad (B^{-1}A_1 x, \quad A_1 x) \leqslant \gamma_3 (Bx, x), \qquad x \in H_h, \tag{27}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

Пусть $R = R^* > 0$ и

$$c_1 R \leqslant A_0 \leqslant c_2 R, \qquad (R^{-1}A_1 y, \ A_1 y) \leqslant c_3^2 (Ry, y), \qquad c_2 \geqslant c_1 > 0. \tag{28}$$

Если выполнены условия

$$\mathring{\gamma}_1 B \leqslant R \leqslant \mathring{\gamma}_2 B,$$

то имеют место неравенства (27) с постоянными

$$\gamma_1 = c_1\mathring{\gamma}_1, \qquad \gamma_2 = c_2\mathring{\gamma}_2, \qquad \gamma_3 = c_3\mathring{\gamma}_3, \qquad c_3 > 0.$$

В качестве оператора B можно воспользоваться факторизованным оператором (14)

4. Применение описанных выше итерационных методов предполагает знание постоянных γ_1, γ_2, γ_3 и c_1, c_2. В тех случаях, когда эти постоянные известны неточно или вообще неизвестны априори, целесообразно пользоваться вариационно-итерационными методами, такими, как метод скорейшего спуска или метод минимальных невязок.

Заметим, прежде всего, что любой итерационный метод

$$B\frac{y_{k+1}-y}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \qquad k = 0, 1, \ldots, \; y_0 \in H_h \tag{29}$$

можно трактовать как метод поправок

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}w_k, \qquad w_k = B^{-1}r_k, \qquad r_k = Ay_k - f, \tag{30}$$

где r_k — невязка, w_k — поправка.

Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то можно для вычисления τ_{k+1} пользоваться формулой метода скорейшего спуска

$$\tau_{k+1} = \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}. \tag{31}$$

Этот метод сходится в H_A с той же скоростью, что и схема (29) при постоянном $\tau = \tau_0$ (см. работу [59]).

Если $A > 0$ несамосопряженный оператор, то применим метод минимальных поправок; вычисления проводятся по формулам (30) с

$$\tau_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}. \tag{32}$$

Уравнение $Au = f$ эквивалентно уравнению

$$Cv = \varphi, \; v = B^{\frac{1}{2}}u, \; C = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}, \; \varphi = B^{-\frac{1}{2}}f. \tag{33}$$

Воспользуемся для решения уравнения $Cv = \varphi$ методом минимальных невязок (М. М. Н.), предложенным М. А. Красносельским и С. Г. Крейном [60]:

$$x_{k+1} = x_k - \tau_{k+1}\tilde{r}_k, \qquad \tilde{r}_k = Cx_k - \varphi, \qquad \tau_{k+1} = \frac{(\tilde{r}_k, C\tilde{r}_k)}{\|C\tilde{r}_k\|^2}. \tag{34}$$

Учитывая (33), нетрудно отсюда получить формулы (30) и (32). Поэтому все рассуждения достаточно провести для М. М. Н. (34). Если $C = C^* > 0$, $\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E$, то для М. М. Н. (34) верна оценка

$$\|Cx_n - \varphi\| \leqslant \rho_0^n \|Cx_0 - \varphi\|, \qquad \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{35}$$

В случае несамосопряженного оператора C имеет место

Теорема 9. *Пусть C — несамосопряженный оператор, $C = C_0 + C_1$ и выполнены условия (23). Тогда для М. М. Н. (34) верна оценка*

$$\|Cx_n - \varphi\| \leqslant \bar{\rho}^n \|Cx_0 - \varphi\|, \tag{36}$$

где $\bar{\rho} = (\rho_0 + \varkappa) / (1 + \varkappa\rho_0)$*.

При доказательстве этой теоремы используется

Лемма. *Пусть C — несамосопряженный оператор с границами*

$$\gamma_1 \text{ и } \gamma_2 > \gamma_1 > 0, \qquad \gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E$$

* В работе [60] изучен случай самосопряженного $C = C^*$.

и при некотором $\tau_* > 0$ *справедлива оценка*

$$\|E - \tau_* C\| \leqslant \rho_*, \qquad \text{где } \rho_* < 1. \tag{37}$$

Тогда, если выполнены условия

$$\gamma_1 \leqslant \frac{1-\rho_*^2}{\tau_*} \leqslant \gamma_2, \tag{38}$$

то имеет место неравенство

$$(Cx, x)^2 \geqslant (1-\rho_*^2)\|Cx\|^2\|x\|^2 \text{ для всех } x \in H. \tag{39}$$

Доказательство. Из условия (38) следует: $\|x\|^2 - 2\tau_*(Cx, x) + \tau_*^2\|Cx\|^2 \leqslant \rho^2\|x\|^2$, $\tau_*^2\|Cx\|^2 \leqslant 2\tau_*(Cx, x) - (1-\rho_*^2)\|x\|^2$ и

$$\|Cx\|^2 \leqslant \frac{2}{\tau_*}\frac{(Cx, x)}{\|x\|^2}\left[\frac{\|x\|^2}{(Cx, x)} - q\frac{\|x\|^4}{(Cx, x)^2}\right], \tag{40}$$

где $q = (1-\rho_*^2)/2\tau_*$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = \alpha - q\alpha^2$, где $\alpha = \|x\|^2/(Cx, x)$, $\alpha \in [1/\gamma_2, 1/\gamma_1]$ и найдем ее максимум. Точка $\alpha_0 = 1/2q$ в силу условий (38) принадлежит отрезку $[1/\gamma_2, 1/\gamma_1]$. Поэтому $\max \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) = 1/4q$ и, следовательно, $\frac{2}{\tau_*}\varphi(\alpha) \leqslant \frac{1}{2\tau_* q} = \frac{1}{1-\rho_*^2}$. Отсюда и из (40) следует неравенство (39).

Перейдем к доказательству теоремы 9. Из (34) находим

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \tau_{k+1}C\tilde{r}_k;$$

$$\|\tilde{r}_{k+1}\|^2 = \|\tilde{r}_k\|^2 - 2\tau_{k+1}(C\tilde{r}_k, \tilde{r}_k) + \tau_{k+1}^2\|C\tilde{r}_k\|^2 = \left[1 - \frac{(C\tilde{r}_k, \tilde{r}_k)^2}{\|\tilde{r}_k\|^2\|C\tilde{r}_k\|^2}\right]\|\tilde{r}_k\|^2.$$

Выражение в квадратных скобках, в силу леммы, не превосходит $1-(1-\rho_*^2) = \rho_*^2$, т. е. $\|\tilde{r}_{k+1}\| \leqslant \rho_*\|\tilde{r}_k\|$, $\|\tilde{r}_n\| \leqslant \rho_*^n\|\tilde{r}_0\|$. В силу теоремы $\rho_* = \bar{\rho}$ при $\tau_* = \bar{\tau}$. Отсюда и следует (35). Теорема доказана.

Замечание. Если выполнены условия $C \geqslant \gamma_1 E$, $C^{-1} \geqslant 1/\gamma_2 \cdot E$, то вместо (35) верна оценка

$$\|Cx_n - \varphi\| \leqslant \tilde{\rho}^n\|Cx_0 - \varphi\|,$$

где $\tilde{\rho} = \sqrt{1-\xi}$, $\xi = \gamma_1/\gamma_2$.

Вариационно-итерационные методы с факторизованным оператором B применялись рядом авторов (см., например, работы [54 — 56]).

В случае несамосопряженного оператора A можно в качестве B выбирать Ф. О. (14). Для вычислений по формулам (31) и (32) не требуется знания постоянных c_1, c_2, c_3.

5. Оператор B может быть задан либо в явном виде, либо построен в результате некоторого (внутреннего) прямого или итерационного метода. Это имеет место, например, в так называемом двухступенчатом методе [50, 50а, 51, 58], который сформулируем как метод поправок. Для вычисления поправки w_k уравнение

$$Rw = r_k, \quad r_k = Ay_k - f \tag{41}$$

решается либо прямым методом (тогда $B = R$), либо итерационным методом с разрешающим оператором T_m, $\|T_m\| \leqslant q < 1$ при нулевом начальном приближении $w^{(0)} = 0$. Поправка w_k определяется как m-я итерация $w^{(m)} = w_k$, так что $w - w_k = T_m w$, где w — точное решение уравнения (41). Подставляя $w = (E - T_m)^{-1}w_k$ в (41), получим $Bw_k = r_k$, где $B = R(E - T_m)^{-1}$. Если $T_m = T_m^*$, T_m и R перестановочны, то $B = B^* > 0$ и $\mathring{\gamma}_1 = 1 - q$, $\mathring{\gamma}_2 = 1 + q$ (см. работы [50, 51]). Для вычисления итерации y_{k+1} можно

пользоваться схемой (30) с постоянным параметром $\tau = \tau_0$ при $A = A^* > 0$, с $\tau = \bar{\tau}$ при $A \neq A^*$, $A = A_0 + A_1$ (см. (24)), если известны постоянные c_1, c_2, c_3, так что $\gamma_1 = (1 - q)c_1$, $\gamma_2 = (1 + q)c_2$, $\gamma_3 = (1 + q)c_3$.

Если постоянные c_1, c_2, c_3 неизвестны или определяются неточно, то целесообразно пользоваться двухступенчатым методом скорейшего спуска (τ_{k+1} вычислять по формуле (31)) при $A = A^*$. Двухступенчатый метод минимальных поправок в случае несамосопряженного оператора $A \neq A^*$, как показывает формула (32), требует последовательного решения при помощи внутренних итераций T_m двух уравнений

$$\begin{aligned} Rw &= r_k, \qquad w^{(0)} = 0, \quad w_k = w^{(m)}, \\ Rv &= Aw_k, \quad v^{(0)} = 0, \quad v_k = v^{(m)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Сначала находится поправка $w_k = w^{(m)}$, после чего решается второе уравнение и определяется $v_k = B^{-1}Aw_k$ как m-я итерация $v^m = v_k$. Здесь $B = R(E - T_m)^{-1}$. Зная w_k и $B^{-1}Aw_k$, вычисляем по формуле (32) параметр τ_{k+1}. В силу теоремы 9 имеет место оценка (36), в которой следует положить $\gamma_1 = c_1(1 - q)$, $\gamma_2 = c_2(1 + q)$, $\gamma_3 = c_3(1 + q)$, $c_3 > 0$.

Требование перестановочности R и T_m является весьма сильным ограничением и существенно сужает область применимости двухступенчатых методов.

6. Рассмотрим теперь трехслойные (двухшаговые) итерационные схемы для решения уравнения $Au = f$, где $A = A^* > 0$. Стационарная итерационная схема может быть записана в каноническом виде

$$B\left[\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + \varkappa(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})\right] + Ay_k = f, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

заданы любые векторы $y_0 \in H_h$ и $y_1 \in H_h$. Здесь $\tau > 0$ и $\varkappa > 0$ — итерационные параметры.

Для вычисления первого приближения y_1 можно пользоваться двухслойной схемой

$$B\frac{y_1 - y_0}{\tau_0} + Ay_0 = f, \qquad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{44}$$

Для $z_k = y_k - u$, где u — решение задачи (1), из (43), (44) имеем

$$B\left[\frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{2\tau} + \varkappa(z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1})\right] + Az_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{43*}$$

$$z_1 = y_1 - u \in H_h, \qquad z_0 = y_0 - u \in H_h.$$

Если y_1 определяется из (44), то

$$B\frac{z_1 - z_0}{\tau_0} + Az_0 = 0, \ \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2), \ z_0 \in H_h. \tag{44*}$$

Будем предполагать, что

$$\left.\begin{aligned} A &= A^* > 0, \qquad & B &= B^* > 0, \\ \gamma_1 B &\leqslant A \leqslant \gamma_2 B, \qquad & \gamma_2 &\geqslant \gamma_1 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Оптимальные значения параметров τ и $\varkappa$ можно получить из общей теории устойчивости трехслойных схем (2) из § 1 с $R = \varkappa B$.

Теорема 10. *Для решения задачи* (43*) *при* $\tau = \tau_1$, $\varkappa = \varkappa_1$, где

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}, \qquad \varkappa_1 = \frac{1}{4}(\gamma_1 + \gamma_2), \tag{46}$$

имеет место оценка

$$\|z_{n+1}\|_{(1\rho_1)} \leqslant \rho_1^n \|z_1\|_{(1\rho_1)}, \tag{47}$$

где

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

$$\|z_{n+1}\|^2_{(\rho_1)} = \frac{1}{4}((A-\gamma_1 B)(z_{n+1}+\rho_1 z_n),\ z_{n+1}+\rho_1 z_n) + \\ + \frac{1}{4}((\gamma_2 B - A)(z_{n+1}-\rho_1 z_n),\ z_{n+1}-\rho_1 z_n).$$

Эта же теорема имеет место и для задачи (43*) — (44*). Заметим, что в силу формулы (45) $\|z_{n+1}\|_{(\rho_1)}$ есть, вообще говоря, полунорма.

Если $B = E$, то схема (43) называется явной. Явная трехслойная схема (43)—(44) рассматривалась в работах [52—57 и 3, 41]. Она записывалась в виде (для уравнения $Cv = \varphi$)

$$\left.\begin{array}{lll} x_{k+1} = (1+\alpha)(E-\tau_0 C)x_k - \alpha x_{k-1} + (1+\alpha)\tau_0\varphi, & & k = 1, 2, \ldots \\ x_1 = (E-\tau_0 C)x_0 + \tau_0\varphi, & \gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E, & C = C^*, \\ \gamma_1 > \gamma_2 > 0, & \tau_0 = 2/(\gamma_1+\gamma_2). & \end{array}\right\} \quad (48)$$

В работе [52] получена оценка

$$\|x_n - v\| \leqslant q_n \|x_0 - v\|, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad q_n = \rho_1^n\left(1 + \frac{1-\rho_1^2}{1+\rho_1^2}\, n\right) \quad (49)$$

при $\alpha = \rho_1^2$; здесь v — решение уравнения $Cv = \varphi$.

Приводя (48) к каноническому виду (43), получаем

$$\tau = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} = \tau_1, \quad \varkappa = \frac{1}{2\tau_0} = \frac{1}{4}(\gamma_1+\gamma_2) = \varkappa_1 \quad (\alpha = \rho_1^2),$$

т. е. те же значения τ_1 и $\varkappa_1$, что и в теореме 10. Однако скорость сходимости в метрике H_h ухудшается.

Неявную схему (43) можно привести к явной схеме (48) с

$$x_n = A^{\frac{1}{2}} y_n, \qquad C = A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}, \qquad \varphi = A^{\frac{1}{2}} B^{-1} f$$

или $$x_n = B^{\frac{1}{2}} y_n, \qquad C = B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}, \qquad \varphi = B^{-\frac{1}{2}} f.$$

Для C верны неравенства

$$\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E.$$

Пользуясь затем оценкой (49), получим при $\tau = \tau_1$, $\varkappa = \varkappa_1$

1) $$\|z_n\|_D \leqslant q_n \|z_0\|_D, \qquad D = A \text{ или } D = B, \quad (50)$$

если y_1 вычисляется по двухслойной схеме (44) с $\tau_0 = 2/(\gamma_1+\gamma_2)$;

2) $$\|z_n\|_D \leqslant (\rho_0 q_{n+1} + q_n)\|z_0\|_D + q_{n-1}\|z_1\|_D, \quad (51)$$

если y_1 — произвольный вектор, $z_0 = y_0 - u$, $z_1 = y_1 - u$.

7. В качестве оператора B можно взять факторизованный оператор (14). В силу теоремы 8 при $c_1 = c_2 = 1$ ($R = A$) будем иметь

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \qquad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\eta}} - \sqrt{2\sqrt{\eta}}}{\sqrt{1+\sqrt{\eta}} + \sqrt{2\sqrt{\eta}}}.$$

Для числа итераций $n_0(\varepsilon)$ верна при $\eta \to 0$ асимптотика

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

В случае двухслойной схемы с тем же оператором B

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если A — разностный оператор Лапласа, то $\eta = O(h^2)$ и $n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ для трехслойной схемы с Ф. О. (14).

Указанная схема применима для разностной задачи Дирихле в произвольной области любого числа измерений.

Любую трехслойную схему можно формулировать как метод поправок

$$y_{k+1} = (1+\alpha) y_k - \alpha y_k - \theta w_k, \quad \alpha = \rho_1^2, \quad \theta = \frac{1+\alpha}{2\varkappa_1} = \tau_0 (1+\alpha), \qquad \varkappa_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4},$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

где $w_k = B^{-1} r_k$ — поправка, $r_k = A y_k - f$ — невязка.

Формулируем трехслойный двухступенчатый метод. Поправка w_k находится в результате решения уравнения

$$Rw = r_k$$

итерационным методом с разрешающим оператором T_m, $\|T_m\| \leqslant q < 1$ при нулевом начальном приближении $w^{(0)} = 0$, так что $w_k = w^{(m)}$, $B = R(E - T_m)^{-1}$. Для числа итераций в этом случае верна оценка

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{52}$$

где

$$\xi = \frac{c_1}{c_2} \frac{1-q}{1+q}.$$

В работе [51] двухступенчатый метод применялся для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами. В качестве схемы T_m выбиралась схема переменных направлений. Было отмечено уменьшение числа итераций по сравнению с двухслойной двухступенчатой схемой. Из (52) видно, что применение трехслойных схем позволяет ослабить зависимость скорости сходимости от отношения c_1/c_2, что очень важно в случае сильно меняющихся коэффициентов эллиптического уравнения.

Вариационно-итерационная трехслойная двухступенчатая схема рассматривалась в работе [58].

§ 3. Метод суммарной аппроксимации

1. В § 1 и 2 основное внимание было уделено изучению устойчивости разностных схем. Второй важной характеристикой разностной схемы, устанавливающей связь ее с исходным дифференциальным уравнением, является погрешность аппроксимации. От того, в каком смысле данная схема аппроксимирует исходную задачу, зависит выбор метода исследования точности схемы и тип априорных оценок, выражающих устойчивость по правой части.

В процессе развития теории разностных схем был произведен пересмотр критерия аппроксимации. Так, при изучении скорости сходимости однородных разностных схем в классе разрывных коэффициентов выяснилось [61, 62], что локальная погрешность аппроксимации (или аппроксимации в сеточной норме C или L_2) не является адекватной характеристикой точности схемы. Была построена схема (для уравнения $(ku')' - qu = -f(x)$), которая на произвольной неравномерной сетке не аппроксимирует дифференциальное уравнение ни в одной точке, однако имеет второй порядок точности [63].

Погрешность аппроксимации следует понимать в некотором интегральном или суммарном смысле, т. е. оценивать погрешность аппроксимации в негативных (слабых) нормах, учитывающих ее знакопеременный или дивергентный характер (см. [61—66]). Поясним это на примере. Пусть дано разностное уравнение $Ay = \varphi$, где $A \in (H_h \to H_h)$, H_h — гильбертово пространство, $A = A^* > 0$. Для него имеет место точная оценка $\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}}$, т. е. решение y в H_A выражается через правую часть φ в $H_{A^{-1}}$. Если, например, $A \geqslant \gamma A_0$, $\gamma > 0$, $A_0 = A_0^* > 0$, то вместо точного равенства получим оценку $\|y\|_{A_0} \leqslant \frac{1}{\gamma}\|\varphi\|_{A_0^{-1}}$. Пусть H_h — пространство сеточных функций, определенных на $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,\ N;\ h = 1/N\}$ и равных нулю при $i = 0$, $i = N$, $A_0 y = -y_{\bar{x}x}$. Тогда

$$\|y\|_{A_0} = \left(\sum_{i=1}^{N} (y_{\bar{x},\,i})^2 h\right)^{1/2} \text{ — аналог нормы в } \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

$$\|\varphi\|_{A_0^{-1}} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h \left(\sum_{k=i+1}^{N-1} h\varphi_k\right)^2\right]^{1/2} \text{ — аналог нормы в } \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}.$$

Для нестационарных разностных схем, как было указано в § 1, решение в H_A оценивается через $\|\varphi\|_A + \|\varphi_{\bar{t}}\|_{A^{-1}}$. Ослабление требований аппроксимации (отказ от локальной аппроксимации нужного порядка) позволило существенно расширить область применения однородных разностных схем.

Априорные оценки для конкретных двухслойных и трехслойных схем, обладающих свойством суммарной аппроксимации эллиптических операторов, имеются в работах [26, 29, 64].

2. Понятие аппроксимации сыграло важную роль в развитии теории экономичных методов решения нестационарных задач математической физики для уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x,\ t), \qquad 0 < t < t_0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Lu + f(x,\ t), \end{aligned} \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор, $x = (x_1, \ldots, x_p)$ — точка p-мерной области $\overline{G} = G + \Gamma$ с границей Γ, а также для соответствующих систем уравнений (u, f — векторы).

Пусть $\overline{\omega}_h = \{x_i\}$ — сетка в области $\overline{G}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Под экономичной схемой обычно понимают безусловно устойчивые схемы, требующие для нахождения решения затраты числа действий, пропорционального числу использованных узлов сетки $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$. Это значит, что при переходе от слоя j к слою $j + 1$ требуется $O(N)$ действий, где N — число узлов сетки ω_h; иначе: на один узел сетки приходится $O(1)$ действий. Основная алгорифмическая идея всех экономических методов состоит в написании таких разностных уравнений, что их решение сводится к последовательному применению стандартных алгорифмов (например, алгорифма одномерной прогонки) с затратой $O(N)$ действий.

Все двуслойные (использующие для определения y^{j+1} лишь значение y^j на одном предыдущем слое) экономичные методы можно записать в виде

$$B_\alpha y^{j+\alpha/p} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} C_{\alpha\beta} y^{j+\beta/p} + F^{j+\alpha/p}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{2}$$

где $y^{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1,2,\ldots, p-1$ — промежуточные значения, B_α, $C_{\alpha\beta}$ — линейные разностные операторы, действующие на y как функцию $x \in \omega_h$, а для решения каждого из уравнений $B_\alpha y^{j+\alpha/p} = \Phi_\alpha$ с известной правой частью достаточно затратить $O(N)$ действий (такие операторы B_α мы называем экономичными).

Первые экономичные методы для решения уравнения теплопроводности в случае, когда G — прямоугольник, были предложены американскими математиками Писменом, Рэкфордом и Дугласом [67—69].

В дальнейшем различные экономичные методы для типичных задач математической физики рассматривались в работах Бейкера и Олифанта [72], Дугласа и Ганна [48], В. К. Саульева [41], К. А. Багриновского и С. К. Годунова [70], Н. Н. Яненко [71, 73], Е. Г. Дьяконова [42], И. В. Фрязинова [81—83], В. Б. Андреева [84], Хаббарда [94, 95] и др.

Появился ряд терминов для экономичных методов — неявный метод переменных направлений [67—69], метод расщепления [71], метод дробных шагов [73], метод расщепляющегося оператора [42], локальноодномерный метод [75], аддитивные схемы [76] или метод суммарной аппроксимации. Эта терминология, быть может, неустановившаяся и отражающая индивидуальные подходы к построению и трактовке структуры экономичных методов различных авторов, в то же время дает представление о тех или иных характерных чертах этих методов (во многом совпадающих по алгорифмической структуре).

С точки зрения общей теории дифференциацию экономичных методов целесообразно провести в зависимости от способа их исследования и, в частности, от понятия аппроксимации. При этом следует подчеркнуть, что в большинстве случаев метод исследования определяет и принципы конструирования экономичных схем. Для исследования экономичных алгорифмов применяется два подхода:

1) Метод исключения промежуточных значений $y^{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1,2,\ldots, p-1$ и сведения системы (2) к эквивалентной схеме «в целых шагах»

$$B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j \tag{3}$$

с факторизованным оператором (Ф.О.) $B = B_1B_2\ldots B_p$. Устойчивость и аппроксимация экономичного метода (2) проверяются для Ф. С. (3). С этой точки зрения система (2) трактуется как способ реализации Ф.С.

2) Метод суммарной аппроксимации, на котором мы и остановимся подробнее в этом параграфе.

Первый подход — замена системы (2) эквивалентной Ф.С.— применялся во многих работах [67—69, 71, 73] и др. Очевидно, что можно исходить из Ф.С., устойчивой и аппроксимирующей многомерное дифференциальное уравнение, а затем для решения разностной задачи пользоваться алгорифмом вида (2) с экономичными операторами B_α (см. работы [42, 72, 74, 45] и др.).

В § 1 (см. работу [34]) был указан общий метод построения устойчивых Ф.С. Выбирая в качестве R_α те или иные экономичные разностные операторы, в зависимости от конкретной задачи, получим экономичные Ф.С.

Требование эквивалентности задач (2) и (3) выполняется при специальном способе задания краевых условий для промежуточных значений $y^{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1,2,\ldots, p-1$, а также правых частей $F^{j+\alpha/p}$. На это впервые указал Е. Г. Дьяконов [88] (см. также [76, 77]). Кроме того, исключение (без обращения

операторов $B_\alpha)y^{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1,\ldots,p-1$, в ряде случаев требует попарной перестановочности операторов B_α и $C_{\alpha\beta}$. Отметим, что в ряде работ (см. [67—69]) экономичные алгорифмы пишутся так, чтобы исключение промежуточных значений было возможно без дополнительных ограничений на операторы схемы.

Наконец, Ф.С. (2) с оператором $B = B_1 \ldots B_p$ устойчива лишь при условии перестановочности или «почти перестановочности» самосопряженных операторов $\{B_\alpha\}$.

Весьма интересный экономичный метод (метод расщепления [71]) предложил Н. Н. Яненко для многомерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad u = u(x, t), \quad x = (x_1, \ldots, x_p), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}. \tag{4}$$

Естественная многомерная схема с весами

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j), \qquad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \ \Lambda_\alpha \sim L_\alpha \tag{5}$$

заменяется системой одномерных разностных уравнений

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha \left(\sigma y^{j+\alpha/p} + (1-\sigma) y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{6}$$

или

$$B_\alpha y^{j+\alpha/p} = C_\alpha y^{j+(\alpha-1)/p}, \qquad B_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha, \qquad C_\alpha = E + (1-\sigma)\tau\Lambda_\alpha. \tag{7}$$

В дальнейшем в [73] был рассмотрен случай, когда L_α — произвольный дифференциальный оператор, содержащий производные только по x_α (метод дробных шагов).

Эта система (6) сводится методом исключения к Ф.С.

$$\prod_{\alpha=1}^{p} B_\alpha y^{j+1} = \prod_{\alpha+1}^{p} C_\alpha y^j, \tag{8}$$

не совпадающей с исходной схемой (5) и аппроксимирующей уравнение (4).

Требование эквивалентности Ф.С. (8) и системы (6) приводит к тем же трудностям, о которых шла речь выше. В частности, переход от (6) к (8) возможен, если операторы Λ_α перестановочны (для (6) это значит, что G — параллелепипед). Возникли также затруднения с заданием правых частей для уравнений (6) в случае неоднородного уравнения (4).

Во всех работах [67—73, 42—44] рассматривались лишь области специального вида (G — p-мерный параллелепипед). Между тем, очевидно, что алгорифмы [68, 69 и 71] можно было бы использовать (уточнив их формулировку) и в случае области G более сложной формы. Ограничения на вид области G, связанные с понятием аппроксимации для методов [68 и 71] и требованием эквивалентности (2) и Ф.С. (3), оказалось возможным снять, введя новое понятие схемы (аддитивной схемы), аппроксимирующей дифференциальное уравнение в более слабом смысле (в суммарном смысле) [75]. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации существенно расширили возможности построения экономичных схем и позволили получить экономичные аддитивные схемы для значительно более широкого класса линейных и нелинейных задач математической физики.

Перейдем к формулировке понятия суммарной аппроксимации.

3. Пусть H_h — линейное нормированное пространство $\omega_t = \{t_j = j\tau, j = 0, 1 \ldots, \ldots, j_0\}$ — сетка с шагом τ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $C_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$, B и т. д. — линейные операторы из H_h в Π_h, зависящие от h, τ и, быть может, от $t \in \overline{\omega}_\tau$.

В § 1 было дано определение n-слойной разностной схемы как разностного (по переменному t) уравнения $(n-1)$-го порядка с операторными

коэффициентами:

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} C_\beta(t_j)\, y(t_j-\beta\tau) = f(t_j), \qquad (n-1)\tau \leqslant t_j \leqslant t_0. \tag{9}$$

Для определения решения надо задать $(n-1)$ начальных векторов

$$y(0) = y_0,\ y(\tau) = y_1, \ldots, \qquad y((n-2)\tau) = y_{n-2}.$$

Введем более широкий класс схем.

Назовем n-слойной составной схемой с периодом m (порядка m) систему разностных уравнений с операторными коэффициентами

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha\beta}(t_j)\, y(t_j+\beta\tau) = \sum_{\beta=0}^{n-2} D_{\alpha\beta}(t_j)\, y(t_j-\beta\tau) + f_\alpha(t_j), \tag{10}$$

где $\alpha = 1,2,\ldots,m$, $(n-1)\tau \leqslant t_j \leqslant t_0$ с заданными начальными значениями $y(k\tau)$, $k = 0,1,\ldots,n-2$ (число слоев определяется числом начальных условий). Здесь t_j принимает значения, равные

$$t_j = (n-1)\tau + km\tau, \quad k = 0,1,\ldots, \quad j = n-1+km.$$

Чтобы найти $y(t_j+m\tau) = y_{j+m}$, где $t_j = (m+n-1)\tau$, надо решить систему m уравнений с операторной матрицей $C = (C_{\alpha\beta})$ размером $m \times m$.

При $m = 1$ составная схема (10) переходит в обычную n-слойную схему (9). При $n = 2$ получаем двухслойную составную схему с периодом m (обозначим ее $S(2, m)$):

$$\sum_{\beta=1}^{m} C_{\alpha\beta}(t_j)\, y(t_j+\beta\tau) = D_{\alpha 0} y(t_j) + f_\alpha(t_j), \quad \alpha = 1,2,\ldots,m, \quad y(0) = y_0. \tag{11}$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующее обозначение: $y^{j+\alpha/m} = y_{j+\alpha}$, заменив, кроме того, τ на τ/m.

Схему (11) всегда можно записать в каноническом виде:

$$B\frac{y^{j+\alpha/m} - y^{j+(\alpha-1)/m}}{\tau} + \sum_{\beta=0}^{m} A_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} = \varphi^{j+\alpha/m}, \qquad \alpha = 1,\ldots,m,$$

$$j = 0,1,\ldots, \quad y(0) = y_0. \tag{12}$$

Пусть схема (12) разрешима, и существует обратный оператор B^{-1}. В дальнейшем предполагается, что это условие выполнено. Определение устойчивости составной схемы вводится по аналогии § 1. Нам понадобится, в частности, следующее определение устойчивости. Будем говорить, что схема (12) устойчива, если для любых y_0 и $\varphi^{j+\alpha/m}$ выполняется априорная оценка:

$$\|y^{j+1}\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y_0\|_{(1_0)} + M_2 \max_{0\leqslant j'\leqslant j} \sum_{\alpha=1}^{m} \|\varphi^{j'+\alpha/m}\|_{(2)}, \tag{13}$$

где постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ не зависят от h, τ и выбора y_0, $\varphi^{j+\alpha/m}$, а $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{(2_h)}$ — некоторые нормы на H_h.

4. Чтобы ввести понятия точности и аппроксимации для $S(2, m)$, надо рассмотреть банахово пространство H_0 решений $u = u(t)$ исходной непрерывной задачи (ср. [49]). Пусть существует линейный оператор $\mathcal{P}_h$ из H_0 в H_h, такой, что $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$, если $u \in H_0$ и выполнено условие согласования норм

$$\lim_{|h|\to 0} \|\mathcal{P}_h u\|_{(1_h)} = \|u\|_0,$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в H_0. Пусть $\{y_h^j\}$ — решение задачи (12), $u(t)$, $t \in [0, t_0]$ — решение исходной задачи ($u(t)$ — непрерывная функция t). Близость $y_h^j = y_h(t_j)$ к $u(t_j)$ характеризуется величиной $\|z_h^j\|$, где $z_h^j = y_h^j - u_h^j$. Подставляя в (12) $y_h^{j+\alpha/m} = z_h^{j+\alpha/m} + u_h^{j+\alpha/m}$, где $u_h^{j+\alpha/m} = u_h(t_j + \alpha/m\tau)$, получим для $z_h^{j+\alpha/m}$ ту же систему уравнений (12) с правыми частями $\psi^{j+\alpha/m} = \psi_\alpha^j$, где ψ_α^j — погрешность аппроксимации для уравнения (12) номера α на решении u.

Составную схему (12), погрешность аппроксимации для которой определяется как сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_m \tag{14}$$

погрешностей аппроксимации для отдельных уравнений, будем называть аддитивной схемой и обозначать $AS(2, m)$. Аддитивная схема $AS(2, m)$ аппроксимирует исходную непрерывную задачу, если

$$\max_{t_j \in \omega_\tau} \|\psi^j\|_{(\mathcal{H}_h)} \to 0 \quad \text{при } |h| \to 0, \quad \tau \to 0. \tag{15}$$

Представим ψ_α в виде суммы

$$\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^* \text{ так, что } \sum_{\alpha=1}^{m} \mathring{\psi}_\alpha = 0. \tag{16}$$

Условие (15) суммарной аппроксимации будет выполнено, если

$$\max_{t_j \in \omega_\tau} \|\psi_\alpha^*(t_j)\|_{(\mathcal{H}_h)} \to 0 \text{ при } |h| \to 0, \ \tau \to 0 \text{ и } \alpha = 1, 2, \ldots, m. \tag{17}$$

Установим связь между устойчивостью, аппроксимацией и сходимостью для $AS(2, m)$.

Теорема 11. *Пусть аддитивная схема устойчива и обладает аппроксимацией, а также выполнено условие «гладкости» решения $u = u(t)$:*

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} \left\| \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta} \left(\sum_{k=\beta+1}^{m} B_k^{-1} \mathring{\psi}_k \right) \right\|_{(2)} \leqslant M_0, \tag{18}$$

где $M_0 = \text{const} > 0$ не зависит от τ и h и $y_0 = u_h(0)$. Тогда схема сходится и для нее верна оценка

$$\|y_h^{j+1} - u_h^{j+1}\|_{(1)} \leqslant M_2 \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \left[\sum_{\alpha=1}^{m} \|\psi_\alpha^*(t_{j'})\|_{(2)} + \tau \sum_{\alpha=1}^{m-1} \left\| \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta} \left(\sum_{k=\beta+1}^{m} B^{-1} \mathring{\psi}_k(t_{j'}) \right) \right\|_{(2)} \right]. \tag{19}$$

Эффективные априорные оценки при слабых ограничениях на операторы схемы могут быть получены в случае, когда H_h — вещественное гильбертово пространство.

Теорема 12. *Пусть $A_{\alpha 0} = 0$, B — постоянный оператор и выполнены условия*

$$B = B^* > 0, \tag{20}$$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{m} (A_{\alpha\beta}\xi_\beta, \xi_\alpha) \geqslant 0 \text{ для любых } \xi_\alpha \in H_h, \ \alpha = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

Тогда для решения задачи (12) имеет место оценка

$$\|y^{j+1}\|_B \leqslant \|y_0\|_B + M_2 \max_{0 \leqslant j' \leqslant j} \left[\left\| \sum_{\alpha=1}^{m} \varphi^{j'+\alpha/m} \right\|_{B^{-1}} + \sqrt{\tau} \sum_{\alpha=1}^{m} \|\varphi^{j'+\alpha/m}\|_{B^{-1}} \right], \tag{22}$$

где

$$\|y\|_B = \sqrt{(By, y)}, \qquad \|\varphi\|_{B^{-1}} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

Следствие. Аддитивная схема (12) сходится в H_B, если $y_0 = u_h(0)$, выполнены условия теоремы 12 и условия суммарной аппроксимации

$$\max_{0 \leqslant j < j_0} \left\| \sum_{\alpha=1}^{m} \psi^{j+\alpha/m} \right\|_{B^{-1}} \to 0 \quad \text{при } |h| \to 0,\ \tau \to 0\ (\psi^{j+\alpha/m} = \psi_\alpha^j),$$

$$\max_{0 \leqslant j < j_0} \sum_{\alpha=1}^{m} \|\psi^{j+\alpha/m}\|_{B^{-1}} \leqslant M_0, \text{ где } M_0 = \text{const} > 0 \text{ не зависит от } \tau \text{ и } h.$$

Замечание. 1. Если $y_0 = u_h(0)$, $\left\| \sum_{\alpha=1}^{m} \psi_\alpha \right\|_{B^{-1}} = O(|h|^l + \tau^k)$, где $k > 0$, $l > 0$, и выполнены условия теоремы 12, то $AS(2, m)$ (12) сходится в H_B со скоростью $O(|h|^l + \tau^{k_1})$, где $k_1 = \min(k, 1/2)$.

2. Если, кроме того, выполнено условие гладкости (18) с $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{B^{-1}}$, то $AS(2, m)$ сходится со скоростью $O(|h|^l + \tau^{k_2})$, где $k_2 = \min(k, 1)$.

5. Решение задачи (12) упрощается, если $A = (A_{\alpha\beta})$ — нижняя треугольная матрица ($A_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta > \alpha$), так что

$$B\frac{y^{j+\alpha/m} - y^{j+(\alpha-1)/m}}{\tau} + \sum_{\beta=0}^{\alpha} A_{\alpha\beta} y^{j+\frac{\beta}{m}} = \varphi^{j+\frac{\alpha}{m}}. \tag{23}$$

Переход от слоя j к слою $j+1$ осуществляется путем последовательного (от α к $\alpha+1$) решения уравнений

$$B_\alpha y^{j+\alpha/m} = \Phi_\alpha, \qquad B_\alpha = B + \tau A_{\alpha\alpha}, \qquad \Phi_\alpha = By^{j+\frac{\alpha-1}{m}} - \tau \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} + \tau\varphi^{j+\frac{\alpha}{m}}$$

при $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, которые можно записать в виде

$$y^{j+\alpha/m} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} S_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} + \tau F_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m. \tag{24}$$

В этом случае $AS(2, m)$ имеет нижнюю треугольную операторную матрицу перехода $S = (S_{\alpha\beta})$. $AS(2, m)$ с треугольной матрицей $(S_{\alpha\beta})$ или $(A_{\alpha\beta})$ будем называть треугольными аддитивными схемами.

Нетрудно убедиться в том, что все экономичные алгорифмы вида (23), соответствующие двухслойной Ф.С. и трактуемые как составные схемы, принадлежат семейству треугольных аддитивных схем и обладают суммарной аппроксимацией. Укажем некоторые частные случаи треугольных аддитивных схем (ср. [68] и [71])

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \qquad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta, \\ 0, \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{25}$$

$$A_{\alpha\beta} = \sigma A_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} + (1-\sigma) A_\alpha \delta_{\alpha-1,\beta},$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} A_{\alpha-1}\delta_{\alpha-1,\beta}. \tag{26}$$

Для схемы (25), например, условие (21) теоремы 12 выполнено, если

$$(A_\alpha y, y) \geqslant 0 \text{ для всех } y \in H_h, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Аддитивные схемы с диагональной матрицей $(A_{\alpha\beta})$ будем называть локально-одномерными.

6. Основным является следующий вопрос: как строить аддитивные разностные схемы определенного порядка точности?

В работе [75] был предложен следующий метод построения аддитивных схем, гарантирующий суммарную аппроксимацию.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \qquad x = (x_1, \ldots, x_p) \in G, \quad t \in [0, t_0], \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (27)$$

Пусть оператор L, действующий на u как функцию x, можно представить в виде суммы операторов L_α более простой структуры (например, «одномерных», т. е. содержащих производные только по x_α):

$$L = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha. \quad (28)$$

Представим f в виде суммы

$$f = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha(x, t) \quad (29)$$

и перепишем уравнение (27) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} P_\alpha u = 0,$$

где

$$P_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha. \quad (30)$$

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ введем сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом τ. Каждый интервал разобьем на p равных частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = (j + \alpha/p)\tau$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p - 1$.

Вместо уравнения (30) будем решать на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ систему уравнений

$$P_\alpha v_{(\alpha)} = 0 \text{ при } t \in \Delta_\alpha, \text{ где } \Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leqslant t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad (31)$$

связанными условиями

$$v_{(\alpha)}\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{\alpha-1}\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \qquad v_{(1)}(t_j) = v(t_j),$$

где $v(t_j) = v_{(p)}(t_j)$, $v(0) = u(0) = u_0$.

Каждое из уравнений $P_\alpha v_{(\alpha)} = 0$ решается на своем отрезке Δ_α.

Если каждое из уравнений $P_\alpha v_{(\alpha)} = 0$ номера α аппроксимировать в обычном смысле с шагом τ/p разностной схемой (двухслойной), то для определения y^{j+1} по заданному y^j мы получим систему разностных уравнений

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \qquad y_{(p)} = y^{j+1}. \quad (32)$$

Покажем, что эта составная схема $\Pi_1 \to \Pi_2 \to \ldots \to \Pi_p$ аппроксимирует уравнение (30) в суммарном смысле, если каждая из схем (32) номера α аппроксимирует уравнение (31) в обычном смысле, т. е. на любой достаточно гладкой функции

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u_h^{j+\alpha/p} - (P_\alpha u)_h^{j+\alpha/p} \quad (33)$$

стремится (в некоторой норме) к нулю при $\tau \to 0$, $|h| \to 0$.

Погрешность аппроксимации на решении $u = u(x, t)$ уравнения (30) для схемы Π_α номера α, очевидно, равна

$$\psi_\alpha = \Pi_\alpha u_h^{j+\alpha/p} = (P_\alpha u)_h^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha.$$

Учитывая, что $(P_\alpha, u)^{j+\alpha/p} = (P_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$, получаем $\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha$, где $\overset{*}{\psi}_\alpha = \Psi_\alpha + O(\tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+1/2}$.

Отсюда, в силу уравнения (30), следует

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$$

и суммарная погрешность аппроксимации для аддитивной схемы (32)

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\alpha \tag{34}$$

стремится к нулю при $|h| \to 0$, $\tau \to 0$, так как $\overset{*}{\psi}_\alpha$ обладают этим свойством.

Таким образом, аддитивная схема (32) аппроксимирует уравнение (27) (в суммарном смысле), если каждая из схем (32) номера α аппроксимирует соответствующее уравнение (31) в обычном смысле (на сетке с шагом τ/p).

Этот факт объясняется тем, что система дифференциальных уравнений (31) аппроксимирует многомерное уравнение (27) в суммарном (интегральном) смысле.

В самом деле, погрешность аппроксимации для уравнения $P_\alpha v_\alpha = 0$ номера α на решении $u = u(x, t)$ уравнения (27) есть невязка $\Psi_\alpha(t) = P_\alpha u(t)$, где $t \in \Lambda_\alpha$. Так как $P_\alpha u = (P_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$ при $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $\Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha$, где $\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+1/2}$, $\overset{*}{\Psi}_\alpha = O(\tau)$. Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0, \quad \Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\Psi}_\alpha = O(\tau),$$

т. е. аддитивная система дифференциальных уравнений (31) аппроксимирует уравнение (27) с первым порядком по τ.

Очевидно, что суммарная погрешность аппроксимации для системы (31), по аналогии с (34), может быть определена как

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{p}{\tau} \int_{t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}}^{t_{j+\alpha/p}} \Psi_\alpha \, dt.$$

Нетрудно заметить, что в проведенных выше рассуждениях изменится лишь последняя формула:

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{p}{\tau} \int_{t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}}^{t_{j+\alpha/p}} \overset{*}{\Psi}_\alpha \, dt = O(\tau).$$

Из устойчивости системы (31) и суммарной аппроксимации следует сходимость решения задачи (31) к $u(x, t)$.

Важно подчеркнуть, что суммарная аппроксимация для (32) и (31) на достаточно гладких решениях задачи (27) гарантируется выполнением двух условий (28) и (29): оператор L есть сумма $L_1 + L_2 + \ldots + L_p = L$ и правая часть f есть сумма $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = f$.

Вопрос о близости решений задачи (27) и (31) изучался Н. Н. Яненко [89]. Рассматривалась задача Коши в полупространстве $|x| < \infty$, $t > 0$ для системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = L(x, t, D)\, u + f(x, t), \qquad u(x, 0) = u_0(x), \tag{35}$$

где $u(x, t)$, $f(x, t)$ — векторные функции векторного аргумента, $L(x, t, D)$ — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от x, t. Предполагалось, что L представим в виде (28). Задача Коши (35) заменялась составной задачей Коши (31) в частном случае $f_\alpha = f/p$. Исполь-

зуя свойство суммарной аппроксимации, вытекающее из условия (28), которое интерпретировалось как свойство слабой аппроксимации коэффициентов дифференциального уравнения, автор доказал, что

$$\|v(x, t) - u(x, t)\| = O(\tau)$$

(при условии достаточной гладкости $u(x, t)$).

7. Указанный выше прием построения аддитивных схем с гарантированной аппроксимацией использовался в дальнейшем для получения экономичных схем применительно к многим линейным и нелинейным задачам математической физики (см. работы [75, 76, 78, 45, 90, 91, 92]).

Метод суммарной аппроксимации позволил распространить модифицированные алгорифмы [68 и 71] на случай произвольной области, а также получить ряд новых однородных экономичных аддитивных схем для линейных и квазилинейных уравнений и систем уравнений математической физики.

При этом выявилась необходимость, в связи с изучением уравнений (27) с операторами L_α, зависящими от t, изменить составную систему дифференциальных уравнений, аппроксимирующих многомерное уравнение.

В работе [79] была рассмотрена абстрактная задача Коши в банаховом пространстве B

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}(t)u = f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \qquad u(0) = u_0,\ u_0 \in B, \tag{36}$$

где $\mathcal{A}(t)$ — линейный оператор с всюду плотной в B областью определения, представимый в виде суммы

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{A}_\alpha(t), \tag{37}$$

$u(t)$, $f(t)$ — абстрактные функции $t \in [0, t_0]$ со значениями в B.

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ вводится равномерная сетка $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом τ. Задача (36) заменяется системой задач Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{dv_1}{dt} + \mathcal{A}_1 v_{(1)} = f_1(t), && t \in [t_j, t_{j+1}], && v_{(1)}(t_j) = v(t_j),\\
&\frac{dv_{(2)}}{dt} + \mathcal{A}_2 v_{(2)} = f_2(t), && t \in [t_j, t_{j+1}], && v_{(2)}(t_j) = v_{(1)}(t_{j+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha v_{(\alpha)} = f_\alpha(t), && t \in [t_j, t_{j+1}], && v_{(\alpha)}(t_j) = v_{(\alpha-1)}(t_{j+1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dv_{(p)}}{dt} + \mathcal{A}_p v_{(p)} = f_p(t), && t \in [t_j, t_{j+1}], && v_{(p)}(t_j) = v_{(p-1)}(t_{j+1})
\end{aligned} \tag{38}$$

и полагается

$$v(t_{j+1}) = v_{(p)}(t_{j+1}), \qquad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \qquad v(0) = u_0.$$

Исследовался вопрос о близости решений задач (36) и (38). Укажем основные результаты.

1. Если $\mathcal{A}_\alpha(t')$ и $\mathcal{A}_\beta(t'')$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p$ для любых $t', t'' \in [0, t_0]$ перестановочны ($\mathcal{A}_\alpha(t')\mathcal{A}_\beta(t'') = \mathcal{A}_\beta(t'')\mathcal{A}_\alpha(t')$), то при $f = 0$ имеет место равенство

$$v(t_j) = u(t_j) \tag{39}$$

для всех $j = 0, 1, \ldots, j_0$.

Если $f \neq 0$, то можно подобрать f_p при $f_1 = f_2 = \ldots = f_{p-1} = 0$ таким образом, что (39) будет выполнено.

2. Если $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{A}_\beta$ неперестановочны и выполнено условие «гладкости» решения $u(t)$ задачи (36) вида

$$\|\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta u\| \leqslant M,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в B, $M = \text{const} > 0$, то при условии (29)

$$\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau) \tag{40}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, j_0$.

Возникает вопрос: нельзя ли построить такую систему частичных задач Коши, чтобы

$$\|v^j - u^j\| = O(\tau^2). \tag{41}$$

Запишем условно составную задачу Коши (38) в виде цепочки $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \to \to \ldots \to \mathcal{A}_p$. Рассмотрим теперь симметричную цепочку $\frac{1}{2}\mathcal{A}_1 \to \ldots \to \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_{p-1} \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_p \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_p \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_{p-1} \to \ldots \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_1$ или $\frac{1}{2}\mathcal{A}_1 \to \ldots \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_{p-1} \to \to \mathcal{A}_p \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_{p-1} \to \ldots \to \frac{1}{2}\mathcal{A}_1$. Для такой составной задачи Коши (при соответствующем выборе f_α и некоторых дополнительных условиях «гладкости» u_0 и f) справедлива оценка (41) (см. [72]).

Идея симметризации была развита И. В. Фрязиновым, который построил и исследовал ряд симметризованных аддитивных схем для уравнений параболического типа в ступенчатых областях, составленных из p-мерных параллелепипедов (см. работу [83]). Другой метод симметризации применялся для получения экономичных схем в случае уравнений акустики [93].

Покажем, что цепочка задач Коши (38) аппроксимирует задачу (36) в суммарном смысле.

Положим $z_\alpha(t) = v_{(\alpha)}(t) - u^{j+1}$ при $\alpha = 2, 3, \ldots, p$, $z_{(1)}(t) = v_{(1)}(t) - u(t)$ и напишем уравнения для $z_{(\alpha)}$:

$$\frac{dz_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha z_{(\alpha)} = \psi_\alpha, \qquad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$z^j_{(\alpha)} = z^{j+1}_{(\alpha-1)} \text{ при } \alpha = 2, 3, \ldots, p, \quad z^j_{(1)} = z^j, \; z^{j+1}_{(p)} = z^{j+1}, \; z(0) = 0.$$

Правая часть ψ_α есть погрешность аппроксимации уравнения (36) уравнением (38) номера α в классе решений $u = u(t)$. Очевидно, что $\psi_\alpha(t) = f_\alpha(t) - \mathcal{A}_\alpha(t) u^{j+1}$ при $\alpha > 1$, $\psi_1(t) = f_1(t) - \mathcal{A}_1(t) u(t) - du/dt$. Представим ψ_α в виде $\psi_\alpha(t) = \psi_\alpha^{j+1} + O(\tau)$ или $\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha$, где $\mathring{\psi}_\alpha = (f_\alpha - \mathcal{A}_\alpha u - \delta_{\alpha,1} du/dt)^{j+1}$, $\delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha \neq 1. \end{cases}$ Если $f_1 + \ldots + f_p = f$, то имеет место равенство:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\alpha \right\| = O(\tau),$$

т. е. задача (38) аппроксимирует задачу (36) в суммарном смысле.

Отметим, что основную трудность при построении аддитивных схем $O(\tau^2)$ представляет задание краевых условий для промежуточных значений $y^{j+\alpha/p}$ (при абстрактной формулировке этот вопрос не возникает); для выполнения требования суммарной аппроксимации $O(\tau^2)$ требуется вводить поправки к естественным краевым значениям.

Описанный выше метод построения экономичных аддитивных схем, с предварительным построением составной дифференциальной задачи Коши (38) и надлежащим выбором операторов $\mathcal{A}_\alpha$ с последующей разностной аппроксимацией каждого из уравнений (38), также весьма удобен и применя-

ется на практике в качестве эвристического приема для получения экономичных аддитивных схем (см., например, [72, 83, 55]). Приведем один пример.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p} \mathcal{A}_{\alpha\beta}$ и матрица $(\mathcal{A}_{\alpha\beta})$ симметрична. Представим $(\mathcal{A}_{\alpha\beta})$ в виде суммы двух треугольных матриц:

$$(\mathcal{A}_{\alpha\beta}) = (\mathcal{A}^-_{\alpha\beta}) + (A^+_{\alpha\beta}), \qquad \mathcal{A}^-_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } \beta > \alpha, \quad \mathcal{A}^+_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } \beta < \alpha,$$

$$\mathcal{A}^-_{\alpha\alpha} = \mathcal{A}^+_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\alpha\alpha}, \qquad \mathcal{A}_{\alpha\beta} = \mathcal{A}^-_{\alpha\beta} + \mathcal{A}^+_{\alpha\beta}$$

и введем операторы

$$A_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \mathcal{A}^-_{\alpha\beta} \qquad \text{при } \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$A_\alpha = \sum_{\beta=\alpha}^{2p} \mathcal{A}^+_{2p+1-\alpha,\, 2p+1-\beta} \quad \text{при } \alpha = p+1, \ldots, 2p, \qquad \mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{2p} \mathcal{A}_\alpha.$$

После этого построим цепочку $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \to \ldots \to \mathcal{A}_{2p}$ задач (38), аппроксимируем каждый из операторов $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ разностным оператором $A_{\alpha\beta}$, зависящим от h $(u\tau)$ и заданным в линейном нормированном пространстве B_h. В результате получим следующую треугольную аддитивную схему:

$$\frac{y^{j+\alpha/2p} - y^{j+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + \widetilde{A}_{\alpha\alpha} y^{j+\alpha/2p} + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{2p} \widetilde{A}_{\alpha\beta} y^{j+(\alpha-1)/2p} = \varphi^{j+\alpha/2p}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, 2p,$$

где $\widetilde{A}_{\alpha\beta} = A^-_{\alpha\beta}$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $\widetilde{A}_{\alpha\beta} = A^+_{2p+1-\alpha,\,2p+1-\beta}$ при $\alpha = p+1$, $p+2, \ldots, 2p$. Если B_h — Г.П. и матрица $A = (A_{\alpha\beta})$ неотрицательна, то выполнены условия теоремы 2 и для треугольной аддитивной схемы справедлива априорная оценка (22).

Литература

1. *В. С. Рябенький.* О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши.— ДАН СССР, 1952, 86, 6, 1071—1074.
2. *А. Ф. Филиппов.* Об устойчивости разностных уравнений.— ДАН СССР, 1955, 100, 6, 1045—1048.
3. *В. С. Рябенький* и *А. Ф. Филиппов.* Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
4. *P. D. Lax, R. D. Richtmyer.* Survey of the stability of linear finite difference equations.— Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, N 2, 267—293.
5. *Р. Д. Рихмайер.* Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, 1960.
6. *P. D. Lax, B. Wendroff.* On the stability of differnce schemes with variable coefficients.— Communs Pure and Appl. Math., 1962, 15, N 4, 363—371.
7. *П. Д. Лэкс* и *Л. Ниренберг.* Об устойчивости разностных схем; точная форма неравенства Гординга.— Сборник переводов, «Математика», 1967, 11, 6, 3—20.
8. *H. O. Kreiss.* Über die Losung des Cauchyproblem für lineare partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen.— Acta math., 1959, 101, N 3—4, 179—199.
9. *Г. О. Крейс.* Об аппроксимации линейных уравнений с частными производными разностными уравнениями.— Сборник переводов, «Математика», 1963, 7, 2, 57—66.
10. *H. O. Kreiss.* Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren.— B. J. T., 1962, 2, 153—181.
11. *H. O. Kreiss.* On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations.— Communs Pure and Appl. Math., 1964, 17, 3, 335—353.
12. *M. L. Buchanan.* A necessary and sufficient condition for stability of difference schemes for initial value problems.— J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, 11, N 4, 919—935.
13. *K. W. Morton, S. Schecter.* On the stability of finite difference matrices.— Siam. J. Ser. B, Numer. Anal, 1965, 2, N 1, 119—128.

14. *V. Thomee.* On maximum norm stable difference operators. Numerical solution of partial differential equations. —Proc. Industr. Sympos., 1965, N. Y., Acad. Press, 1966, 125—151.
15. *V. Thomee.* Parabolic difference operators.— Mat. scand., 1966, 19, 1, 77—107.
16. *V. Thomee.* Generally unconditionally stable difference operators.— SIAM, J. Numerical Analyses, 1967, 4, 1, 55—69.
17. *С. И. Сердюкова.* Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений. - ЖВМ и МФ, 1967, 7, 3, 497—509.
18. *М. В. Федорюк.* Об устойчивости в *C* задачи Коши для разностных уравнений и уравнений с частными производными.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, 3, 510—540.
19. *С. К. Годунов* и *В. С. Рябенький.* Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
20. *С. К. Годунов, В. С. Рябенький.* Канонические виды систем линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.— ЖВМ и МФ, 1963, 3, 2, 211—222.
21. *С. К. Годунов, В. С. Рябенький.* Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений.— УМН, 1963, 18, 3 (111), 3—14.
22. *А. М. Ильин.* Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных.—ДАН СССР, 1965, 164, 3, 491—494.
23. *Л. И. Якут.* К вопросу обоснования сходимости разностных схем.— ДАН СССР, 1963, 151, 1, 76—79.
24. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Изд-во «Наука», 1967.
25. *О. А. Ладыженская.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
26. *В. И. Лебедев.* О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных.— Изв. АН СССР, серия матем., 1958, 22, 5, 717—734.
27. *M. Lees.* A priori estimates for the solution of difference approximations to parabolic partial differential equations.— Duke Math. J., 1960, 21, N 3, 297—311.
28. *M. Lees.* Energy inequalities for the solution of differential equation.—Trans. Amer Math. Soc., 1960, N 1, 58—73.
29. *А. А. Самарский.* Априорные оценки для разностных уравнений. — ЖВМ и МФ, 1961, 1, 6, 972—1000.
30. *Е. Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.— ЖВМ и МФ, 1964, 4, 2, 278—291.
31. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск. Изд. СО АН СССР, 1962.
32. *Р. Курант, К. Фридрихс* и *Г. Леви.* О разностных уравнениях математической физики.— УМН, 1940, 8, 125—160.
33. *А. А. Самарский.* К теории разностных схем.— ДАН СССР, 1965, 165, 5, 1007—1011.
34. *А. А. Самарский.* О регуляризации разностных схем.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, 1, 62—93.
35. *А. А. Самарский.* Классы устойчивых схем.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, 5, 1096—1133.
36. *А. А. Самарский.* Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных схем.— ДАН СССР, 1968, 181, 4, 808—811.
37. *А. В. Гулин, А. А. Самарский.* Об устойчивости разностных схем в комплексном гильбертовом пространстве.— ДАН СССР, 1968, 181, 5, 1042—1056.
38. *А. В. Гулин.* Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойных разностных схем.— ЖВМ и МФ, 1968, 8, 4, 899—902.
39. *С. Г. Михлин.* Численная реализация вариационных методов. М., Изд-во «Наука», 1966.
40. *E. C. Du Fort, S. P. Frankel.* Stability conditions on the numerical treatments of parabolic differential equations.— Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 4, 30, 65—74.
41. *В. К. Саульев.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
42. *Е. Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач.— ЖВМ и МФ, 1962, 2, 4, 549—568.
43. *Е. Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами.— В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 3. М., Изд-во МГУ, 1965, стр. 163—190.
44. *Е. Г. Дьяконов.* Экономические разностные методы, основанные на расщеплении разностного оператора, для некоторых систем уравнений в частных производных. Вычислительные методы и программирование. Сборник работ ВЦ МГУ, вып. 6. М., 1967, стр. 121—143.
45. *Н. Н. Яненко.* Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1966.
46. *А. А. Самарский.* Локально-одномерные схемы на неравномерных сетках.— ЖВМ и МФ, 1963, 3, 3, 5—63.
47. *А. А. Самарский.* Об одном экономическом алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1964, 4, 3, 580—585.

48. *J. Douglas, J. E. Gunn.* A general formulation of alternating direction methods. Parabolic and huperbolic problems. Part I.— Numer. Math., 1964, **6**, 5, 428—453.
49. *А. А. Самарский.* Некоторые вопросы теории разностных схем.— ЖВМ и МФ, 1966, **6**, 4, 665—686.
50. *Е. Г. Дьяконов.* О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру —ЖВМ и МФ, 1966, **6**, 1, 12—34.
50a. *Е. Г. Дьяконов.* Об одном итерационном методе решения систем конечно-разностных уравнений.— ДАН СССР, 1961, **138**, № 3.
51. *J. E. Gunn.* The solution of elliptic difference equations by semi-explicit iterative techniques.— SIAM J., Ser. B, Numer. Anal., 1965, **2**, N 1, 24—45.
52. *Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
53. *Л. В. Канторович.* Функциональный анализ и прикладная математика.— УМН, 1948, **3**, 6, 89—185.
54. *С. К. Годунов, Г. П. Прокопов.* Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильно-эллиптических задачах. М., 1968.
55. *Г. И. Марчук.* Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеорологическое изд-во, 1967.
56. *Г. И. Марчук, Ю. А. Кузнецов.* К вопросу об оптимальных итерационных процессах.— ДАН СССР, 1968, **181**, 6, 1331—1334.
57. *S. P. Frankel.* Convergence ratss of iterative treatments partial differential equations.— Math. Tables and Other Aids comput.— 1950, **4**, N 30, 65—74.
58. *E. L. Wachspress.* Extended application of alternating direction implicit iteration model problem theory.— J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, **11**, N 3, 994—1016.
59. *Л. В. Канторович* и *Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
60. *М. А. Красносельский, С. К. Крейн.* Итерационный процесс с минимальными невязками.— Матем. сборник, новая серия, 1952, **31**, 2, 315—334.
61. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами.— ДАН СССР, 1956, **108**, 3, 393—396.
62. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Об однородных разностных схемах.— ЖВМ и и МФ, 1961, **1**, 1, 5—63.
63. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках.— ЖВМ и МФ, 1962, **2**, 5, 812—832.
64. *А. А. Самарский.* О сходимости и точности разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений. — ЖВМ и МФ, 1962, **2**, 4, 603—634.
65. *В. И. Лебедев.* О задаче Дирихле и Неймана на треугольных и шестиугольных сетках.— ДАН СССР, 1961, **138**, 1, 33—36.
66. *В. И. Лебедев.* Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых задач математической физики.— ЖВМ и МФ, ч. I, 1964, **4**, 3, 449—465; ч. II, 1964, **4**, 4, 649—659.
67. *J. Douglas.* On the numerical integration of by implicit methods.— SIAM J., 1955, **3**, 1, 42—65.
68. *D. W. Peaceman, H. H. Rachford.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.— SIAM J., 1955, **3**, N 1, 28—41.
69. *J. Douglas, H. H. Rachford.* On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, N 2, 421—439.
70. *К. А. Багриновский, С. К. Годунов.* Разностные методы многомерных задач.— ДАН СССР, 1957, **115**, 3.
71. *Н. Н. Яненко.* Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, **125**, 6, 1207—1210.
72. *G. A. Baker, Jr., T. A. Oliphant.* An implicit numerical method for solving the two-dimensional heat equation.— Quart. Appl. Math., 1960, **17**, N 4, 361—373.
73. *Н. Н. Яненко.* Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов).— ДАН СССР, 1960, **134**, 5, 1034—1036.
74. *Н. Н. Яненко.* О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности.— Изв. высш. уч. зав., серия матем., 1961, **4** (23), 148—157.
75. *А. А. Самарский.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области.— ЖФМ и МФ, 1962, **2**, 5, 787—811.
76. *А. А. Самарский.* О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики.— Aplikace Matematiky, 1965, **10**, 2, 146—163.
77. *А. А. Самарский.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности.— ЖВМ и МФ, 1963, **3**, 5, 812—840.
78. *А. А. Самарский.* Локально-одномерные схемы для уравнений гиперболического типа с несколькими пространственными переменными.—ЖВМ и МФ, 1964, **4**, 4, 633—634.
79. *А. А. Самарский.* О принципе аддитивности при построении экономических разностных схем.— ДАН СССР, 1965, **165**, 6, 1253—1256.
80. *А. Н. Коновалов.* Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний.— ДАН СССР, 1962, **147**, 1, 25—27.
81. *И. В. Фрязинов.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи.— ЖВМ и МФ, 1964, **4**, 6, 1106—1111.

82. *И. В. Фрязинов.* О решении третьей краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в произвольной области локально-одномерным методом.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, 3, 487—502.
83. *И. В. Фрязинов.* Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа.— ЖВМ и МФ, 1968, 8, 2, 436—443.
84. *В. Б. Андреев.* О равномерной сходимости некоторых разностных схем.— ЖВМ и МФ, 1966, 6, 2, 238—250.
85. *В. Б. Андреев.* Об одном методе численного решения третьей краевой задачи для уравнения параболического типа в *p*-мерном параллелепипеде.— В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 6. Изд-во МГУ, 1967, стр. 64—75.
86. *В. Б. Андреев.* О разностных схемах с расщепляющимся оператором для общих *p*-мерных параболических уравнений второго порядка со смешанными производными.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, 2, 312—321.
87. *Г. И. Марчук, Н. Н. Яненко.* Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики.— В сб. «Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск, 1966.
88. *Е. Г. Дьяконов.* О некоторых разностных схемах для решения краевых задач.— ЖВМ и МФ, 1962, 2, 1, 57—79.
89. *Н. Н. Яненко.* О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений.— Сиб. матем. ж., 1964, 5, 6, 1431—1434.
90. *Г. И. Марчук.* Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды.— ДАН СССР, 1964, 156, 2.
91. *Н. Н. Яненко.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1966.
92. *Ю. Е. Бояринцев.* О сходимости метода расщепления и о локальном критерии коррективности для разностных уравнений с переменными коэффициентами.— В сб. «Некоторые вопросы прикладной и вычислительной математики». Новосибирск, 1966.
93. *С. К. Годунов, А. В. Забродин.* О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач.— ЖВМ и МФ, 1962, 2, 4, 706—708.
94. *B. Hubbard.* Alternating direction schemes for the heat equation on a general domain.— J. SIAM, Ser. B, Numer. Anal., 2, N 3, 448—463.
95. *B. Hubbard.* Some locally one-dimensionale difference schemes for parabolic equations on an arbitrary region.— Math. Comput., 1966, 20, N 93, 53—59.