В. А. Диткин.

и др. Задача вычисления интегралов от функций из некоторых классов, инвариантных относительно вращения пространства, рассматривалась (1962 г.) С. Л. Соболевым.

Применению теоретико-численных методов к вопросам численного интегрирования посвящено несколько работ Н. М. Коробова (1957—1963 гг.), Н. С. Бахвалова (1959—1963 гг.) и др. Советскими математиками выполнены исследования по применению метода Монте-Карло к задаче численного интегрирования. Предложено несколько методов приближенного вычисления бесконечномерных и континуальных интегралов.

Теория приближенных методов решения операторных уравнений развивалась, с одной стороны, в связи с необходимостью приближенного решения более сложных задач, систематизации и единой трактовки многих методов, полученных в результате предшествующего развития приближенных методов классического анализа, с другой стороны, в связи с бурным развитием функционального анализа и необходимостью усиления его связи с теорией приближенных методов. Большая заслуга в разработке этих методов принадлежит советским математикам. Наиболее изученным и часто применяющимся на практике методом решения нелинейных уравнений является метод Ньютона, впервые исследованный для операторных уравнений Л. В. Канторовичем (1948 г.). Несколько раньше (1945—1947 гг.) Канторович предложил один из градиентных методов решения операторных уравнений — метод наискорейшего спуска. Впоследствии были построены различные варианты этих методов, предложены и исследованы методы, близкие к методам Ньютона и наискорейшего спуска. В разработке общей теории приближенных методов принимали участие также М. А. Красносельский, С. Л. Соболев, Г. С. Салехов, С. Г. Крейн и др. Существенное влияние на развитие теории приближенных и численных методов решения задач оказывает функциональный анализ. Его идеи и методы широко применяются при построении их, исследовании и формулировке.

Рассмотрим результаты, полученные советскими математиками в области приближенных и численных методов.

Метод сеток

Большинство задач, возникающих в физике и технике, связано с линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (уравнениями математической физики). Поэтому центр тяжести в развитии численных методов в послед-

ние годы переносится на задачи математической физики. Универсальным и чрезвычайно эффективным методом решения этих задач оказался метод конечных разностей — метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение нелинейных уравнений в частных производных к решению системы конечного порядка линейных алгебраических уравнений. Назовем лишь некоторые области, в которых с успехом применяется метод конечных разностей: расчет потенциальных полей различной физической природы (в простейшем случае задачи приводят к уравнению Лапласа), нестационарные линейные и нелинейные процессы теплопроводности в неоднородных средах, задачи газодинамики и магнитной гидродинамики, ядерной энергетики (например, расчет критического режима ядерного реактора), физики плазмы, метеорологии, статистические задачи теории упругости, задачи электродинамики, фильтрации.

Даже простейшие постановки большинства из перечисленных выше задач приводят к системам уравнений в частных производных. Решение столь сложных задач стало возможным лишь благодаря созданию ЭВМ, а также больших научных коллективов ученых, владеющих как искусством математической постановки прикладных задач, так и методами современной вычислительной математики.

Разностные аппроксимации используются в теории дифференциальных уравнений в качестве средства доказательства теорем существования. Именно такой смысл имеет часто употребляемое выражение «задача решена методом конечных разностей». При доказательстве разрешимости используются лишь асимптотические свойства разностных схем. Вопрос об алгоритме решения разностной задачи вообще не возникает. В вычислительной математике выражение «решить задачу методом конечных разностей» имеет другой смысл, оно означает, что указан алгоритм, позволяющий за конечное число действий найти приближенное решение задачи с заданной точностью. Этим определяется и новая проблематика теоретических исследований разностных методов.

Вычислительная практика привела к постановке ряда специфических проблем, таких, как 1) изучение устойчивости и точности численных методов, 2) создание универсальных алгоритмов, пригодных для решения на ЭВМ больших классов задач по стандартным программам, 3) оптимизация алгоритмов, т. е. выбор алгоритмов, позволяющих найти приближенное решение с заданной точностью ε при минимальной затрате машинного времени (при минимуме числа арифметических и логических операций $Q(\varepsilon)$).

Вопрос о минимизации числа действий (об экономичности алгоритмов) имеет принципиальное значение в связи с численным решением двумерных и трехмерных задач математической физики, таких, например, как задачи газовой динамики, магнитной гидродинамики, теории гетерогенных ядерных реакторов.

В последние 10—15 лет заметно увеличился удельный вес теоретических исследований в огромном потоке работ, посвященных применению разностных методов. Однако в целом развитие теории разност-

ных схем отстает от потребностей вычислительной практики. Это прежде всего относится к нелинейным задачам математической физики (например, к задачам газодинамики), для которых построены и широко применяются на практике различные разностные методы. Однако в большинстве случаев до сих пор нет полного теоретического обоснования этих методов.

В таком небольшом очерке, как наш, не представляется возможным дать даже краткий перечень работ советских математиков, посвященных различным вопросам, связанным с применением и теорией численных методов. Наибольшее внимание в очерке уделяется вопросам, связанным с теорией разностных схем для классических уравнений математической физики второго порядка (в основном для эллиптических и параболических уравнений) и характеристикой некоторых важных направлений развития теории разностных схем. Поэтому упоминание или неупоминание нами тех или иных исследований не должно трактоваться как попытка оценки.

К настоящему времени разработано много разностных методов, позволяющих решать сложнейшие задачи математической физики, решение которых практически невозможно другими методами. Решение этих задач имеет большое значение не столько с точки зрения демонстрации возможностей разностных методов, сколько с точки зрения приложений. Поэтому мы на них не останавливаемся. Мы не касаемся также вопросов, связанных с применением разностных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1

Общие вопросы теории разностных схем

Метод конечных разностей (называющийся также методом сеток) для решения дифференциальных уравнений состоит в следующем [1].

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где f и μ — заданные функции (входные данные задачи). Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек (узлов), называющимся сеткой. Плотность расположения узлов сетки характеризуется параметром или группой параметров h ($h > 0$). Чем меньше h (шаг сетки), тем гуще сетка ω_h.

---

[1] А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений.— ДАН СССР, 1955, т. 100, № 6, стр. 1045—1048. В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 171 с.

Производные, входящие в (1) и (2), заменяются (аппроксимируются) с помощью соответствующих разностных отношений. В результате получается задача (разностная схема)

$$L_h y^h = \varphi^h, \quad x \in \overset{0}{\omega}_h, \quad l_h y^h = \chi^h, \quad x \in \gamma_h, \tag{3}$$

где L_h и l_h — операторы, действующие на сеточные функции y^h, заданные для $x \in \omega_h = \overset{0}{\omega}_h + \gamma_h$ ($\overset{0}{\omega}_h$ — внутренние, γ_h — граничные узлы).

Решение y^h разностной задачи (3) есть сеточная функция, заданная в узлах сетки ω_h. Меняя h, т. е. выбирая различные сетки ω_h, получаем последовательность $\{y^h\}$, зависящую от параметра h. Таким образом, следует рассматривать семейство схем (3_h), соответствующих различным значениям параметра h. Естественно возникают вопросы о 1) разрешимости разностной задачи при любых допустимых входных данных φ^h и χ^h, 2) характере зависимости y^h от входных данных, 3) сходимости $\{y^h\}$ к решению исходной задачи при $h \to 0$ и скорости сходимости (о порядке точности). Все эти вопросы являются программой-минимумом любого исследования по теории разностных схем.

Пусть U, F — классы функций, определенных в области $G + \Gamma$, Φ — класс функций, определенных на Γ, так что $Lu \in F$, $lu \in \Phi$, если

$$u \in U, \quad \|u\|_U = \|u\|_{(1)}, \quad \|u\|_F = \|u\|_{(2)}, \quad \|u\|_\Phi = \|u\|_{(3)}$$

являются соответствующими нормами. Обозначим U_h, F_h, Φ_h соответствующие классы сеточных функций с нормами $\|y\|_{(1_h)}$, $\|y\|_{(2_h)}$, $\|y\|_{(3_h)}$, так что $L_h y \in F_h$, $l_h y \in \Phi_h$, если $y \in U_h$. Предполагается, что нормы согласованы, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \|\mathcal{P}_\alpha^h u\|_{(\alpha_h)} = \|u\|_{(\alpha)}, \quad u \in U \text{ при } \alpha = 1, \quad u \in F \text{ при } \alpha = 2,$$

$$u \in \Phi \text{ при } \alpha = 3,$$

где $\mathcal{P}_1^h$, $\mathcal{P}_2^h$, $\mathcal{P}_3^h$ — операторы, отображающие соответственно U на U_h, F на F_h, Φ на Φ_h.

После того как введены сеточные пространства, определяются понятия аппроксимации, сходимости, точности и корректности схем.

Погрешность разностной схемы (3) характеризуется числом $\|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)}$, где u — решение задачи (1), (2). Если $\|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)} \to 0$ при $h \to 0$, то схема (3) сходится; если $\|y^h - \mathcal{P}_h^1 u\|_{(1_h)} = O(h^k)$, то схема (3) имеет точность порядка k (сходится со скоростью $O(h^k)$). Подставляя $y^h = \mathcal{P}_1^h u + z^h$ в (3), получаем для погрешности z^h условия

$$L_h z^h = \psi^h, \quad l_h z^h = \nu^h, \tag{4}$$

где

$$\psi^h = \varphi^h - L_h(\mathcal{P}_1^h u) = (\varphi^h - L_h(\mathcal{P}_1^h u)) - \mathcal{P}_2^h(f - Lu),$$

$$\psi^h \in F_h, \quad \nu^h = \chi^h - l_h(\mathcal{P}_1^h u) = (\chi^h - l_h \mathcal{P}_1^h u) - \mathcal{P}_3^h(\mu - lu), \quad \nu^h \in \Phi_h,$$

являются погрешностями разностной аппроксимации уравнения (1) и граничного условия (2) схемой (3) на решении задачи (1), (2). Если

$$\|\psi^h\|_{(2_h)} = O(h^k), \quad \|\nu^h\|_{(3_h)} = O(h^k), \quad k > 0,$$

то говорят, что схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2) на ее решении с k-м порядком (сходится со скоростью $O(h^k)$). При построении разностных схем обычно оценивают отдельно погрешности разностных аппроксимаций L, l и правых частей на достаточно гладких функциях. Однако в конечном счете точность метода определяется аппроксимацией $Lu - f$ и $lu - \mu$ на решении исходной задачи.

Одним из основных понятий теории разностных схем является понятие устойчивости, возникшее в результате анализа результатов вычислений. На необходимость введения такого понятия, по-видимому, впервые обратил внимание Нейман (1950 г.), как это следует из статьи О'Брайена, Хаймана и Каплана (1951 г.). Однако четкие формулировки понятия устойчивости как аналога корректности для дифференциальных уравнений и теоремы о том, что из устойчивости и аппроксимации следует сходимость, впервые даны советскими математиками В. С. Рябеньким (1952 г.), А. Ф. Филипповым (1955 г.). Подробно эти результаты изложены в монографии (1956 г.) Рябенького и Филиппова. Вопрос об устойчивости разностных схем рассматривал (1954 г.) также Н. Н. Мейман. Приведем сначала определение корректности разностной схемы, следуя в основном работе (1955 г.) А. Ф. Филиппова.

Разностная схема (3) корректна (поставлена корректно), если при достаточно малом h 1) решение y^h задачи (3) существует и определено однозначно при любых входных данных φ^h и χ^h, 2) решение y^h непрерывно зависит от входных данных, причем эта непрерывная зависимость равномерна по h; иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, не зависящее от h при $0 < h < h_0$, что из соотношений

$$\|\varphi^h - \tilde{\varphi}^h\|_{(2_h)} < \delta, \quad \|\chi^h - \tilde{\chi}^h\|_{(3_h)} < \delta, \quad h < h_0,$$

следует неравенство

$$\|y^h - \tilde{y}^h\|_{(1_h)} < \varepsilon,$$

где y^h — решение задачи (3), а $\tilde{y}^h$ — решение этой же задачи с данными $\tilde{\varphi}^h$, $\tilde{\chi}^h$.

Это свойство непрерывной зависимости решения задачи (3) относительно входных данных и называют устойчивостью схемы (3). Если L_h и l_h — линейные операторы, то приведенное выше определение устойчивости эквивалентно такому определению: схема (3) устойчива, если при любых φ^h, χ^h и $0 < h < h_0$ для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\|y^h\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|\varphi^h\|_{(2_h)} + M_2 \|\chi^h\|_{(3_h)}, \tag{5}$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h, φ^h и χ^h.

Если схема (3) корректна, то отсюда и из (4) следует оценка для погрешности $z^h = y^h - \mathcal{P}_1^h u$

$$\|z^h\|_{(1_h)} = \|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)} \leqslant M_1 \|\psi^h\|_{(2_h)} + M_2 \|\nu^h\|_{(3_h)}. \tag{6}$$

Таким образом, верна теорема: из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы, причем порядок точности определяется порядком аппроксимации. Отсюда следует, что порядки аппроксимации уравнения и граничных условий должны быть согласованы.

В общем случае задается не одно граничное условие (2), а группа дополнительных условий $l_i u = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если (1) — уравнение параболического или гиперболического типа, то среди дополнительных условий есть начальные условия, например при $t = 0$. Хотя устойчивость по начальным данным учитывается указанным выше определением, однако вопрос об устойчивости нестационарных (эволюционных) схем целесообразно рассматривать отдельно, выделяя аргумент t.

Пусть $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots\}$ — сетка с шагом τ по переменному t, а $\omega_h = \{x_i\}$ — сетка по остальным переменным $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $h = (h_1, \ldots, h_p)$ — набор шагов h_α по переменным x_α, $\|h\|^2 = h_1^2 + \ldots + h_p^2$. Обычно рассматриваются разностные схемы, связывающие значения сеточной функции для двух, трех и более значений $t = j\tau$ (двухслойные, трехслойные и т. д.). Простейшей является двухслойная схема ($y^j = y(x, t_j)$, $x \in \omega_h$):

$$By^{j+1} = Cy^j + \tau\varphi^j, \tag{7}$$

где $B = B(x, h, \tau; t)$ и $C = C(x, h, \tau; t)$ — разностные операторы (матрицы). Ее можно записать в одной из канонических форм:

$$y^{j+1} = Sy^j + \tau\tilde{\varphi}^j \qquad (\tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi, \quad S = B^{-1}C), \tag{8}$$

$$B\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j \qquad \left(A = \frac{B - C}{\tau}\right), \tag{9}$$

где S — оператор перехода со слоя на слой.

Дадим схематическое определение устойчивости по правой части и начальным данным двухслойной схемы, не претендуя на его общность. Пусть $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(1^*)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ — нормы на линейном множестве H_h сеточных функций от $x \in \omega_h$, удовлетворяющих однородным условиям на границе γ_h сетки ω_h. Операторы B и C предполагаются линейными.

Схема (9) устойчива по правой части и начальным данным, если при достаточно малых $\tau \leqslant \tau_0$ и $|h| \leqslant h_0$ существуют такие положительные постоянные M_1 и M_2, не зависящие от h, τ и выбора y^0, φ^j, что для решения уравнения (9) при любых y^0 и φ^j верна оценка

$$\|y^j\|_{(1)} \leqslant M_1 \|y^0\|_{(1^*)} + M_2 \max_{1 \leqslant j' < j} \|\varphi^{j'}\|_2, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Если $\varphi = 0$, то это неравенство выражает устойчивость по начальным данным; полагая $y^0 = y(x, 0) = 0$, получаем условие устойчивости по

правой части. Подставляя $y^j = z^j + \mathcal{P}_1^h u^j$, где y^j — решение уравнения (9), u — решение исходной задачи, получаем для погрешности z^j уравнение (9) с правой частью ψ^j, являющейся погрешностью аппроксимации схемы. Если схема (9) устойчива по правой части и $y^0 = u(x, 0)$, $x \in \omega_h$, то

$$\|z^j\|_{(1)} = \|y^j - (\mathcal{P}_1^h u)^j\|_{(1)} \leqslant M_2 \max_{0 \leqslant j' < j} \|\psi^{j'}\|_2, \tag{11}$$

т. е. из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы.

Вопрос об устойчивости эволюционных схем по начальным данным рассматривался В. С. Рябеньким (1952 г.). Им определено понятие устойчивости в теории разностных уравнений как естественный аналог понятия корректности задачи Коши в теории уравнений в частных производных. Устойчивость рассматривалась как некоторое свойство семейства разностных уравнений, зависящего от шага сетки. Схема называлась устойчивой по начальным данным, если выполнено неравенство

$$\|y^j\|_{(1)} \leqslant M \|y^0\|_{(1*)}, \tag{12}$$

где M не зависит от шага сетки, а $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(1*)}$ — нормы в пространстве сеточных вектор-функций от x. В кандидатской диссертации (1952 г.) В. С. Рябенького указаны необходимые и достаточные спектральные признаки устойчивости схем для гиперболических и параболических по И. Г. Петровскому систем дифференциальных уравнений (с коэффициентами, зависящими только от t). А. Ф. Филиппов показал (1955 г.), что из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части.

Достаточные признаки устойчивости для самосопряженных задач с помощью метода разделения переменных получены А. Ф. Филипповым, В. С. Рябеньким, С. К. Годуновым, А. И. Жуковым и др. Предложенное Нейманом определение устойчивости распространено на случай несамосопряженных одномерных граничных задач с двумя боковыми границами $x = a$ и $x = b$ К. И. Бабенко и И. М. Гельфандом (доклад на II Всесоюзной конференции по функциональному анализу, 1956 г.). В 1962 г. С. К. Годунов и В. С. Рябенький ввели понятие спектра семейства операторов, зависящих от шага сетки, и доказали, что расположение спектра оператора внутри единичного круга необходимо для устойчивости в смысле (12).

Практические применения спектрального метода исследования устойчивости относились в основном к уравнениям с постоянными коэффициентами. Устойчивость доказывалась в норме $L_2(\omega_h)$. Вопрос о равномерной устойчивости (в норме $C(\omega_h)$) рассматривался С. И. Сердюковой (1963 г.). Пользуясь разностной функцией Грина для задачи Коши, она нашла достаточные условия устойчивости по начальным условиям для двухслойных схем с постоянными коэффициентами.

В течение длительного времени существовало мнение, что достаточно установить критерии устойчивости схем для уравнений с постоянными коэффициентами, для суждения же об устойчивости схем, соответствующих уравнениям с переменными коэффициентами,

можно пользоваться принципом замороженных коэффициентов, высказанным (1950 г.) Нейманом и Рихтмайером . Этот принцип состоит в следующем. Схема считается устойчивой, если устойчивы схемы с постоянными коэффициентами, построенные по заданной схеме для всех возможных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, совпадающими со значениями коэффициентов данного уравнения в точках (x, t) области его задания. Хотя этот принцип и носил характер гипотезы, однако он широко использовался в качестве практического критерия многими исследователями. А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (1961 г.) построен пример схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

которая безусловно устойчива в случае непрерывных $k(x)$ и неустойчива (при любых h и τ) в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $k(x)$.

И. В. Коновальцев построил (1965 г.) пример схемы

$$y_{i+1} = 2a_i y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad |a_i| \leqslant \alpha < 1,$$

устойчивой в случае постоянных коэффициентов и неустойчивой в классе непрерывных коэффициентов $a(x)$ (если модуль непрерывности $\omega(x)$ функции $a(x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\omega(x)}{x} = \infty$).

Приведенные примеры показывают, что принцип замороженных коэффициентов, вообще говоря, неверен. Необходимо определить область его применимости. С другой стороны, следует признать, что при изучении вопроса об устойчивости сложных систем уравнений с переменными коэффициентами, например уравнений газодинамики, принцип замороженных коэффициентов оказывается полезным в качестве необходимого признака устойчивости и позволяет отбросить заведомо неустойчивые схемы. Эффективным методом исследования схем для линейных уравнений математической физики с переменными коэффициентами является энергетический метод.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, сделаем некоторые замечания о понятии аппроксимации и связанном с ним требовании к устойчивости схем по правой части.

Погрешность аппроксимации является простейшей априорной характеристикой качества схемы. Из определения устойчивости схемы по правой части вытекает, что погрешность разностного метода z и погрешность аппроксимации ψ следует оценивать, вообще говоря, в разных нормах.

Весьма часто пользуются требованием аппроксимации разностным оператором дифференциального оператора в каждом узле сетки. Однако такой «естественный» критерий локальной аппроксимации слишком грубый и может дать неверное априорное представление о качестве схемы. К такому выводу приводит, в частности, изучение сходимости и порядка точности схем для уравнений с разрывными коэффициента-

Президиум собрания, посвященного награждению Института прикладной математики АН СССР орденом В. И. Ленина. Слева направо: М. А. Лаврентьев, Л. И. Седов, А. Н. Тихонов, М. В. Келдыш, А. Н. Куренков, А. К. Платонов, В. Ф. Дьяченко, А. И. Торжевский. 1967 г.

ми, а также для случая неравномерных сеток. Поясним это на простых примерах. Рассмотрим уравнение с разрывными коэффициентами $k(x)$

$$(ku')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

и аппроксимируем его на сетке $\omega_h = \left\{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = \frac{1}{N}\right\}$ схемой

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] = -f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \mu,$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad a_i = 0{,}5\left[k(x_{i-1} + 0) + k(x_i - 0)\right].$$

Пусть $k(x)$ — кусочно-постоянная функция, имеющая разрыв в иррациональной точке $\xi = x_n + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Тогда $\psi = O\left(\frac{1}{h}\right)$ в соседних с разрывным узлах $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, т. е. схема не аппроксимирует уравнение в этих узлах. Тем не менее схема равномерно (в норме $\| y \|_c = \max\limits_{\omega_h} | y_i |$) сходится со скоростью $O(h)$ на любой последовательности сеток ω_h. В этом случае аппроксимация понимается в норме

$$\| \psi \|_{(2)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^{i} h\psi_k \right|. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\| \psi \|_{(2)} = O(h)$.

Рассмотрим еще один пример. На произвольной неравномерной сетке $\omega_h = \{x_i,\ i = 0, \ldots, N,\ x_0 = x_N = 1,\ h_i = x_i - x_{i-1}\}$ схема

$$\Lambda y_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right] = -f(x_i), \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}),$$

для уравнения $u'' = -f(x)$ имеет первый локальный порядок аппроксимации. Однако она имеет второй порядок аппроксимации в одной из норм вида

$$\|\psi\|_{(2)} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left|\sum_{k=1}^{i} \hbar_i \psi_k\right|, \tag{14}$$

$$\|\psi\|_{(2)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_i \psi_k\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

и равномерно сходится со скоростью $O(h_0^2)$, $h_0 = \max h_i$. Наконец, схема

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h_{i+1}}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{0{,}5\,(h_{i+1} + h_{i+2})} - \frac{y_i - y_{i-1}}{0{,}5\,(h_i + h_{i+1})}\right] = -f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

не аппроксимирует уравнения $u'' = -f(x)$ ни в одной точке сетки ($\psi_i = O(1)$) на произвольной неравномерной сетке, и тем не менее она имеет второй порядок точности, так что $\|y - u^h\|_C = O(h_0^2)$.

Эти примеры показывают, что необходимо отказаться, вообще говоря, от требования локальной аппроксимации, заменив его требованием некоторой интегральной (суммарной) аппроксимации или аппроксимации в слабом смысле. Выбор нормы для оценки погрешности аппроксимации, очевидно, зависит от структуры дифференциального оператора и способа его разностной аппроксимации.

С другой стороны, оценку близости решения разностной и непрерывной задач желательно получить в возможно более сильной норме (например, в норме сеточных аналогов пространств C, W_2^2, W_2^1). Отсюда возникает проблема получения оценок решения разностной задачи через правую часть, взятую в более слабой норме (например, в W_2^{-1}, L_2). В общем случае погрешность аппроксимации представляется в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых оценивается в своей норме:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \cdots + \psi_\alpha + \cdots + \psi_m, \\ \|\psi\|_{(2)} &= \|\psi_1\|_{(2_1)} + \cdots + \|\psi_\alpha\|_{(2_\alpha)} + \cdots + \|\psi_m\|_{(2_m)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Это, например, справедливо при оценке порядка точности в норме W_2^1 или C разностной схемы для многомерного эллиптического уравнения (здесь $\|\psi_\alpha\|_{(2\alpha)}$ — аналоги норм W_2^{-1}).

В случае эволюционных схем оценки ψ носят еще более сложный характер, например

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{m} (\overset{0}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*), \quad \|\psi\|_{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\|\psi_\alpha^*\|_{(2_\alpha)} + \|\overset{0}{\psi}_\alpha\|_{(2_\alpha^*)} + \|(\overset{0}{\psi}_\alpha)_{\bar{t}}\|_{(2_\alpha^*)}\right], \tag{17}$$

$$\psi_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(\psi^j - \psi^{j-1}),$$

где $\|\cdot\|_{(2_\alpha)}$, $\|\cdot\|_{(2_\alpha^*)}$ — нормы в пространстве сеточных функций, заданных на ω_h («на слое»).

Связь между нормами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ легко проиллюстрировать на примере уравнения $Ay = \varphi$, где A — линейный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве H, являющемся аналогом пространства сеточных функций $y(x)$, $x \in \omega_h$. Пусть $(,)$ — скалярное произведение, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ — норма в H, $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ — норма в энергетическом пространстве H_A (аналоге пространства W_2^1). Если $A = A^* > 0$ — самосопряженный и положительный оператор, т. е. $(Ay, v) = (y, Av)$ и $(Ay, y) > 0$ для всех $y \neq 0$ из H, то выполняется точное равенство $\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}}$. Если $(Ay, y) \geqslant \gamma(A_0 y, y) > 0$ для всех $y \in H$, $y \neq 0$, где $A_0 = A_0^* > 0$, $\gamma > 0$, то справедлива оценка $\|y\|_{A_0} \leqslant \frac{1}{\gamma}\|\varphi\|_{A_0^{-1}}$. Из уравнения $Ay = \varphi$ видно, что $\|Ay\| = \|\varphi\|$. Если же $\|Ay\| \geqslant \gamma\|A_0 y\|$, то $\|A_0 y\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\|\varphi\|$.

Таким образом, существует естественная связь между нормами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$: решение y в H_A (в сеточной норме $\overset{0}{W}{}_2^1$, если A — разностный оператор, соответствующий эллиптическому оператору второго порядка) оценивается через правую часть φ в негативной норме $\|\varphi\|_{A^{-1}}$ (в $\overset{0}{W}{}_2^{-1}$) и т. д. Отсюда следует, что из аппроксимации в $H_{A^{-1}}$ (в H) вытекает сходимость схемы $Ay = \varphi$ в H_A (в H_{A^2} при $A = A^\alpha > 0$). Для двухслойной схемы (9) решение оценивается в H_A через правую часть в $H_{A^{-1}}$, точнее, $\|y\|_A$ оценивается через $\|\varphi\|_{A^{-1}} + \|\varphi_{\bar{t}}\|_{A^{-1}}$ (сравни с (17)).

Еще в 1928 г. Курант, Фридрихс и Г. Леви получили энергетическое неравенство для решения разностного уравнения колебаний струны. В дальнейшем И. Г. Петровским, О. А. Ладыженской и другими при изучении методом конечных разностей вопроса о разрешимости различных задач математической физики были получены с помощью энергетического метода неравенства, выражающие устойчивость некоторых разностных схем в нормах, обеспечивающих компактность решений семейства разностных уравнений. Компактность использовалась для доказательства существования решения дифференциальных уравнений. При дополнительном предположении о единственности решения дифференциального уравнения из компактности следует сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения. Наиболее широко использовала (1953 г.) энергетический метод О. А. Ладыженская. Она получила также некоторые разностные аналоги

теорем вложения С. Л. Соболева. Первые теоремы вложения для сеточных функций были получены (1939, 1940 гг.) С. Л. Соболевым.

При доказательстве теорем существования важны лишь асимптотические (при $h \to 0$) свойства схем. В теории разностных схем обычно предполагается, что решение исходного дифференциального уравнения существует и единственно. Устойчивость можно понимать в более слабых нормах, чем те, которые обеспечивают компактность и существование. Разностные схемы, представляющие интерес для практики, зачастую носят значительно более сложный характер, чем схемы, применяющиеся в теории дифференциальных уравнений.

В. И. Лебедев применял (1960, 1961 гг.) энергетический метод для получения априорных оценок решения разностных задач, соответствующих задачам Дирихле и Неймана, а также третьей краевой задаче для уравнения Лапласа. Несколько раньше (1958 г.) он получил априорную оценку для неявной схемы, аппроксимирующей уравнение типа С. Л. Соболева с правой частью $f = \operatorname{div} \vec{F}$; при этом правая часть φ разностной схемы также бралась в «дивергентном виде» $\varphi = \operatorname{div}_h F$, где div_h — разностный аналог оператора div. Получена априорная оценка решения разностной задачи в норме $W_2^{(1)}$ через F в норме L_2. В случае одного измерения на сетке $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N\}$ соответствующая норма для φ имеет вид

$$\|\varphi\|_{(2)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} hF_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для однородных разностных схем, соответствующих одномерному эллиптическому уравнению, А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским получены (1961 г.) равномерные оценки решения через правую часть в слабой норме (13), А. А. Самарским (1963 г.) — оценки в L_p, где $p = 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ — любое число, для однородных разностных схем, аппроксимирующих многомерное эллиптическое уравнение вида $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = -f$ в произвольной области; правая часть оценивалась в слабой норме, аналогичной (15).

А. А. Самарский исследовал (1961—1963 гг.) устойчивость семейств неявных однородных схем с весами для одномерных линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического (второго и четвертого порядков) и гиперболического (второго порядка) типов с разрывными коэффициентами при краевых условиях общего вида, а также для многомерных параболических уравнений. Например, получены априорные оценки решения в нормах $W_2^{(1)}$ и L_{2^n} $(n = 1, 2, \ldots)$ через правую часть $\psi = \psi^* + \tilde{\psi}$ в составной норме

$$\|\psi\|_{(2)} = \|\psi^*\|_{(2_1)} + \|\tilde{\psi}\|_{(2_2)} + \|\tilde{\psi}_{\bar{t}}\|_{(2_2)},$$

где $\|\cdot\|_{(2_2)}$ — слабая норма вида (13), а $\|\cdot\|_{(2_1)}$ — одна из норм $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_L$ или (15). Получены также априорные оценки для несамосопряженных уравнений с разрывными коэффициентами.

В работах (1961—1966 гг.) Ю. Е. Бояринцева и Н. Н. Яненко для изучения устойчивости уравнений с переменными коэффициентами используется прямой алгебраический метод, позволяющий сформулировать теоремы сравнения разностных схем, т. е. теоремы, указывающие, при каких условиях из корректности одной разностной схемы следует корректность другой. И. В. Фрязинов обосновал (1961 г.) устойчивость по начальным данным в норме $L_2(\omega_h)$ для схем с весами, аппроксимирующих уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

В последние годы (1961—1966 гг.) активно изучались экономичные разностные схемы переменных направлений для широкого класса уравнений математической физики. Для областей специального вида (прямоугольник, параллелепипед) рассматривались так называемые схемы с расщепляющимся или факторизованным оператором. Устойчивость по начальным данным и правой части большого числа двухслойных и трехслойных схем подобного типа исследована с помощью энергетического метода В. Б. Андреевым, Е. Г. Дьяконовым, А. Н. Коноваловым, А. А. Самарским.

Н. Н. Яненко при исследовании устойчивости построенных им (1959, 1960 гг.) экономичных схем для многомерных уравнений теплопроводности и уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами использовал спектральный метод, а для двумерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае прямоугольной области (1962 г.) — прямой алгебраический метод. Во всех случаях доказывается устойчивость в L_2 при дополнительном условии $\frac{\tau}{h^2} \leqslant \text{const}$ или $\frac{\tau}{h} \leqslant \text{const}$.

Указанные выше работы выполнены в связи с изучением разностных схем для дифференциальных уравнений конкретного вида.

В работах (1965—1967 гг.) А. А. Самарского развита конструктивная теория устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем (являющихся аналогами нестационарных уравнений математической физики). Разностные схемы определяются как разностные (по переменному t) уравнения с операторными коэффициентами, заданными на абстрактных линейных нормированных пространствах H_h (являющихся аналогами пространств сеточных функций, зависящих от шага сетки h). Устойчивость изучается вне связи с аппроксимацией.

Отправным пунктом исследования является запись разностных схем в некоторой канонической форме. Любая двухслойная схема

$$B_1 y^{j+1} + B_0 y^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad y^0 \in H_h,$$

с линейными операторами B_0 и B_1, заданными на H_h, может быть записана на равномерной сетке $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots\}$ в виде

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A y^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad y^0 \in H_h,$$

где $A = B_0 + B_1$, $B = \tau B_1$. Трехслойная схема

$$B_2 y^{j+1} + B_1 y^j + B_0 y^{j-1} = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad y^0, y^1 \in H_h,$$

где B_0, B_1, B_2 — линейные операторы, заданные на H_h и зависящие, вообще говоря, от $t_j = i\tau$, записывается в каноническом виде

$$B\frac{y^{j+1}-y^{j-1}}{\tau}+\tau^2 R\frac{y^{j+1}-2y^j+y^{j-1}}{\tau^2}+Ay^j=\varphi^j, \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,$$

где B, R и A линейно выражаются через B_0, B_1 и B_2.

Устойчивость исследуется в некотором исходном семействе схем, определяющемся требованиями общего характера, такими, например, как положительность, самосопряженность, гладкость по t операторов схемы. Ставится задача: выделить классы устойчивых схем, принадлежащих исходному семейству (найти необходимые и достаточные условия устойчивости). Формулировка условий устойчивости наиболее удобна, если H_h — вещественное гильбертово пространство (Г. П.). Так, если A — самосопряженный положительный (т. е. $(Ay, y) > 0$ для всех $y \neq 0$ из H_h) и постоянный (не зависящий от t) оператор, а B — постоянный несамосопряженный положительный оператор, то условие $B \geqslant \frac{1}{2}\tau A$ или $(Bx, x) \geqslant \frac{1}{2}\tau\,(Ax, x)$ при всех $x \in H_h$ необходимо и достаточно для устойчивости двухслойной схемы по начальным данным (при $\varphi = 0$) в норме $\| y \|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ (в H_A), т. е. для выполнения неравенства $\| y_j \|_A \leqslant \| y^0 \|_A$ при $\varphi = 0$. В случае переменных A и B это же условие достаточно для устойчивости, если $A = A\,(t)$ удовлетворяет условию Липшица по t.

Для схемы с весами

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+A\,(\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)\,y^j)=\varphi^j,$$

где $A = A^* > 0$, получаем $B = E + \sigma\tau A$ (E — единичный оператор) и условие устойчивости $B \geqslant \frac{1}{2}\,\tau A$ выполняется при $\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}$.

Трехслойная схема устойчива по начальным данным, если A и R — постоянные самосопряженные и положительные ($A > 0$, $R > 0$) операторы, а $B \geqslant 0$ и выполняется операторное неравенство $R > \frac{1}{4}A$. Условия $B \geqslant \frac{1}{2}\,\tau A$ и $R > \frac{1}{4}A$ достаточны для устойчивости и по правой части в случае переменных операторов A, B и R. Заметим, что конкретная структура операторов A, B, и R не задается и нигде не используется, что дает возможность применять теорию к самым разнообразным конкретным схемам, принадлежащим исходному семейству. А. А. Самарским сформулированы (1967 г.) простые правила проверки устойчивости конкретных схем.

Условия устойчивости $B \geqslant \frac{1}{2}\,\tau A$ и $R > \frac{1}{4}A$ оставляют произвол в выборе операторов B и R при заданном операторе A (который определяется, как правило, исходной задачей). Поэтому, оставаясь в классе устойчивых схем, можно получать путем изменения B или R

устойчивые схемы заданного качества (удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям, таким, как экономичность, определенный порядок аппроксимации и др.). Этот метод регуляризации разностных схем позволяет, в частности, построить абсолютно устойчивые экономичные двухслойные и трехслойные схемы для широкого класса уравнений математической физики.

Опыт применения ЭВМ показывает, что необходимо развивать универсальные вычислительные методы, пригодные для решения как можно более широких классов задач и характеризующиеся единообразием вычислительной процедуры. Класс задач K_0 определяется заданием типа дифференциального уравнения, дополнительных (краевых, начальных) условий и функционального пространства, которому принадлежат коэффициенты дифференциального уравнения. Универсальные схемы должны удовлетворять требованиям сходимости и нужного порядка точности, а также требованию корректности (разрешимости и устойчивости) на любой последовательности сетки для любой задачи из рассматриваемого класса K_0. Для того чтобы построить теорию разностных схем, необходимо задать исходное семейство S_0 допустимых схем. Теоретическое исследование состоит из нескольких этапов: 1) для K_0 задается исходное семейство схем S_0, имеющих некоторый порядок аппроксимации в более узком классе $K_1 \subset K_0$ задач (например, для уравнений с достаточно гладкими коэффициентами), 2) выделяется семейство $S_1 \subset S_0$ корректных схем, 3) из S_1 выделяется семейство S_2 схем, сходящихся в K_0, 4) на S_2 ищутся наилучшие схемы, оптимальные в некотором смысле (по порядку точности в K_0 и по некоторым другим характеристикам, например по числу арифметических действий, простоте реализации и др.).

Требование единообразия или однородности вычислительного алгоритма для класса задач приводит к понятию однородных разностных схем (А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, 1950—1964 гг.). Большое значение имеет, в частности, проблема выделения семейства однородных схем или схем сквозного (непрерывного) счета, которые позволяли бы решать уравнения математической физики как с непрерывными, так и с разрывными коэффициентами, не прибегая к явному выделению линий разрыва и изменению схемы в их окрестности. Задачи с разрывными коэффициентами встречаются очень часто в физике и технике (например, задачи о диффузии нейтронов или о термическом режиме в реакторе, состоящем из большого числа зон с различными физическими свойствами, о движении границ фазовых переходов — задача Стефана — и др.).

Однородная схема определяется с помощью зависящего от параметра (шага сетки) функционала (производящего функционала) от функции дискретного аргумента (сеточной функции $\bar{u}(j)$) и вектор-функции $\bar{k}(s)$ непрерывного аргумента (коэффициентов дифференциального уравнения). Например, линейный относительно сеточной функции одного переменного производящий функционал имеет вид

$$\Phi^h[\bar{u}(j), \bar{k}(s)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\bar{k}(s)]\,\bar{u}(j) + B^h[\bar{k}(s)],$$

где $A_j^h[\overline{k}(s)]$, $B_j^h[\overline{k}(s)]$ — h-параметрические (шаблонные) функционалы вектор-функций, заданных на шаблоне $-m_1 \leqslant s \leqslant m_2$. Чтобы получить отсюда однородную схему $L_h^{(k)}$ для дифференциального уравнения с вектор-коэффициентами $k(x)$, надо положить $\overline{u}(j) = u^h(x + jh)$, $\overline{k}(s) = k(x + sh)$, где x — любой узел сетки с шагом h:

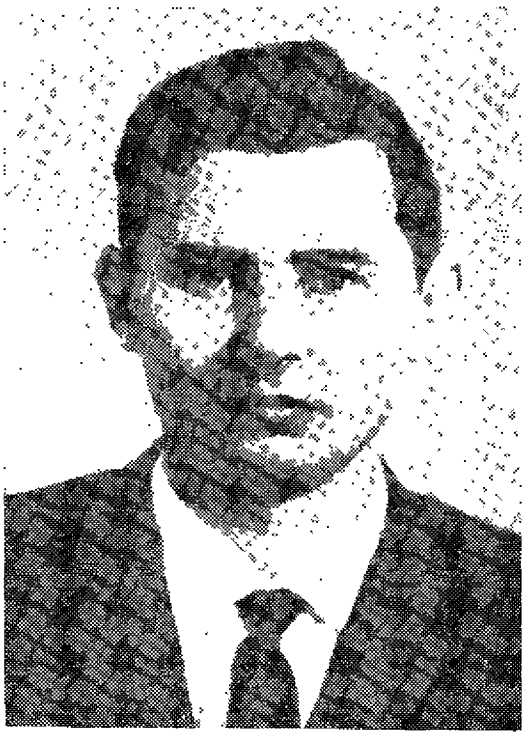
$$L_h^{(k)} u^h = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h [k(x + sh)]\, u(x + jh) + B^h [k(x + sh)].$$

Коэффициенты однородной схемы вычисляются в каждой точке сетки для любой задачи из K_0 по одним и тем же формулам. Исходное семейство S_0 однородных схем задано, если заданы шаблонные функционалы.

При изучении однородных разностных схем для одномерного эллиптического уравнения $(ku')' - q(x)\, u = -f(x)$ выяснилось, что необходимому условию сходимости в классе разрывных коэффициентов удовлетворяют лишь консервативные (дивергентные) схемы, выражающие закон сохранения на сетке. Этот вывод (поскольку речь идет о необходимом условии сходимости) распространяется и на однородные схемы для многомерных уравнений $Lu + f = 0$, $Lu + f = \frac{\partial u}{\partial t}$, $Lu + f = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu$. Консервативные схемы можно получить методом баланса (интегро-интерполяционным методом). Для элементарной ячейки сетки пишется закон сохранения (уравнение баланса), соответствующий данному дифференциальному уравнению. Входящие в уравнение баланса производные и интегралы заменяются затем приближенными выражениями. В зависимости от применяющейся при этом интерполяции получаются различные однородные схемы. Вопрос о выборе интерполяции подчинен требованиям устойчивости, точности, простоты реализации и др.

Метод баланса в той или иной форме начиная с 1950 г. применялся А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским, Г. И. Марчуком, С. К. Годуновым, А. И. Жуковым, Н. Н. Яненко, В. К. Саульевым и другими при построении разностных схем сквозного счета для решения различных задач математической физики, в частности газодинамики. Например, Г. И. Марчук в работе «Методы численного расчета ядерных реакторов» (1958 г.) применил метод баланса для численного решения уравнений диффузии нейтронов в связи с расчетом гетерогенных цилиндрических ядерных реакторов, С. К. Годунов использовал (1958 г.) законы сохранения при выводе схем сквозного счета разрывных решений уравнений газодинамики.

Интегральные законы сохранения для разностных схем, имитирующие законы сохранения для дифференциальных уравнений, применялись при изучении вопроса о существовании обобщенных решений уравнений эллиптического и гиперболического типов. Так, О. А. Ладыженская доказала (1954 г.) сходимость схемы сквозного счета к обобщенному решению задачи дифракции с разрывными коэффициентами.



Г. И. Марчук.

Консервативные разностные схемы рассматривались А. Л. Крыловым (1962 г.), В. И. Лебедевым (1964 г.) и др. В. И. Лебедев построил (1964 г.) конечноразностные аналоги ортогональных разложений пространств сеточных функций и получил разностные аналоги некоторых дифференциальных операторов и краевых задач математической физики, обладающие свойством аппроксимации в интегральном смысле.

При конструировании разностных схем, пригодных (устойчивых, дающих достаточную точность и т. д.) для практической реализации, возникает много специальных вопросов, на которые приходится обращать особое внимание при решении сложных задач. Такими, например, являются вопросы об аппроксимации граничных условий, о выборе сеток, учитывающих специфику задачи, об устойчивости и точности схемы на реальных (достаточно грубых) сетках. Большие трудности представляет решение таких вопросов при рассмотрении нелинейных задач математической физики, например задач газовой динамики. Для выяснения качества разностных методов их обычно испытывают на частных решениях (например, автомодельных) или на модельных линейных уравнениях. При этом часто возникают новые задачи теории разностных схем. Так, при разработке (1954 г.) С. К. Годуновым метода сквозного счета («размазывания») ударных волн возникла модельная задача о выделении класса схем, обладающих свойством монотонности (переводящих монотонные сеточные функции в монотонные). Было установлено, что для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ не существует линейных монотонных схем второго порядка точности. В дальнейшем (1964 г.) В. Я. Гольдину и Н. Н. Калиткину удалось построить для этого уравнения монотонные нелинейные схемы второго порядка точности.

2

Разностные методы для эллиптических уравнений

Метод конечных разностей (метод сеток) для уравнений эллиптического типа рассматривался многими советскими математиками. Он применялся как для доказательства теорем существования, так и для численного решения дифференциальных уравнений.

При доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области (при весьма слабых ограничениях на

ее границу) метод конечных разностей впервые (1924 г.) применил Л. А. Люстерник. Он рассматривал квадратную сетку и простейшую 5-точечную схему. Позднее (1954 г.) Л. А. Люстерник доказал сходимость ряда других разностных схем на треугольных, шестиугольных и косоугольных сетках для уравнения Лапласа.

И. Г. Петровский дал (1941 г.) новое весьма общее доказательство разрешимости задачи Дирихле для случая многих переменных, основанное на применении так называемых барьеров и априорных оценок для разностных уравнений. Метод И. Г. Петровского переносится на широкий класс линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

О. А. Ладыженская доказала (1953 г.) методом конечных разностей существование и единственность обобщенного решения для эллиптического уравнения общего вида. Эти результаты изложены в ее монографии «Смешанная задача для гиперболического уравнения» (1953 г.). Д. М. Эйдус исследовал (1952 г.) разрешимость второй краевой задачи для эллиптического уравнения.

Для того чтобы получить численное решение дифференциальных уравнений, недостаточно установить факт сходимости разностной схемы, т. е. исследовать ее асимптотические свойства при $h \to 0$. Необходимо получить оценку погрешности разностного метода при любом конечном значении шага сетки h, т. е. оценить порядок точности метода. Поэтому для теории разностных схем типична следующая постановка задачи: решение дифференциального уравнения существует, требуется оценить порядок точности разностной схемы в зависимости от дифференциальных свойств решения исходного уравнения.

Основными вопросами в теории разностных схем являются следующие:

1) построение разностных операторов, аппроксимирующих с разными порядками относительно шага сетки эллиптический дифференциальный оператор;

2) аппроксимация граничных условий;

3) оценка порядка точности схемы;

4) выбор и исследование метода решения полученной системы алгебраических уравнений.

Остановимся на первых трех вопросах. Первые исследования по теории разностных схем для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \tag{18}$$

были проведены (1927 г.) С. А. Гершгориным. Им исследованы различные аппроксимации оператора Лапласа на сетках, составленных из правильных четырехугольников, треугольников и шестиугольников. Разностная задача имеет вид

$$\Lambda y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{19}$$

где вид оператора Λ зависит от вида использующейся сетки, а правая часть $\varphi(x)$ — от функции $f(x)$. Гершгорин показал, что для простейших разностных операторов, заданных на шестиугольной (4-точечный

шаблон), четырехугольной (5-точечный шаблон) или треугольной (7-точечный шаблон) сетке, погрешность аппроксимации ψ есть соответственно $O(h)$, $O(h^2)$ и $O(h^4)$. Разностные схемы для уравнения Пуассона на 9-точечном шаблоне (сетка квадратная, двумерная область) исследованы (1934 г.) Ш. Е. Микеладзе. Установлено, что $\psi = O(h^6)$. Аналогичная схема была построена (1936 г.) Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым.

Для уравнения

$$\Delta u + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + gu = -f(x) \tag{20}$$

Ш. Е. Микеладзе построил 5-точечную схему $O(h^2)$. Исследования Микеладзе изложены в его монографии «Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными» (1936 г.).

Д. Ф. Давиденко построил (1957—1960 гг.) разностные схемы для осесимметрического уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат. Погрешность аппроксимации 9-точечной разностной схемы на квадратной сетке имеет вид $\psi = \frac{O(h^6)}{r}$. Схемы повышенного порядка точности для уравнения

$$\Delta u + \alpha_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} - \alpha_3(x, y)u = -f(x, y) \tag{21}$$

построил (1963 г.) В. В. Бадагадзе. На прямоугольной сетке он получил $\psi = O(h^4)$, а на квадратной сетке (при условии $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}$) — $\psi = O(h^6)$.

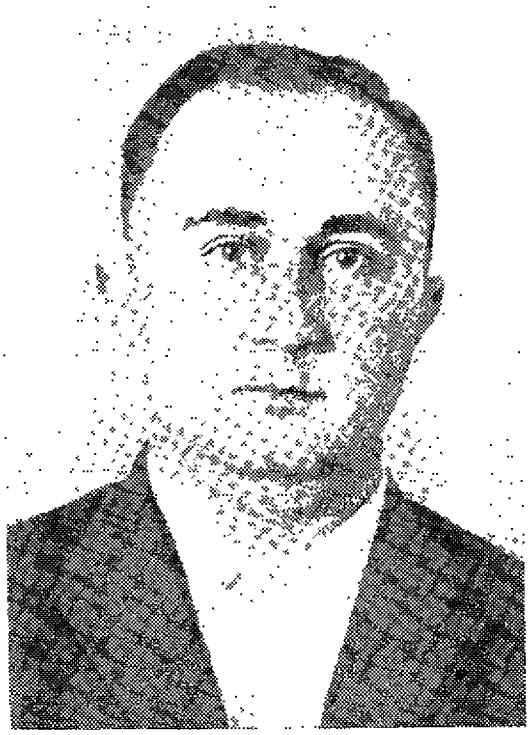
Для того чтобы поставить разностную краевую задачу, аппроксимирующую исходную задачу для дифференциального уравнения, кроме аппроксимации уравнения нужно еще аппроксимировать граничные условия. В случае первой краевой задачи вопрос об аппроксимации граничных условий решается более или менее просто. Наиболее удачный способ задания граничных условий для разностной задачи найден (1940 г.) Ш. Е. Микеладзе. Предложенная им интерполяция граничного условия в приграничный узел соответствует просто написанию разностной аппроксимации дифференциального уравнения на неравномерной сетке в приграничных узлах.

Простейшая аппроксимация нормальной производной, заданной на криволинейном куске границы, была предложена Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым. Погрешность ее составляла $O(h)$. Е. А. Волков построил (1955, 1961 гг). аппроксимацию граничного условия, содержащего наклонную производную, с погрешностью $O(h^2)$ на решении уравнения

$$\Delta u - q(x, y)u = -f(x, y). \tag{22}$$

Несколько иного типа аппроксимации граничных условий второго и третьего рода для двумерного и трехмерного уравнений Пуассона

построены (1959 г.) В. И. Лебедевым. Для двумерного случая аппроксимация построена с помощью разностной сопряженной задачи, а для трехмерного — с помощью метода ортогональных проекций. Погрешность аппроксимации равна $O(h^2)$. М. А. Алексидзе построил (1960 г.) аппроксимацию граничного условия с наклонной производной; погрешность аппроксимации на решении аппроксимируемой задачи равна $O(h^6)$.



М. А. Алексидзе.

Е. А. Волков (1962 г.) при аппроксимации задачи Неймана для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике построил разностное граничное условие, имеющее на решении задачи погрешность аппроксимации $O(h^6)$. Аппроксимация граничных условий третьего рода для самосопряженного эллиптического уравнения без смешанных производных в p-мерном параллелепипеде построена (1965 г.) В. Б. Андреевым, погрешность ее на решении уравнения равна $O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + \cdots + h^2_p$.

Наибольшую трудность при исследовании разностного метода представляет оценка функции $z = y - u^h$, являющаяся решением разностной задачи

$$\left.\begin{aligned} \Lambda z &= -\psi, \quad x \in \overset{0}{\omega}_h, \\ l_h z &= \nu, \quad x \in \gamma_h. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Основными методами оценки порядка скорости сходимости разностных схем являются принцип максимума, метод энергетических неравенств и метод функции Грина. Первое исследование порядка точности метода сеток было выполнено (1927—1930 гг.) С. А. Гершгориным. Он доказал принцип максимума для ряда разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле для уравнения Пуассона, из которого следует существование и единственность решения y разностной краевой задачи, построил в явном виде мажорирующую функцию и оценил, пользуясь принципом максимума, погрешность z. Позднее (1933 г.) С. А. Гершгорин обобщил свои результаты на случай двумерного эллиптического уравнения второго порядка без смешанных производных с переменными коэффициентами. Принцип максимума доказан при достаточно малых $h \leqslant h_0$, где h_0 зависит от максимума модулей коэффициентов при первых производных. Мажорирующая функция построена для областей достаточно малого диаметра, который зависит от максимума модулей тех же коэффициентов. Краевые условия задавались с помощью простого сноса, что привело к оценке точности

$$\|y^h - u\|_C \leqslant M_2 h + M_4 h^2, \tag{24}$$

где M_k ($k = 2, 4$) зависит только от максимума k-х производных решения и диаметра области.

Хотя С. А. Гершгорин исследовал схемы для двумерных уравнений, его методы исследования применимы и для большего числа измерений. Метод мажорирующей функции С. А. Гершгорина до сих пор используется при изучении разностных схем для уравнений эллиптического типа. Дальнейшие исследования, связанные с принципом максимума, посвящены в основном обобщению результатов С. А. Гершгорина на случай аппроксимации иного типа и на случай других краевых задач.

Ш. Е. Микеладзе доказал принцип максимума для 9-точечных схем на квадратной сетке в двумерной области, а также для 19-точечных и 27-точечных схем на кубической сетке в трехмерной области. Он показал, что предложенная им аппроксимация граничных условий Дирихле на криволинейном участке границы не нарушает принципа максимума. Ш. Е. Микеладзе доказал принцип максимума для предложенной им 5-точечной схемы, аппроксимирующей на квадратной сетке уравнения (20), а Е. А. Волков и М. А. Алексидзе — для некоторых разностных схем, аппроксимирующих задачу с косой производной.

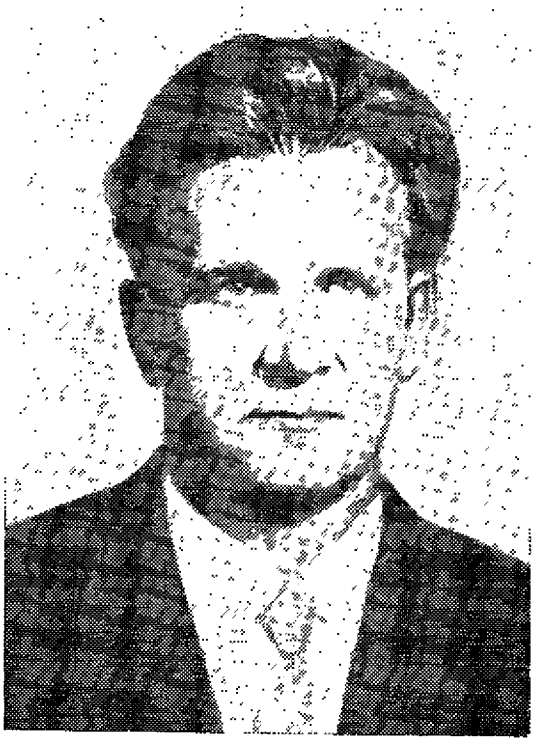
А. А. Самарский, В. Б. Андреев (1964 г.) и В. В. Бадагадзе (1964—1966 гг.) установили налагаемые на соотношения между шагами h_α условия, при которых принцип максимума справедлив для 9-точечных схем на прямоугольной сетке и 19-точечных схем на сетке, составленной из параллелепипедов. М. А. Алексидзе доказал (1960 г.) принцип максимума для случая, когда условие монотонности нарушено на некотором множестве узлов. А. А. Самарский построил (1965 г.) монотонные при любых h_α схемы (для которых справедлив принцип максимума) второго порядка аппроксимации для несамосопряженных эллиптических уравнений.

Оценки погрешности разностной схемы для уравнения Лапласа получены С. А. Гершгориным при предположении ограниченности четырех производных искомого решения. Е. А. Волков (1954 г.) и Н. С. Бахвалов (1957 г.) уточнили эту оценку, снизив требования на гладкость решения в замкнутой области. М. А. Алексидзе перенес результаты Н. С. Бахвалова на случай уравнения Пуассона.

В работах Е. А. Волкова (1960, 1966 гг.) большое внимание уделяется получению так называемых эффективных оценок, т. е. оценок через величины, которые можно непосредственно вычислить. Е. А. Волковым построены разностные схемы, сходящиеся со скоростью $O(h^2)$ при решении уравнения Пуассона в областях с углами и в бесконечных областях. Им же обоснован способ уточнения решения разностной задачи с помощью разностей высокого порядка.

Оценки скорости сходимости 4-точечных схем на шестиугольных сетках для уравнения Пуассона получены (1961 г.) В. И. Лебедевым. Оказалось, что те разностные схемы, которые имеют локальную погрешность аппроксимации $O(h)$, сходятся со скоростью $O(h^2)$, а если исправить правую часть, то можно добиться сходимости со скоростью $O(h^3)$.

В последнее время появилось значительное количество работ, в которых оценка скорости сходимости метода сеток исследуется методом энергетических неравенств. Этот метод позволяет более точно судить, по сравнению с принципом максимума, о скорости сходимости разностных схем. Более того, метод энергетических неравенств позволяет получить оценку скорости сходимости в тех случаях, когда принцип максимума неприменим. При этом используются априорные оценки решения через правую часть в слабой норме. Примером может служить исследование В. И. Лебедева, относящееся к разностным схемам на шестиугольных сетках.



В. К. Саульев.

Для решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений в области со сложной геометрией В. К. Саульев предложил (1962 г.) метод фиктивных областей. Его обоснованием занимались также В. Я. Ривкинд и В. И. Лебедев. Сходимость разностных схем для эллиптических уравнений с коэффициентами, имеющими разрывы на некоторых поверхностях, изучалась (1963, 1964 гг.) В. Я. Ривкиндом. Ю. К. Демьянович построил разностную схему (1966 г.) для самосопряженного уравнения второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами и доказал ее сходимость со скоростью $O(\sqrt{h})$ в метрике $W_2^{(1)}$ к обобщенному решению из $W_2^{(2)}$; он также определил устойчивость схемы относительно возмущений коэффициентов.

В. Б. Андреев получил (1966 г.) оценку скорости сходимости $O(|h|^4)$ в нормах $W_2^{(2)}$ и C для 9-точечной и 19-точечной схем, аппроксимирующих уравнение Пуассона на прямоугольной сетке. Принцип максимума для этих схем установлен лишь при условии, что отношение шагов $\frac{h_\alpha}{h_\beta}$ по разным направлениям удовлетворяет некоторым ограничениям. Н. С. Бахвалов получил (1966 г.) оценку скорости сходимости $O(h^2)$ (при $h < h_0$) в нормах $W_2^{(2)}$ и C для разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнения с общим эллиптическим оператором второго порядка, для которого нуль не есть точка спектра.

Все указанные выше исследования относятся к уравнению Пуассона или к линейным эллиптическим уравнениям второго порядка. В большинстве работ, относящихся к эллиптическим уравнениям более высокого порядка, вопрос об оценке скорости сходимости не рассматривается, в них обсуждаются те или иные алгоритмические вопросы или исследуется погрешность аппроксимации. В. К. Саульев доказал (1957 г.) сходимость (без оценки скорости) в норме $W_2^{(m)}$ для эллиптиче-

ского уравнения $2m$-го порядка с однородными граничными условиями первого рода.

В. И. Лебедев получил (1962 г.) оценки погрешности разностного решения полигармонического уравнения, зависящие от гладкости решения дифференциальной задачи, предполагая, что точное решение исходной задачи известно в некоторой пограничной полосе.

Вариационным методом получения разностных аппроксимаций эллиптических уравнений посвящены работы Л. А. Оганесяна и Ю. К. Демьяновича. Разностные схемы являются уравнениями Эйлера для вариационного функционала, если его минимум искать не во всем пространстве функций, где он определен, а лишь на специальном подпространстве, аппроксимирующем исходное. Вариационный подход к написанию схем позволяет довольно просто решать вопрос об их сходимости, причем оценку скорости сходимости удается получить при весьма слабых предположениях о гладкости решения.

Различные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка изучались (1965 г.) М. П. Сапаговасом.

Однородные разностные схемы для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами изучались (1961, 1962 гг.) А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским. Детально исследован вопрос о сходимости и точности для одномерного эллиптического уравнения $(ku')' - qu = -f(x)$ с разрывными коэффициентами $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Показано, что усиленному требованию сходимости в классе разрывных коэффициентов удовлетворяют лишь консервативные схемы

$$\Lambda y = (a(x)\, y_{\bar{x}})_x - d(x)\, y = -\varphi(x), \qquad x \in \omega_h,$$

где $y_{\bar{x}} = \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1})$, $y_x = \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i)$, и найдена схема, сохраняющая порядок точности в этом классе. Консервативные схемы устойчивы относительно возмущения коэффициентов. Аппроксимация понимается в слабой норме (аналогичной (13)). Показано, что любая консервативная схема имеет на произвольной последовательности неравномерных сеток тот же порядок точности, что и на равномерной сетке. Найдена однородная 3-точечная схема, точная в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных коэффициентов на произвольной неравномерной сетке ω_h, так что $y_i = u(x_i)$ для любого узла $x_i \in \omega_h$. Эта схема консервативна. Построены схемы, имеющие в $Q^{(0)}$ точность $O(h^{2m})$, $m = 1, 2, \ldots$

А. А. Самарский рассматривал (1962, 1963 гг.) однородные разностные схемы для многомерных эллиптических уравнений. Для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка без смешанных производных в классе кусочно-гладких коэффициентов с разрывами на плоскостях, параллельных координатным, построено семейство однородных схем и доказана (методом «энергетических неравенств n-го ранга») их равномерная сходимость со скоростью $O(h^2 \ln^\delta \frac{1}{h})$, $\delta > 1$, и сходимость со скоростью $O(h^2)$ в L_2 на произвольной неравномерной сетке в любой p-мерной области. А. К. Боярчук исследовал (1963—1965 гг.) сходимость, точность, коэффициентную устойчивость одно-

родных разностных схем для уравнений и систем уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

Ряд работ посвящен изучению общих свойств разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения Лапласа (С. Л. Соболев, Л. А. Люстерник, М. Р. Шура-Бура и др.). С. Л. Соболев исследовал (1952 г.) 5-точечное разностное уравнение $u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}} = 0$ на всей плоскости, построил для него аналог фундаментального решения в явном виде и доказал, что решение, возрастающее на бесконечности медленнее $\sqrt{i^2 + k^2}$, есть постоянная величина. Позднее (1965 г.) он изучил разностный аналог полигармонического уравнения. Л. А. Люстерник исследовал (1957 г.) разностный аналог функции Грина для оператора Лапласа в конечной области для случая двух и трех переменных; он выделил главную часть и оценил ее отклонение от функции Грина. Близкому кругу вопросов посвящена работа М. Р. Шуры-Буры (1953 г.). Разностная функция Грина была использована (1960 г.) В. И. Лебедевым при изучении сходимости метода сеток для задачи Неймана.

После замены дифференциального уравнения разностной схемой получается система алгебраических уравнений, порядок которой равен числу внутренних узлов сетки $\left(O\left(\frac{1}{h^p}\right)\right)$ (в случае p-мерного эллиптического уравнения). В 1947—1953 гг. был предложен ряд прямых методов решения этой системы, учитывающих специальный вид ее матрицы. В случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $(ku')' - qu = -f(x)$ получается система разностных уравнений вида

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{25}$$

с трехдиагональной матрицей.

В начале 50-х годов был предложен И. М. Гельфандом, О. В. Локуциевским, А. С. Кронродом, Штарком и другими независимо друг от друга прямой метод решения этой системы уравнений, называемый методом прогонки, или методом факторизации. Его можно трактовать как один из вариантов метода исключения Гаусса или как разностный аналог метода факторизации дифференциального уравнения второго порядка, сводящего краевую задачу к задачам Коши для трех уравнений первого порядка. Для получения решения методом прогонки требуется число действий, пропорциональное числу уравнений. Для решения системы векторных уравнений (25), где A_i, B_i, C_i — матрицы, y_i — вектор, М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский предложили (1953 г.) метод матричной прогонки. Его устойчивость исследовалась К. И. Бабенко, В. В. Русановым, Н. Н. Чепцовым. Различные варианты метода прогонки для решения уравнений и систем одномерных уравнений, а также вопросы вычислительной устойчивости рассматривались В. С. Владимировым, А. А. Абрамовым, С. К. Годуновым, В. Б. Андреевым, И. Д. Софроновым, В. И. Крыловым, П. И. Монастырным, Г. Д. Майстровским и др. Для периодической задачи метод прогонки разработан (1963 г.) А. А. Абрамовым и В. Б. Ан-

Н. И. Булеев.

дреевым. Н. С. Бахвалов исследовал вопрос о накоплении вычислительной погрешности при решении методом прогонки разностной краевой задачи для уравнения $u'' - p(x)\,u = -f(x)$ и показал, что за счет ошибки округления порядка ε решение задачи этим методом получается с точностью $O\left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)$, где h — шаг сетки.

Прямым методом решения многомерных разностных задач является метод суммарных представлений, предложенный Г. Н. Положим («Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента», 1962 г.). Алгоритмы метода суммарных представлений для некоторых задач разработаны и реализованы Г. Н. Положим и его учениками.

В случае многомерных эллиптических уравнений для решения системы разностных уравнений обычно используются итерационные методы. Классический метод простой итерации требует для уменьшения начальной невязки в $1/\varepsilon$ раз (где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность) $\nu \approx \frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ итераций с общим объемом вычислений $Q = O\left(\frac{1}{h^{p+2}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ действий. Л. А. Люстерник (1947 г.) и А. А. Абрамов (1950 г.) внесли некоторые видоизменения в процессы простой итерации, что позволило несколько увеличить скорость сходимости. Итерационный процесс (метод неполной факторизации), отличный от простой итерации и имеющий большую скорость сходимости, был предложен (1958 г.) Н. И. Булеевым.

В 1955 г. американские математики Писмен, Рекфорд и Дуглас предложили новый итерационный процесс — метод переменных направлений (МПН). Применение его к уравнению Пуассона в прямоугольнике дает решение с точностью ε при затрате $O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ итераций и $O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ действий для двумерного случая. МПН для двумерной задачи Дирихле

$$\Lambda v = -\varphi, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \tag{26}$$

где Λ — разностный оператор Лапласа, сводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^{n+\frac{1}{2}} - y^n}{\tau_n} &= \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^n + \varphi, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+\frac{1}{2}}}{\tau_n} &= \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где n — номер итерации, $y^{n+\frac{1}{2}}$ — промежуточное значение (подытерация). Точность ε за $O\left(\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ итераций достигается при специальном выборе итерационных параметров τ_n.

Развитию и обобщению МПН на более общие уравнения и более сложные области посвящен ряд работ советских математиков. Основным достоинством МПН, которое следовало сохранить при обобщении, является малость числа итераций $O\left(\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$, необходимых для достижения требуемой точности, и малость числа действий, необходимых для выполнения одной итерации $O(h^{-p})$ (т. е. число действий на одной итерации пропорционально числу узлов).

Цикл исследований в этом направлении выполнен (1961, 1962, 1965, 1966 гг.) Е. Г. Дьяконовым. Им построены итерационные процессы с теми же асимптотическими (при $h \to 0$) характеристиками для уравнения Пуассона (задачи Дирихле) в p-мерном прямоугольном параллелепипеде для эллиптических уравнений $2m$-го порядка с разделяющимися переменными. Эти методы обобщены им (двухступенчатая итерация) на случай общих самосопряженных эллиптических уравнений $2m$-го порядка, интегро-дифференциальные уравнения, квазилинейные эллиптические уравнения и системы. Для двумерной области, являющейся пересечением прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, Е. Г. Дьяконов построил итерационный процесс, представляющий собой объединение альтернирующего метода Шварца и МПН с числом итераций $O\left(\ln^2\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Асимптотические оценки для числа итераций, имеющие важное принципиальное значение, часто оказываются недостаточными для суждения о качестве итерационного процесса. На практике всегда приходится иметь дело с конечными значениями шага h и при сравнении разных итерационных методов может оказаться, что на реальной сетке более выгоден итерационный процесс с меньшей асимптотической скоростью сходимости. Поэтому особую важность приобретает выбор оптимальных итерационных параметров из условия минимума вычислительной работы. Первая и третья задачи для разностного уравнения Пуассона в прямоугольнике могут быть записаны в виде уравнения $(A_1 + A_2)u = f$, где A_1 и A_2 — самосопряженные положительно определенные и перестановочные линейные операторы ($A_1A_2 = A_2A_1$) в конечномерном пространстве H со скалярным произведением. Для этого уравнения применяется МПН с двумя наборами параметров $\{\tau_n^{(1)}\}$ и $\{\tau_n^{(2)}\}$. Оптимальные наборы этих параметров были найдены (1965 г.) американским математиком Жорданом. А. А. Самарским и В. Б. Андреевым (1963, 1964 гг.), В. А. Енальским (1964, 1967 гг.) построены итерационные процессы МПН для разностных схем повышенного порядка точности в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике ($p = 2$) и параллелепипеде и найдены наборы циклических итерационных параметров $\{\tau_n\}$ из условия минимума числа итераций. В. Б. Андре-

ев и И. С. Кац построили (1965 г.) и исследовали итерационный МПН для разностного аналога третьей краевой задачи для уравнения Пуассона при аппроксимации граничных условий второго порядка.

А. А. Самарский предложил (1967 г.) итерационный МПН для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности в прямоугольнике и показал, что оптимальные параметры для него выражаются через оптимальные параметры, найденные Жорданом. И. В. Фрязинов построил (1967 г.) схему $O(|h|^4)$ для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевыми условиями третьего рода и предложил итерационный МПН, для которого выбор оптимальных итерационных параметров сводится к задаче, решенной Жорданом.

Итерационные МПН с постоянными параметрами для стационарной задачи теории упругости (первая краевая задача, прямоугольник, параллелепипед) исследованы А. Н. Коноваловым (1964 г.) и А. А. Самарским (1965 г.). Число итераций для этих задач составляет $O\left(\frac{1}{h}\right)$ в двумерном случае и $O\left(\frac{1}{h^{4/3}}\right)$ — в трехмерном. В. Е. Шаманский рассматривал (1965 г.) различные методы решения разностных эллиптических уравнений. И. Н. Молчанов предложил (1963—1965 гг.), ряд итерационных методов, экономящих память ЭВМ. П. С. Бондаренко исследовал свойства разностных эллиптических операторов и устойчивость реальных вычислительных алгоритмов.

Асимптотически (при $h \to 0$) оптимальным методам решения многомерных задач посвящен цикл работ (1957, 1959, 1962 гг.) Н. С. Бахвалова. В них изучается вопрос об оптимальных по порядку способах задания информации при решении дифференциальных уравнений и минимальном количестве работы, необходимом для отыскания решения с заданной точностью. Показано, что уравнение Пуассона в квадрате можно решить разностным методом на сетке с шагом h точно за $O\left(h^{-2}\ln^2\frac{1}{h}\right)$ арифметических действий (если известна таблица разностной функции Грина для квадратов со стороной $2^k h$). Указывается способ получения численных методов решения уравнения Лапласа с оценкой числа действий, по порядку сколь угодно близкой к оптимальной, если исходные данные принадлежат к заданному классу.

Рассматриваются граничные значения из класса $C_{r,\lambda}$ (r — число производных по x_α, λ — показатель Гельдера). Показано, что для получения одного значения решения с точностью ε необходимо использовать значения граничной функции в $H(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-\frac{1}{r+\lambda}}$ точках. При $r + \lambda < 3$ построена сетка и указан метод решения задачи со следующими характеристиками: объем памяти приближенно равен $H(\varepsilon)$, число используемых значений граничной функции — $H(\varepsilon)$, число действий — $H(\varepsilon)\ln^2\frac{1}{\varepsilon}$. С полученной сетки решение интерполируется в любую внутреннюю точку области за конечное число действий. Если граница принадлежит к классу большей гладкости, чем граничная

Н. М. Крылов.

функция, то для получения значений решения в любой строго внутренней подобласти достаточно $O(H_\varepsilon)$ арифметических действий.

Р. П. Федоренко построил (1961, 1964 гг.) итерационный процесс решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Этот метод позволяет найти решение с точностью ε за $O\left(\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ арифметических действий. Предложенный им итерационный процесс базируется на простой итерации (или на каком-либо ином итерационном процессе, обладающем, вообще говоря, невысокой скоростью сходимости), но в процессе решения используются вспомогательные сетки с большей величиной шага, что позволяет уменьшить число арифметических операций. Н. С. Бахвалов обобщил (1966 г.) итерационный процесс Р. П. Федоренко на случай общих эллиптических уравнений второго порядка (не обязательно положительно определенных, как это было во всех известных ранее итерационных процессах) в прямоугольнике с сохранением той же скорости сходимости. Показано, что для уравнения Пуассона с правой частью из W_2^2 при отыскании решения с точностью $O(h^2)$ достаточно выполнения $O(h^{-2})$ арифметических действий, т. е. в этом случае метод становится оптимальным.

Ряд работ посвящен изучению разностных схем задачи на собственные значения (задачи Штурма — Лиувилля)

$$Lu + \lambda r(x)u = 0, \quad x \in G, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma \quad (r(x) > 0), \tag{28}$$

где L — самосопряженный эллиптический оператор. Заменяя L разностным оператором Λ, получают задачу

$$\Lambda y + \lambda^h \rho(x) y = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y = 0, \quad x \in \gamma_h. \tag{29}$$

Требуется найти те значения параметра λ^h (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции). Пусть $\{\lambda_k, u_k(x)\}$ и $\{\lambda_k^h, y_k\}$ — последовательности собственных значений и собственных функций задач (28) и (29). Представляют интерес следующие вопросы: 1) сходимость λ_k^h и y_k к λ_k и u_k (при фиксированном k), 2) оценка скорости сходимости по h, 3) изучение асимптотического разложения λ_k^h и y_k по h.

Рассмотрим сначала одномерные задачи.

Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов исследовали (1928 г.) задачу

$$u'' + \lambda r(x) u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad 0 < c_1 \leqslant r(x) \leqslant c_2.$$

Для простейшей 3-точечной схемы ими были получены оценки

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \leqslant M_1(k) h^2, \quad \|y_k - u_k^h\|_c = \max_{\omega_h} |y_k - u_k^h| \leqslant M_2(k) h^2, \tag{30}$$

где $M_1(k)$, $M_2(k)$ — положительные постоянные, зависящие от λ_k, $r(x)$, $r'(x)$, $r''(x)$; для них даны явные выражения. Н. М. Крылов, рассматривая эту же задачу, нашел (1931 г.) двусторонние оценки для $\lambda_k - \lambda_k^h$ при условии $r(x) \in C^4(0, 1)$.

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский изучали (1961 г.) однородные разностные схемы для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x) u + \lambda r(x) u = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{31}$$

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k(x) > 0,$$

в случае разрывных коэффициентов и краевых условий первого и третьего рода. Получены оценки вида (30). В. Г. Приказчиковым построены (1965 г.) схемы повышенного порядка $O(h^{2m})$ ($m = 2, 3, \ldots$) и найдены главные члены асимптотических разложений для λ_k^h и y_k при предположении лишь кусочной непрерывности коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$. В. К. Саульев рассматривал (1957 г.) задачу Штурма — Лиувилля для системы одномерных уравнений вида (31) с диагональной матрицей $k(x)$ и разрывными коэффициентами. Предположив, что разрывы находятся в узлах сетки, он получил оценку для $\lambda_1^h - \lambda_1$. В. А. Ефименко (1938 г.), Д. М. Эйдус (1952 г.), О. А. Ладыженская (1953 г.) изучали вопрос о сходимости разностного метода для многомерных задач. О. А. Ладыженская исследовала разностным методом вопрос о дифференцируемости собственных функций задачи (28) с оператором

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - qu \tag{32}$$

в замкнутой области. Л. А. Люстерник установил (1954 г.) связь собственных значений оператора Лапласа ($\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in G$, $u|_\Gamma = 0$) и собственных значений задачи $\Lambda y + \lambda^h y = 0$, $x \in \omega_h$, $y|_{\gamma_h} = 0$, где Λ — различные аппроксимации двумерного оператора Лапласа. Он доказал равномерную сходимость разностного метода в замкнутой области. В. К. Саульев обобщил (1954 г.) результаты Л. А. Люстерника на m-мерный случай ($m \leqslant 5$). Им исследована (1955 г.) ско-

рость сходимости собственных чисел для задачи (28) с оператором (32) (сходимость была доказана О. А. Ладыженской). Для случая достаточно гладких коэффициентов при отсутствии смешанных производных он получил оценку $|\lambda_k^h - \lambda_k| \leqslant M(k) h^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (граничные условия сносились с помощью линейной интерполяции). Для случая общего оператора (32) получена оценка $\lambda_k^h - \lambda_k = O(h)$. Для двумерного оператора (32) (при $p = 2$) без смешанных производных в предположении, что $u_k(x) \in C^{(8)}$, на специальных последовательностях сеток найдена (1957 г.) равномерная оценка $\|y_k - u_k^h\|_C \leqslant M_{(k)}^{h^2}$. Для оператора (32) без смешанной производной и любого p В. Г. Приказчиков получил (1965 г.) оценку $|\lambda_k^h - \lambda_k| \leqslant M(k) h^2$ на неравномерных сетках в случае как гладких, так и разрывных коэффициентов с разрывами на гиперплоскостях, параллельных координатным. В двумерном случае ($p = 2$) для уравнения с постоянными коэффициентами он нашел равномерную оценку $\|y_k - u_k^h\|_C \leqslant M(k) h^2$.

3

Разностные методы для нестационарных задач

Остановимся кратко на исследованиях, посвященных разностным методам численного решения нестационарных (эволюционных) задач математической физики. Рассмотрим в основном работы, относящиеся к уравнениям параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, \ldots, x_p), \tag{33}$$

и гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \tag{34}$$

где L — эллиптический оператор. Обозначим h_α — шаг по x_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, p$) сетки ω_h в области G изменения $x = (x_1, \ldots, x_p)$, τ — шаг сетки $w_\tau = \{t_j = i\tau\}$ по переменному t, $|h|^2 = h_1^2 + \cdots + h_p^2$.

Построение разностных схем для этих уравнений начинается с аппроксимации оператора L разностным оператором Λ. Простейшие двухслойные схемы для (33) принадлежат семейству «схем с весами» (для простоты положим $f = 0$)

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j), \tag{35}$$

где σ — вещественный параметр. При $\sigma = 0$ получаем явную схему

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j, \tag{36}$$

при $\sigma = 1$ — неявную схему с опережением

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^{j+1}.$$

Схема (35) с $\sigma = 0{,}5$ называется симметричной, или схемой Кранка — Никольсона.

Для уравнения гиперболического типа (34) часто используются трехслойные схемы с весами

$$\frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} = \Lambda\left(\sigma_1 y^{j+1} + \sigma_2 y^j + \sigma_3 y^{j-1}\right)$$

$$(f = 0), \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1.$$

При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = 0$ получаем явную схему с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + |h|^2)$.

В течение длительного времени основным объектом изучения были уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, которые служили (в соответствии с принципом замороженных коэффициентов) моделью для уравнений с переменными коэффициентами. Простейшим схемам — явной схеме и схеме с опережением (для которой принцип максимума справедлив при любых τ и h) — для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами посвящено большое количество исследований советских математиков (Л. И. Камынин, П. И. Коваль, Л. А. Люстерник, Н. Н. Мейман, Ш. Е. Микеладзе, Д. Ю. Панов, И. Г. Петровский, В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов, В. К. Саульев, П. П. Юшков и др.). Результаты этих исследований изложены в книге В. К. Саульева «Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток» (1960 г.), где приведена также подробная библиография до 1960 г. Исследование устойчивости проводилось либо методом разделения переменных, либо с помощью принципа максимума. Изучались явные схемы на косоугольных (треугольных, шестиугольных, параллелограммных) и полярных сетках (Л. А. Люстерник, 1954 г.; П. П. Юшков, 1957 г.).

Было установлено, что неявные схемы $\left(\text{при } \sigma \geqslant \frac{1}{2}\right)$ обладают свойством безусловной $\left(\text{при любых } \frac{\tau}{h^2}\right)$ устойчивости. Однако при их использовании для определения y^{j+1} на новом слое получаются системы разностных уравнений. В случае одномерного уравнения теплопроводности ($p = 1$) получается система уравнений с трехдиагональной матрицей. Для ее решения, как указывалось выше, следует применять метод прогонки.

Чтобы избавиться от необходимости решать разностные уравнения на новом слое, В. К. Саульев предложил (1957 г.) асимметричные схемы, устойчивые при любых h и τ и приводящие к системам алгебраических уравнений с двухдиагональной матрицей. Решение такой системы находится по рекуррентным 2-точечным формулам (бегущего счета). Чередуя две асимметричные схемы, В. К. Саульев получил перемежающуюся схему, безусловно устойчивую и имеющую точность $O(h^2 + \tau^2/h^2) = O(h^2)$ при $\tau = O(h^2)$.

Ш. Е. Микеладзе (1936 г.), П. П. Юшков (1943 г.) рассматривали трехслойные явные схемы $O(h^4 + \tau^2)$. Безусловно устойчивая схема повышенного порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$ для одномерного урав-

нения теплопроводности с постоянными коэффициентами $\left(Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ рассматривалась И. М. Гельфандом и О. В. Локуциевским (1952 г.), В. К. Саульевым (1960 г.). А. А. Самарский построил (1963 г.) схему повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ и доказал ее равномерную сходимость со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$. П. П. Юшков и Л. И. Логинов получили (1958 г.) явные схемы для двумерного и трехмерного уравнений теплопроводности ($Lu = \Delta u$), имеющие точность $O(h^4)$ при заданном значении τ/h^2.

П. П. Юшков.

А. А. Самарский построил и исследовал (1958—1962 гг.) однородные разностные схемы для уравнений и систем уравнений параболического типа с переменными коэффициентами, а также для квазилинейных уравнений $\left(Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), f = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$. Аппарат априорных оценок позволил изучить вопросы, связанные с устойчивостью и точностью для неявных схем с весами в случае разрывных коэффициентов, неравномерных сеток и краевых условий общего вида (например, $C\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial t} - \beta u$ при $x = 0$). А. А. Самарский, И. В. Фрязинов исследовали (1961 г.) сходимость и получили оценку порядка точности для однородных схем в случае уравнения теплопроводности с коэффициентами, имеющими разрывы первого рода на конечном числе кривых (движущиеся разрывы).

Однородные разностные схемы с весами для одномерного уравнения теплопроводности с нелинейными краевыми условиями изучались (1965 г.) И. Г. Белухиной. В. Ф. Баклановская доказала (1961 г.) сходимость (к обобщенному решению) явной схемы сквозного счета для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}, \quad \varphi(u) \geqslant 0,$$

в случае, когда $\varphi(0) = 0$.

Сходимость разностных методов и вопросы существования, единственности и устойчивости решения для некоторого класса обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами в случае уравнений параболического типа рассматривались (1966, 1967 гг.) Б. М. Будаком и А. Д. Искендеровым.

В связи с применением ЭВМ, возможностью использования сеток с большим числом узлов, а также в связи с необходимостью проведения серийных расчетов особую остроту приобрел вопрос о числе арифмети-

ческих действий, затрачиваемых для получения приближенного решения с заданной точностью. Поясним это на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}. \tag{37}$$

Наиболее проста явная схема

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^j, \quad \Lambda_\alpha y^j = \Lambda_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^j.$$

Решение y^{j+1} на каждом слое находится по явным формулам с затратой числа $O\left(\frac{1}{h^p}\right)$ действий, пропорционального числу узлов сетки. Однако явная схема устойчива лишь при достаточно малом шаге $\tau \leqslant \frac{h^2}{2p}$. Если коэффициенты уравнения переменны, т. е. $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$, то условие устойчивости принимает вид $\tau \leqslant \frac{h^2}{2pc^*}$, где c^* — максимум коэффициентов $k_\alpha(x, t)$. Неявная схема

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^{j+1} = \Lambda y^{j+1} \tag{38}$$

устойчива при любых τ и h_α. Однако процесс определения y^{j+1} из уравнения $y^{j+1} - \tau\lambda y^{j+1} = y^j$ очень трудоемкий, в то время как в случае явной схемы решение находится очень просто и достаточно выполнения числа $O\left(\frac{1}{h^p}\right)$ действий (пропорционального числу узлов). Лишь в одномерном случае ($p = 1$) число действий для неявной схемы пропорционально числу узлов сетки (как и для явной схемы). Поэтому возник вопрос о возможности построения схем, устойчивых при любых τ и h и требующих на каждом слое числа действий, пропорционального числу узлов сетки (как в случае явной схемы). Такие схемы называются экономичными.

Первая экономичная схема (неявный метод переменных направлений) для двумерного уравнения теплопроводности была построена, как отмечалось выше, в 1955 г. американскими учеными Писменом, Рекфордом и Дугласом. Она имеет вид

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{j+1}. \tag{39}$$

По этой схеме решение на промежуточном $(j + \frac{1}{2})$-м слое ищется прогонкой по строкам с затратой числа $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ действий, а на $(j + 1)$-м слое — прогонкой по столбцам с таким же числом действий. Так как

эта схема, кроме того, устойчива при любых τ и h_α, то она экономична.

В. К. Саульев предложил (1957 г.) аналогичную схему для осесимметричного уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах, а также перемежающуюся схему бегущего счета, которая может быть записана в виде (39), если положить

$$\Lambda_1 y = \frac{1}{h_1} y_{\bar{x}_1} + \frac{1}{h_2} y_{\bar{x}_2}, \quad \Lambda_2 y = -\frac{1}{h_1} y_{x_1} - \frac{1}{h_2} y_{x_2},$$

где $y_{\bar{x}_\alpha}$ — левая, y_{x_α} — правая разностные производные по x_α. Вычисление $y^{j+\frac{1}{2}}$ и y^{j+1} проводится по явным формулам. Схема, как показано (1964 г.) А. А. Самарским, имеет точность $O\left(h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\right)$ $(h_1 = h_2 = h)$.

К. А. Багриновский и С. К. Годунов для получения устойчивых схем, соответствующих многомерным дифференциальным уравнениям, предложили (1957 г.) использовать устойчивые схемы, построенные для одномерных уравнений. Метод исследования основан на расщеплении (факторизации) разностного оператора на одномерные операторы. Одна из полученных схем в дальнейшем была использована (1961 г.) С. К. Годуновым, А. В. Забродиным и Г. П. Прокоповым при численном решении двумерных нестационарных задач газовой динамики.

Для решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами Н. Н. Яненко, отправляясь от естественной многомерной разностной схемы с весами, предложил (1959 г.) использовать схему, которая в двумерном случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} &= \sigma\Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + (1-\sigma)\Lambda_1 y^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \sigma\Lambda_2 y^{j+1} + (1-\sigma)\Lambda_2 y^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где σ — весовой множитель, $y^{j+\frac{1}{2}}$ — промежуточное значение. На каждом этапе вычислений применяется схема с весами, соответствующая одномерному уравнению теплопроводности. Этот метод (сформулированный для p измерений) назван методом расщепления. В следующей работе (1960 г.) Н. Н. Яненко предлагает формальное обобщение схемы (40) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,$$

где L_α — любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, и для характеристики метода вводит термин «метод дробных шагов».

Н. Н. Яненко совместно с В. А. Сучковым и Ю. Я. Погодиным рассмотрел (1959 г.) схемы расщепления (дробных шагов) для двумерного

уравнения теплопроводности со смешанными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad a_{\alpha\beta} = \text{const}.$$

Н. Н. Анучина и Н. Н. Яненко (1959 г.), Н. Н. Анучина (1966 г.) исследовали ряд схем расщепления для уравнений и систем уравнений гиперболического типа.

Указанные выше работы американских ученых и Н. Н. Яненко относятся к уравнениям с постоянными коэффициентами в пространственных областях простейшего вида (прямоугольник, параллелепипед).

Для характеристики соответствия схемы данному дифференциальному уравнению необходимо определить, в каком смысле эта схема аппроксимирует дифференциальное уравнение. Все указанные выше исследователи поступали следующим образом. Из (39) и (40) исключали промежуточное значение $y^{j+\frac{1}{2}}$ (что в случае (40) возможно лишь при условии перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2). Это приводило к схеме «в целых шагах», которую можно записать в виде

$$A_1 A_2 \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha, \tag{41}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots,$$

где E — единичный оператор (в случае (39) $\sigma = 0{,}5$). Под погрешностью аппроксимации для методов (39) и (40) понималась погрешность аппроксимации для схемы в целых шагах (41). Тем самым каждый из методов (39) и (40) фактически трактовался как вычислительный алгоритм, реализующий схему (41).

Эквивалентность разностных уравнений (39)—(41) существует при определенном способе задания краевых условий для промежуточных значений или при специальном способе задания правых частей уравнения в приграничных узлах. На это впервые (1962 г.) обратил внимание Е. Г. Дьяконов. Он указал также на трудности, связанные с учетом правых частей в схеме (40).

Для схем в целых шагах, получающихся после исключения промежуточных (дробных) значений, характерно то, что оператор, действующий на y^{j+1} (оператор на верхнем слое), факторизован, т. е. представляет собой произведение операторов более простой структуры (одномерных операторов.)

В качестве исходных схем, аппроксимирующих многомерное дифференциальное уравнение, Е. Г. Дьяконов предложил (1962, 1964, 1965 гг.) рассматривать схемы с оператором A на верхнем слое, представимом в виде произведения операторов $A_1, A_2, \ldots, A_p$ меньшей размерности (дается специальное определение размерности оператора):

$$A_1 A_2 \ldots A_p y^{j+1} = F(y^j, y^{j-1}, \ldots), \tag{42}$$

например $A_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha$. Полученная система уравнений решается путем последовательного обращения операторов $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Например,

можно воспользоваться алгоритмом

$$A_1 y^{j+\frac{1}{p}} = F, \quad A_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}, \quad \alpha = 2, \ldots, p.$$

Так, для p-мерного уравнения теплопроводности рассматривалась схема вида

$$\frac{1}{\tau} A_1 \ldots A_p y^{j+1} = \frac{1}{\tau} B y^j + \varphi^j,$$

где оператор B выбирался из условий аппроксимации и устойчивости.

Е. Г. Дьяконов назвал схемы вида (42) схемами с расщепляющимися операторами. Он предложил много схем (двухслойных и трехслойных) с расщепляющимся оператором для уравнений и систем параболического типа второго порядка (первая краевая задача), для уравнений высокого порядка (задача Коши с периодическими начальными условиями), а также для интегро-дифференциальных уравнений. Им рассматривались уравнения с переменными и постоянными коэффициентами. Предложен алгоритм, реализующий схему с расщепляющимся оператором в области, составленной из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Методами энергетических неравенств исследованы устойчивость и сходимость (для метода (39) впервые это было сделано Лизом). Получены априорные оценки в различных нормах, главной частью которых является норма как на слое, так и во всей области.

В. Б. Андреевым построена (1966 г.) экономичная схема $O(|h|^2 + \tau^2)$ с расщепляющимся оператором для уравнения теплопроводности в p-мерном параллелепипеде, на границе которого заданы краевые условия третьего рода. Другая схема для третьей краевой задачи построена (1966 г.) Е. Г. Дьяконовым и В. И. Лебедевым. В. Б. Андреев предложил (1966 г.) двухслойные и трехслойные экономичные схемы для параболического уравнения общего вида, устойчивые при естественном условии параболичности. Для получения устойчивых схем с факторизованным (расщепляющимся) оператором А. А. Самарский предложил (1963 г.) процедуру перехода от многомерных схем с весами (факторизацию оператора на верхнем слое в схеме, записанной в канонической форме). Он исследовал ряд двухслойных и трехслойных схем повышенного порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$ для многомерного уравнения теплопроводности с постоянными и переменными коэффициентами. Е. Г. Дьяконов рассматривал (1965 г.) аналогичные схемы для системы параболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от t. В. Б. Андреев, пользуясь полученными им оценками в W_2^2 на слое и разностными теоремами вложения, доказал (1966 г.) равномерную сходимость ряда схем переменных направлений, в том числе схем повышенного порядка точности.

Для уравнений и систем гиперболического типа в прямоугольных областях различные экономичные схемы построены и исследованы Е. Г. Дьяконовым (1963 г.), А. Н. Коноваловым (1964 г.), А. А. Самарским (1964, 1965 гг.).

Во всех указанных выше работах рассматривались пространственные области простейшего вида — прямоугольники или параллелепипеды, хотя некоторые из алгоритмов, например (39) и (40), формально можно было бы использовать и в случае произвольной области. Ограничения, налагаемые на область их применения, как оказалось в дальнейшем, были связаны с определением понятия аппроксимации. Чтобы распространить эти алгоритмы на произвольную область и получить экономичные методы решения более широкого класса уравнений математической физики, в том числе квазилинейных, понадобилось новое определение схемы. А. А. Самарский предложил (1962 г.) для построения экономичных схем следующий прием.

Исходная многомерная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad L = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha, \tag{43}$$

в каждом интервале $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ заменяется системой одномерных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = L_\alpha v_\alpha + f_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p; \\ &t_j + \frac{\alpha-1}{p} \leqslant t \leqslant t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p}; \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

каждое из которых затем аппроксимируется с помощью простейших устойчивых разностных схем (локально одномерный метод), например двухслойных (или трехслойных) схем с весами. При таком подходе к построению экономичных разностных схем оказывается, что обычное определение схемы не рациональное, в связи с чем вводится понятие суммарной аппроксимации.

Локально одномерная схема для многомерного уравнения определяется как система p промежуточных схем, каждая их которых аппроксимирует уравнение (44) (с погрешностью аппроксимации $\psi_\alpha(u)$). Погрешность аппроксимации ψ на решении уравнения (43) для локально одномерной схемы определяется как сумма $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_\alpha + \cdots + \psi_p$. Хотя $\psi_\alpha = O(1)$, однако $\psi \to 0$ при $h_\alpha \to 0$ и $\tau \to 0$. А. А. Самарским построен ряд экономичных однородных по пространству и циклически однородных по времени разностных схем для уравнений параболического типа с переменными коэффициентами в произвольной области любого числа измерений, для систем уравнений параболического и гиперболического типов, для квазилинейных уравнений параболического типа

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad f = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right).$$

В частности, новая трактовка схем, предложенных Н. Н. Яненко, позволила (при любом $\sigma \geqslant 0{,}5$) освободиться от требований перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2, указать способ вычисления правых частей для промежуточных шагов и доказать устойчивость и сходимость модифицированных схем (опираясь на свойство суммарной аппроксима-

ции) в случае произвольной области. Класс схем любой природы, обладающий свойством суммарной аппроксимации, назван аддитивными схемами.

При доказательстве устойчивости и сходимости аддитивных схем применяется специальный метод априорных оценок, ориентированный на использование свойства суммарной аппроксимации. В случае линейного и квазилинейного параболических уравнений без смешанных производных доказана равномерная безусловная сходимость со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$.

Для однородного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае прямоугольной области Н. Н. Яненко установил (1962 г.) методом исключения сходимость в L_2 схемы (40) при $\sigma = 0{,}5$ со скоростью $O(\tau^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, при фиксированном отношении τ/h^2. Исследования Н. Н. Яненко были продолжены (1966 г.) Ю. Е. Бояринцевым. Результаты Н. Н. Яненко и его учеников изложены в книге Н. Н. Яненко «Метод дробных шагов» (курс лекций, 1966 г., ротапринтное издание).

Третья краевая задача для параболических и гиперболических уравнений в p-мерном параллелепипеде рассматривалась И. В. Фрязиновым. Им указан способ аппроксимации краевых условий, обеспечивающий второй порядок точности по τ для локально одномерных схем. Для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, построены (1963 г.) схемы, которые являются обобщением схемы (39) и точность которых составляет $O(h^2 + \tau^2)$ и $O(h^4 + \tau^2)$ в случае первой и третьей краевых задач. В этой же работе И. В. Фрязинов рассматривает методы, обобщающие локально одномерный метод и метод (39) на случай третьей краевой задачи для некоторого класса областей с криволинейными границами. Схема (39) трактуется им как аддитивная.

Для получения экономичных схем второго порядка С. К. Годунов и А. В. Забродин предложили (1962 г.) метод симметризации и применили его к системе уравнений акустики в случае двух измерений. Другой метод симметризации был предложен (1965 г.) А. А. Самарским и развит (1966 г.) И. В. Фрязиновым при построении аддитивных схем $O(h^2 + \tau^2)$ и $O(h^4 + \tau^2)$, являющихся обобщением схемы (39) для трех и большего числа измерений. И. В. Фрязинов сформулировал достаточные условия общего вида, при которых аддитивная схема имеет второй порядок точности по τ. Ряд экономичных схем для двумерного параболического уравнения со смешанными производными построен И. Д. Софроновым (1963, 1965 гг.), а для уравнений высокого порядка — Д. Г. Гордезиани (1965 г.). Развитию экономичных методов решения многомерных задач математической физики посвящены работы Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко (1966 г.) и А. А. Самарского (1966, 1967 гг.).

Различные варианты экономичных методов применялись для численного решения разнообразных задач математической физики. Укажем некоторые из них.

Для численного решения системы квазилинейных уравнений прогноза погоды экономичные методы были разработаны и реализованы Г. И. Марчуком и его учениками; для динамических и статистических задач теории упругости — А. Н. Коноваловым, Т. Б. Буриевым, для задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости — Л. А. Чудовым, Н. Н. Яненко, Б. Г. Кузнецовым, Н. Владимировой и др., для многомерной задачи о движении границ фазовых переходов — Б. М. Будаком, В. Ф. Васильевым, Б. Д. Моисеенко, А. А. Самарским, В. А. Успенским и др., для интегро-дифференциального уравнения переноса — Г. И. Марчуком, Н. Н. Яненко, В. Я. Гольдиным, Н. Н. Калиткиным, В. В. Пененко, У. М. Султангазиным и др.

Весьма существенное продвижение достигнуто в нелинейных задачах типа Стефана, приводящих к нелинейным задачам теплопроводности с подвижными границами (внутренними и внешними), положение которых подлежит определению. В работах Б. М. Будака и его учеников рассматривается применение разностных методов для решения задач типа Стефана в одномерном и многомерном случаях при наличии одного или нескольких фронтов. Исследован ряд методов: метод выпрямления фронтов, метод «ловли фронта в узел» и метод сглаживания. Из полученных в этих работах теоретических результатов отметим доказательство (проведенное методом конечных разностей) существования классического решения для уравнений с квазилинейной главной частью, а также сходимости неявных схем со сглаживанием в варианте локально одномерного метода в многомерном случае. Для многофронтовых задач доказана сходимость неявных схем с выпрямлением фронтов и получена оценка скорости сходимости. А. А. Самарским и Б. Д. Моисеенко предложен (1965 г.) также экономичный разностный метод сквозного счета для многомерной задачи Стефана (с любым числом фронтов), основанный на «размазывании» или «сглаживании» энтальпии и коэффициента теплопроводности. Основными конструктивными элементами всех указанных методов решения задач типа Стефана являются однородные разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Другие методы решения дифференциальных уравнений

1

Метод характеристик

Применение метода сеток при решении нелинейных задач для гиперболических уравнений и систем сопряжено с очевидными трудностями в тех случаях, когда заранее неизвестна область существования решения. Например, в случае системы двух квазилинейных уравнений относительно неизвестных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$

$$a_{11}u_x + a_{12}v_x + b_{11}u_y + b_{12}v_y = f_1,$$
$$a_{21}u_x + a_{22}v_x + b_{21}u_y + b_{22}v_y = f_2,$$