О РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. Самарский

1. Доклад посвящен обзору новых результатов по теории разностных методов решения задач математической физики, полученных автором и его сотрудниками в последние годы (некоторые из этих результатов до сих пор не публиковались).

Расширение области применения разностных схем и значительное усложнение решаемых на ЭВМ задач привело в последние годы к существенному углублению и пересмотру основных понятий теории разностных схем (таких, как понятия схемы, аппроксимации и устойчивости).

Использование при расчетах конкретных задач на ЭВМ лишь сравнительно грубых сеток (с целью экономии объема вычислений) и необходимость гарантировать при этом некоторый разумный уровень точности предъявляют высокие требования к разностным схемам. По существу требуется, чтобы схема была достаточно хорошей на реальных («грубых») сетках (а не при стремлении шага сетки к нулю). Этого можно добиться, если схема будет хорошо отображать, моделировать в пространстве сеточных функций основные свойства исходного дифференциального уравнения (такие, например, как самосопряженность, знакоопределенность и др.).

К разностным схемам, как правило, предъявляют такие требования, как однородность ([1]), консервативность ([1]), устойчивость, точность и экономичность (обычно это означает, что число операций для отыскания решения минимально по порядку, например, пропорционально числу N узлов сетки, см. [8]).

Основной задачей теории разностных схем является формулировка общих принципов построения схем заданного качества для широких классов задач математической физики. Надо формализовать приемы построения схем и приемы их исследования, указав набор правил проверки схемы, например, на устойчивость и аппроксимацию.

Можно указать следующие три достаточно общих способа построения схем ([8]):

1) интегро-интерполяционный метод получения консервативных схем [1],

2) метод регуляризации в семействе устойчивых схем [2],

3) метод суммарной аппроксимации [3] — [5].

Эти методы дополняют друг друга; каждый из них основан на теоретических результатах, полученных для линейных задач математической физики. Обзор литературы см. в [8].

2. Чтобы получить схему требуемого качества, необходимо задать исходное семейство схем, в котором осуществляется выбор. Чем уже исходное семейство, тем легче задача поиска.

Прежде всего надо дать определение объекта исследования, т. е. схемы; от этого зависит выбор средств исследования. Мы определяем разностную схему как семейство операторных или операторно-разностных уравнений, зависящее от некоторых параметров («шагов» сетки).

При этом погрешность аппроксимации определяется как величина невязки, возникающей при подстановке в разностное уравнение некоторого заданного вектора, например, решения исходного дифференциального уравнения. Другое определение схемы (аддитивной схемы) связано с новым понятием аппроксимации — суммарной аппроксимации — и дано в п. 7.

Выше уже говорилось об эволюции понятия аппроксимации. Прежде всего было установлено, что для некоторых разностных схем аппроксимация в C отсутствует, а имеет место аппроксимация в более слабой норме [1]. Такой нормой для оценки погрешности аппроксимации ψ является негативная норма $\|\psi\|_{A^{-1}}$, определяемая как верхняя грань функционала $|(\psi, z)|$, где z — любой вектор из H такой, что $\|z\|_A = 1$, или

$$\sup_{\|z\|_A\neq 0} \frac{|(\psi, z)|}{\|z\|_A} = \|\psi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\psi, \psi)},$$

где $A = A^* > 0 : H \to H$, H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$. Получение априорных оценок решения разностных уравнений в H_A через правую часть в негативной норме, т. е. из $H_{A^{-1}}$, стало важной задачей теории разностных схем.

Для уравнений эллиптического типа, которые можно записать в операторном виде

$$Ay = \varphi,\ A = A^* \geqslant \delta E, \quad \delta > 0 \qquad (A: H \to H), \tag{1}$$

справедлива точная оценка $\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}}$ и, вообще, $\|y\|_{A^\alpha} = \|\varphi\|_{A^\beta}$, $\alpha > 0$, где $\alpha - \beta = 2$, т. е. верны энергетические оценки с зазором в порядке норм для решения и правой части, равным 2.

Типичными являются следующие операторы (консервативные или дивергентные)

$$A_0 = \sum_{\alpha=1}^{p} T_\alpha^* T_\alpha, \quad A = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{p} T_\alpha^* S_{\alpha\beta} T_\beta, \tag{2}$$

где T_α — линейный оператор из H в гильбертово пространство H_α со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot]_\alpha$, T_α^* — оператор из H_α в H, сопряженный T_α в следующем смысле:

$$(T_\alpha y, v]_\alpha = (y, T_\alpha^* v)$$

для всех $y \in H$, $v \in H_\alpha$, $S_{\alpha\beta}$ — оператор из H_β в H_α. Если матрица-оператор $S = (S_{\alpha\beta})$ — положительно определенная, т. е.

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{\beta=1}^{p} S_{\alpha\beta}\xi_\beta, \xi_\alpha\right]_\alpha \geqslant c_1 \sum_{\alpha=1}^{p} (\xi_\alpha, \xi_\alpha]_\alpha$$

для всех $\xi_\alpha \in H_\alpha$, то $A \geqslant c_1 A_0$, или $(Ay, y) \geqslant c_1 (A_0 y, y)$, для всех $y \in H$. Тогда для уравнения

$$Az = \psi, \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha, \tag{3}$$

справедлива априорная оценка

$$\|z\|_{A_0} \leqslant \frac{1}{c_1} \sum_{\alpha=1}^{p} \|T_\alpha^{*^{-1}} \psi_\alpha]|_\alpha,$$

где

$$\|z\|_{A_0}^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|T_\alpha z]|_\alpha^2, \quad \|\xi_\alpha]|_\alpha^2 = (\xi_\alpha, \xi_\alpha]_\alpha, \xi_\alpha \in H_\alpha.$$

Если ψ_α представим в виде суммы $\psi_\alpha = T_\alpha^* \eta_\alpha + \psi_\alpha^*$, то

$$\|T_\alpha^{*^{-1}} \psi_\alpha]|_\alpha \leqslant \|\eta_\alpha]|_\alpha + \|T_\alpha^{*^{-1}} \psi_\alpha^*]|_\alpha \leqslant \|\eta_\alpha]|_\alpha + \frac{1}{c_2} \|\psi_\alpha^*\|$$

при $\| T_\alpha^* v \| \geqslant c_2 \| v]|_\alpha$, $c_2 > 0$. Отметим, что здесь не требуется самосопряженности оператора A.

Такого типа априорные оценки позволяют провести достаточно полное исследование точности однородных разностных схем для эллиптических уравнений и систем эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами на неравномерных сетках (см. [5], [9]). Нормы $\|z\|_A$ и $\|\psi\|_{A^{-1}}$ в случае эллиптических уравнений второго порядка соответствуют сеточным нормам в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{(-1)}$ (см. [10]).

3. Негативные нормы естественно возникают и при оценке погрешности аппроксимации нестационарных схем, используемых для решения уравнений и систем параболического и гиперболического типов. Эти схемы принадлежат семейству операторно-разностных схем.

Назовем m-слойной разностной (операторно-разностной) схемой разностное уравнение $(m-1)$-го порядка $(m > 1)$ с операторными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_{jk} y_{j+k} = C_{j0} y_j + F_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где C_{jk}, $j = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, m-1$,— линейные операторы, отображающие H_h на H_h; $y_j = y_{h\tau}(t_j)$ — искомая абстрактная функция дискретного аргумента $t_j = j\tau \in \omega_\tau$, $j = 0, 1, \ldots$, со значениями в H_h, так что $y_j \in H_h$ для каждого $t_j \in \omega_\tau$; $F_j = F_{h\tau}(t_j)$ — заданная функция, $F_j \in H_h$ для всех $t_j \in \omega_\tau$; функции y_j и F_j, а также операторы C_{jk} зависят от параметров h и τ.

Наиболее часто используются двухслойные ($m = 2$) и трехслойные ($m = 3$) схемы. Они записываются в канонической форме

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A y_k = \varphi_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ задано } y_0 \in H, \tag{5}$$

$$B \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + D \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\tau^2} + A y_k = \varphi_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \text{ заданы } y_0, y_1 \in H. \tag{6}$$

Операторы A, B и D зависят, вообще говоря, от параметров h, τ и $t_k = k\tau$. Будем всюду предполагать, что схемы (5) и (6) разрешимы, т. е. существуют B^{-1} для (5) и $(B + \frac{2}{\tau} D)^{-1}$ для (6).

Для простоты изложения считаем, что A, B, D — постоянные (не зависящие от t_k) операторы. Погрешность аппроксимации на заданном векторе $u \in H_0$ определяется как невязка, возникающая при подстановке в разностное уравнение (5) или (6) $u^h(t_k)$ вместо y_k; так, например, для двухслойной схемы (5) имеем:

$$\psi_k(u) = \varphi_k - \left(A u_k^h + B \frac{u_{k+1}^h - u_k^h}{\tau} \right),$$

где $u^h = P_h u \in H_h$ при $u \in H_0$, P_h — линейный оператор, отображающий пространство H_0 на H_h.

4. Устойчивость схемы определяется как выполнение некоторой априорной оценки решения разностной задачи через правую часть и начальные данные.

Пусть $\|\cdot\|_{(1_h)}$ и $\|\cdot\|_{(1_0)}$ — некоторые нормы в H_h, $Q_n[\varphi^{n-1}]$ — норма в пространстве $H^{(n)}$ векторов $\varphi^{n-1} = \{\varphi(0), \varphi(t_1), \ldots \ldots, \varphi(t_{n-1})\}$ размерности n, где $\varphi(t_k) \in H_h$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Будем говорить, что схема (5) устойчива, если существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от h, τ и от выбора

φ_k и y_0 из H_h, такие, что выполняется неравенство

$$\|y_n\|_{(1_n)} \leqslant M_1 \|y_0\|_{(1_0)} + M_2 Q_n[\varphi^{n-1}]. \tag{7}$$

Обычно $\|\cdot\|_{(1_n)}$ определяется как энергетическая норма

$$\|y\|_{(1_n)} = \|y\|_{D_n} = \sqrt{(D_n y, y)}, \quad \text{где} \quad D_n = D_n^* = D(t_n) > 0.$$

Для оценки погрешности $z_k = y_k - u_k^h$, где u — точное решение исходной задачи, получаем:

$$B\,\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = \psi_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, z_0 = 0. \tag{8}$$

Пусть $A = A^* \geqslant \delta_1 E$, $B \geqslant \delta_2 E$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Для z получены априорные оценки (см. [6], [7], [10] — [15]) (7), в которых: при $B \geqslant \frac{\tau}{2} A$

1) $$D = A, \quad Q_n[\psi^{n-1}] = \|\psi_0\|_{A^{-1}} + \|\psi_{n-1}\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi_{\bar{t},k}\|_{A^{-1}}, \quad \psi_{\bar{t},k} = \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\tau},$$

2) $$D = A, \quad Q_n[\psi^{n-1}] = \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|B^{-1}\psi_k\|_A,$$

3) $$D = B = B^*, \quad Q_n[\psi^{n-1}] = \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi_k\|_{B^{-1}};$$

при $B \geqslant \varepsilon E + \frac{\tau}{2} A$, $\varepsilon > 0$

4) $$D = A, \quad Q_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi_k\|;$$

при $B \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2} \tau A$, $\varepsilon > 0$

5) $$D = A, \quad Q_n[\psi^{n-1}] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi_k\|_{B^{-1}},$$

6) $$D = B = B^*, \quad Q_n[\psi^{n-1}] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n-1} \tau \|\psi_k\|_{A^{-1}};$$

7) $D = E$ — единичный оператор, $Q_n[\psi^{n-1}] =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \tau \left(\|A^{-1}\psi_k\| + \|(A^{-1}\psi)_{\bar{t},k}\| \right)$$

при $B \geqslant \frac{\tau}{2} A$ и перестановочных операторах A и B : $AB = BA$.

Отсюда видно, что норма, в которой оценивается вектор φ^n, зависит не только от нормы $\|\cdot\|_D$, но и от условия, связывающего A и B: $B \geqslant \frac{\tau}{2} A$, $B \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2} \tau A$ или $B \geqslant \varepsilon E + \frac{\tau}{2} A$.

Для трехслойной схемы (6) достаточное условие устойчивости имеет вид: $D \geqslant \frac{\tau^2}{4}(1+\varepsilon) A$, $\varepsilon > 0$.

При изучении сходимости схемы (5), т. е. при оценке решения задачи (5) погрешность аппроксимации ψ представляют в виде суммы $\psi = \psi^{(1)} + \ldots + \psi^{(m)}$ и соответственно полагают $z = z^{(1)} + \ldots + z^{(m)}$; для разных $z^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, могут быть использованы разные априорные оценки, например, 1), 4), 5), 2), что позволяет минимизировать требования гладкости, предъявляемые к решению $u(t) \in H_0$ для получения заданного порядка аппроксимации (А. А. Самарский, А. В. Гулин).

5. Поскольку вектор $y^n = \{y(t_1), \ldots, y(t_n)\}$ принадлежит пространству $H^{(n)}$, то для его оценки можно воспользоваться некоторой нормой $J_n[y^n]$ в $H^{(n)}$, например, вида

$$J_n^2[y^n] = \sum_{k=1}^{n} \tau\left(\|y_k\|^2_{(1_k)} + \|y_{\bar{t},k}\|^2_{(2_k)}\right) + \|y_n\|^2_{(3_n)}, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|_{(1_k)}$, $\|\cdot\|_{(2_k)}$ и $\|\cdot\|_{(3_k)}$ — нормы в пространстве H_h. Тогда устойчивость схем (5) будет означать выполнение неравенства

$$J_n[y^n] \leqslant M_1 \|y_0\|_{(1_0)} + M_2 Q_n[\varphi^{n-1}].$$

Рассмотрим схему с весами

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A(\sigma y_{k+1} + (1-\sigma) y_k) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где $A = A^* > 0$. Она устойчива в H_A при $\sigma \geqslant \sigma_0$, где $\sigma_0 = 0{,}5 - 1/(\tau\|A\|)$. Потребуем, чтобы выполнялось условие устойчивости из H в $H^{(n)}$ по начальным данным:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \tau\left(\|Ay_k\|^2 + \|y_{\bar{t},k}\|^2\right) \leqslant M^2 (Ay_0, y_0),$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ не зависит от τ и h. Это условие выполнено при

$$\sigma \geqslant \bar{\sigma}_0, \quad \text{где} \quad \bar{\sigma}_0 = 1 - \frac{\sqrt{M^4 + M^2\eta - 1} - M^2 + 1}{\eta}, \qquad \eta = \tau\|A\|.$$

Отсюда видно, что схема с $\sigma = 1$ является безусловно (при любых τ и h) устойчивой, а симметричная схема ($\sigma = 0{,}5$) условно устойчива при $\tau \leqslant \frac{1}{\|A\|} 2(1 + \sqrt{2M^2 - 1}) = \tau_0$, хотя она и является безусловно устойчивой из H_A в H_A (на слое).

Возникает задача поиска новых схем, которые являются безусловно устойчивыми в смысле определения (9) (В. Б. Андреев).

6. Общая теория устойчивости позволяет формулировать метод регуляризации как некоторый прием поиска схем нужного качества в классе устойчивых схем.

Рассмотрим двухслойную схему (5) и обозначим ее $(B,\ A;\ \varphi)$. Чтобы задать исходное семейство схем $\{(B,\ A;\ \varphi)\}$, надо указать свойства операторов A и B; например, $B > 0$, $B^{-1}: H \to H$, $A = A^* > 0$. Достаточные условия устойчивости выделяют класс устойчивых схем. В этом классе выбирается исходная схема $(B,\ A;\ \varphi)$, удовлетворяющая некоторым из требований (например, однородности, консервативности, аппроксимации), и от нее совершается переход к схеме $(\tilde{B},\ \tilde{A};\ \tilde{\varphi})$ из того же класса, удовлетворяющей всем требованиям. Обычно полагают $\tilde{A} = A$; тогда из условия $\tilde{B} \geqslant B$ следует устойчивость новой схемы.

Так, например, при построении экономичных схем оператор $\tilde{B}$ может выбираться в факторизованном виде $B = B_1B_2 \ldots B_p$, где $B_1, \ldots, B_\alpha, \ldots, B_p$ — экономичные операторы (оператор B_α экономичен, если для решения уравнения $B_\alpha v = f$ требуется число действий, пропорциональное числу узлов сетки). Пусть $B = E + \tau(R_1 + \ldots + R_p)$, где $R_1, \ldots, R_p$ — самосопряженные, положительные, попарно перестановочные и экономичные операторы. Тогда $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$ и $\tilde{B} > B$. Факторизованная схема $(\tilde{B},\ A;\ \tilde{\varphi})$ устойчива и экономична.

Метод регуляризации позволяет получить абсолютно устойчивые экономичные схемы для систем многомерных уравнений гиперболического и параболического типов ([16], [17]).

7. Указанный выше метод получения экономичных факторизованных схем, в силу требования перестановочности операторов $B_1, B_2, \ldots, B_p$ (или $R_1, R_2, \ldots, R_p$), накладывает довольно жесткие ограничения на класс задач (в случае уравнений в частных производных это, прежде всего, ограничение на форму области).

Отказаться от этих ограничений можно, если представить R в виде $R = R^- + R^+$ и соответственно

$$\tilde{B} = (E + \tau R^-)(E + \tau R^+) = E + \tau R + \tau^2 R^- R^+ = B + \tau^2 R^- R^+ > B,$$

где R^- и R^+ — сопряженные друг другу операторы (они являются экономичными, так как имеют треугольные матрицы). Однако при такой факторизации понижается порядок аппроксимации.

Весьма эффективным оказался метод суммарной аппроксимации (см. [3], [4], [11], [18] — [22]), который позволяет получать экономичные схемы при очень слабых ограничениях на операторы дифференциального уравнения и форму области. При его разработке оказалось необходимым ввести новое понятие схемы и новое понятие аппроксимации.

В докладе автора [18] на Международном математическом конгрессе в Москве (1966 г.) было введено общее определение аддитивной схемы как системы операторно-разностных уравнений, погрешность аппроксимации которых определяется как сумма невязок для отдельных операторных уравнений. Итак, рассматривается система операторно-разностных уравнений для перехода со слоя j на слой $j+1$:

$$\sum_{\beta=1}^{p} C^j_{\alpha\beta} y^{j+\beta/p} = C^j_{\alpha 0} y^j + F^j_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где

$$y^{j+\beta/p} = y(t_{j+\beta/p}) = y\left(\left(j + \frac{\beta}{p}\right)\tau\right); \quad C^j_{\alpha\beta}, C^j_{\alpha 0}\colon H_h \to H_h$$

— линейные операторы. Для перехода со слоя j на слой $j+1$, т. е. определения y^{j+1} по заданному y^j, надо решить систему операторных уравнений с матрицей $(C_{\alpha\beta})$. При $j=0$ задается произвольный вектор $y_0 \in H$.

Погрешность аппроксимации $\psi = \psi(u)$ на векторе $u \in H_0$ решения исходной задачи определяется как сумма

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha(u), \tag{11}$$

где $\psi_\alpha \doteq \psi^{j+\alpha/p}$ — невязка для уравнений номера α.

Схема (10) с суммарной погрешностью аппроксимации (11) называется двухслойной аддитивной схемой.

Аналогично определяется m-слойная аддитивная схема. Если $(C_{\alpha\beta})$ — нижняя треугольная матрица и $C_{\alpha\alpha}$ — экономичные операторы, то аддитивная схема является экономичной.

Заметим, что алгоритмы всех известных экономичных схем можно трактовать как аддитивные схемы.

Для практики важно указать простые эвристические приемы построения аддитивных экономичных схем.

Два таких приема, гарантирующих наличие суммарной аппроксимации для получающихся аддитивных схем, указаны для абстрактной задачи Коши $(\mathcal{A}, f)$ в банаховом пространстве H_0:

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = u_0, \tag{12}$$

где линейный оператор $\mathcal{A}$ с всюду плотной областью определения в H_0 есть сумма операторов более простой структуры $\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{A}_\alpha$.

Эти приемы заключаются в замене задачи (12) системой более простых задач Коши.

Первый прием [3].

На интервалах $\Delta_\alpha = (t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, последовательно решаются задачи Коши $\left(\frac{1}{p}\mathcal{A}_\alpha, f_\alpha\right)$, что дает цепочку задач

$$\left(\frac{1}{p}\mathcal{A}_1, f_1\right) \to \left(\frac{1}{p}\mathcal{A}_2, f_2\right) \to \ldots \to \left(\frac{1}{p}\mathcal{A}_p, f_p\right), \tag{13}$$

причем $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = f$.

Каждая задача $\left(\frac{1}{p}\mathcal{A}_\alpha, f_\alpha\right)$ аппроксимируется на Δ_α в обычном смысле двухслойной (или трехслойной) схемой (B_α, $\mathcal{A}_\alpha$; φ_α). В результате мы получаем аддитивную схему, аппроксимирующую исходное уравнение (12) в суммарном смысле, поскольку таким свойством обладает система задач Коши (13).

Второй прием [4]. На интервале $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ последовательно решаются задачи ($\mathcal{A}_\alpha$, f_α), т. е. рассматривается цепочка задач Коши

$$(\mathcal{A}_1, f_1) \to (\mathcal{A}_2, f_2) \to \ldots \to (\mathcal{A}_p, f_p), \tag{14}$$

причем решение $v_{(\alpha)}^{j+1}$ задачи ($\mathcal{A}_\alpha$, f_α) используется в качестве начального значения $v_{(\alpha+1)}^{j} = v_{(\alpha)}^{j}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, для задачи ($\mathcal{A}_{\alpha+1}$, $f_{\alpha+1}$), а $v_{(1)}^{j} = v_{(p)}^{j}$. Система задач Коши (14) также обладает суммарной аппроксимацией и, следовательно, этим свойством обладает и аддитивная схема, полученная в результате аппроксимации задач ($\mathcal{A}_\alpha$, f_α) схемами (B_α, A_α; φ_α) в обычном смысле.

Изучение аддитивных задач Коши (13) и (14) как самостоятельных объектов исследования проводилось и в [28] — [32]. Несмотря на различие в терминологии (слабая аппроксимация [28], [30], полудискретная аппроксимация [31] и др.), всюду используется одно и то же свойство задач (13) и (14) — наличие суммарной аппроксимации.

В общем случае все аддитивные цепочки задач Коши (13) и (14) имеют первый порядок точности. Симметризованная цепочка

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_1, \frac{1}{2}f_1\right) \to \ldots \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_p, \frac{1}{2}f_p\right) \to \\ \to \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_p, \frac{1}{2}f_p\right) \to \ldots \to \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_1, \frac{1}{2}f_1\right)$$

имеет при специальном выборе $f_1, \ldots, f_p$, $\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, точность $O(\tau^2)$.

По принципу симметризации строятся экономичные аддитивные схемы $O(\tau^2)$ в [19] — [22].

8. Для получения экономичных аддитивных схем в случае параболических уравнений необходимо (см. [20] — [22], [26]) в гранич-

ные условия для промежуточных значений $y^{j+\alpha/p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, вводить поправочные члены $O(\tau)$ и $O(\tau^2)$, что сильно усложняет алгоритм схемы, а для некоторых схем требует перестановочности операторов $\{\mathcal{A}_\alpha\}$. Так, для неявной схемы переменных направлений [33], трактуемой как аддитивная схема и потому пригодной не только для прямоугольника, но и для ступенчатой области, требуется для определения промежуточного значения $y^{j+1/2}$ вводить на границе поправку $O(\tau^2)$ того же порядка, что и точность схемы ([19], [5], [8]).

Поэтому изучение устойчивости по краевым данным является важной задачей теории экономичных схем. Исследования показали, что для большинства аддитивных экономичных схем, аппроксимирующих уравнения параболического типа в случае ступенчатых областей, имеет место устойчивость по краевым данным. Отсюда следует, что поправки в краевых условиях можно опустить без нарушения порядка точности схемы ([27]).

Для повышения порядка точности аддитивных схем в некоторых узлах следует писать разностные уравнения, обладающие аппроксимацией в обычном смысле. Это приводит к экономичным аддитивным схемам на графах ([24] — [25]). Изучение скорости сходимости таких схем основано на использовании суммарной аппроксимации и априорных оценках специального вида ([24]).

9. Рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1, \tag{15}$$

где $\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{A}_\alpha$ — линейный оператор с всюду плотной областью определения в банаховом пространстве H_0; u_0 и u_1 — произвольные векторы из H_0.

Введем на $[0, T]$ сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots\}$ и на каждом отрезке $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ рассмотрим p задач Коши (ср. [34])

$$\frac{1}{p}\frac{d^2 v_{(\alpha)}}{dt^2} + \mathcal{A}_\alpha v_{(\alpha)} = f_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \; t \in (t_j, t_{j+1}], \tag{16}$$

с одними и теми же начальными данными

$$v_{(\alpha)}(t_j) = v(t_j), \quad \frac{dv_{(\alpha)}}{dt}(t_j) = \frac{dv}{dt}(t_j), \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$v(0) = u_0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = u_1.$$

Решение $v(t_{j+1})$ на слое $t = t_{j+1}$ определяется как среднее арифметическое

$$v(t_{j+1}) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} v_{(\alpha)}(t_{j+1}), \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Имеет место оценка $\| u(t_j) - v(t_j) \| = O(\tau^2)$ для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$, где $u = u(t)$ — решение исходной задачи.

Аппроксимируем каждое из уравнений (16) номера α обычной трехслойной схемой с весом σ_α. Учитывая, что $y^j_{(\alpha)} = y^j = y$, $y^{j-1}_{(\alpha)} = y^{j-1} = \check{y}$, получим аддитивную схему для задачи (15):

$$(E + \sigma_\alpha \tau^2 p A_\alpha)\frac{y_{(\alpha)} - 2y + \check{y}}{p\tau^2} + A_\alpha y = f_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{18}$$

где A_α — разностная аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\alpha$, а $y_{(\alpha)} = y^{j+1}_{(\alpha)}$. Решение y^{j+1} на новом слое $j+1$ определяется, по аналогии с (17), по формуле

$$y^{j+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y^{j+1}_{(\alpha)}. \tag{19}$$

Нетрудно получить условие устойчивости схемы (18), (19), предполагая, что A_α: $H_h \to H_h$, где H_h — гильбертово пространство, и

$$A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Естественно считать, что $E + \sigma_\alpha \tau^2 p A_\alpha$ — положительно определенный оператор. Вводя обозначения

$$\tilde{A}_\alpha = (E + \sigma_\alpha \tau^2 p A_\alpha)^{-1} A_\alpha, \quad \tilde{f}_\alpha = (E + \sigma_\alpha \tau^2 p A_\alpha)^{-1} f_\alpha, \tag{20}$$

перепишем уравнения (18) в виде

$$\frac{y_{(\alpha)} - 2y + \check{y}}{\tau^2} + \tilde{A}_\alpha y = \tilde{f}_\alpha. \tag{21}$$

Суммируя (21) по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и учитывая (19), получим

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} + \tilde{A} y = \tilde{f}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \tilde{A} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}_\alpha, \quad \tilde{f} = \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{f}_\alpha. \tag{22}$$

Полученная явная схема с оператором $\tilde{A}$, в силу общей теории [8], [13], устойчива, если

$$E \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 \tilde{A},$$

что имеет место при

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\tau^2 \| A_\alpha \|}{1 + \sigma_\alpha \tau^2 p \| A_\alpha \|} \leqslant \frac{4}{1+\varepsilon}, \tag{23}$$

где $\varepsilon \in (0, 1]$ — любое число. Если $\sigma_\alpha > 0$, то можно пользоваться более грубым достаточным условием

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{\sigma_\alpha} \leqslant \frac{4p}{1+\varepsilon},$$

из которого, очевидно, следует (23), так как $\xi_\alpha/(1 + \sigma_\alpha \xi_\alpha) < \frac{1}{\sigma_\alpha}$ при $\sigma_\alpha > 0$ и $\xi_\alpha > 0$. Аналогичный метод позволяет строить аддитивные экономичные схемы $O(\tau^2)$ для уравнений порядка $2m$, $m > 1$ (Д. Г. Гордезиани, А. А. Самарский).

10. Если дифференциальное уравнение соответствует некоторому интегральному закону сохранения (уравнению баланса), то естественно требовать, чтобы и соответствующая разностная схема обладала этим свойством, т. е. выражала закон сохранения на сетке. Такие схемы называют консервативными. Обоснование необходимости консервативности разностных схем для задач математической физики дано в [1].

На практике, однако, часто встречаются неконсервативные схемы. В качестве примера укажем схему крест для уравнения Лапласа в произвольной области, известную как схема Ш. Е. Микеладзе или Шортли — Уилера ([35]). Неконсервативность этой схемы в данном случае эквивалентна несамосопряженности разностного оператора.

Консервативная схема на неравномерных сетках (с самосопряженным разностным оператором) решения задачи Дирихле для уравнения $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f$ в p-мерной области произвольной формы получена и исследована в работе [9] при помощи интегро-интерполяционного метода [1]. Доказана ее сходимость в C со скоростью $O(h^2)$ на равномерной сетке и $O\left(h^2 \ln \frac{1}{h}\right)$ на неравномерной сетке, а также сходимость со скоростью $O(\sqrt{h})$ в случае разрывного коэффициента $k(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

Особое значение принцип консервативности приобретает при построении разностных схем для нелинейных задач, таких, как задачи газодинамики и магнитной гидродинамики. Для них до сих пор не получено каких-либо законченных теоретических результатов (об устойчивости, сходимости и т. д.). Именно поэтому весьма важны достаточно общие и достаточно формальные принципы построения разностных схем, опирающиеся на теорию для линейных задач и практический опыт вычислений на ЭВМ для нелинейных задач.

Таким формальным принципом является правило получения полностью консервативных схем для задач газодинамики и магнитной гидродинамики: кроме сохранения полной энергии, требуется, чтобы выполнялись соотношения баланса отдельных видов энергии (внутренней, кинетической, магнитной и др.) ([36], [38]).

Например, для уравнений одномерной газодинамики существует пятипараметрическое семейство схем $O(\tau)$, заданных на шеститочечном шаблоне. Указанное правило отбора выделяет однопараметрическое семейство полностью консервативных схем $O(\tau)$ (см. [36]), среди которых имеется лишь одна схема $O(\tau^2)$ (см. также [37]). Принцип полной консервативности может быть распространен на другие задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Об однородных разностных схемах, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1, 1 (1961), 5—63.

[2] Самарский А. А., О регуляризации разностных схем, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, 1 (1967), 62—93.

[3] Самарский А. А., Об одном экономичном разностном методе решения многомериого параболического уравнения в произвольной области, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2, 1 (1962), 25—56.

[4] Самарский А. А., О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем, ДАН СССР, 165, 6 (1965), 1253—1256.

[5] Самарский А. А., Лекции по теории разностных схем. М., изд. Вычисл. центра АН СССР, 1969.

[6] Самарский А. А., К теории разностных схем, ДАН СССР, 165, 5 (1965), 1007—1010.

[7] Самарский А. А., Классы устойчивых схем, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, 5 (1967), 1096—1133.

[8] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., изд-во «Наука», 1971.

[9] Самарский А. А., Фрязинов И. В., О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области эллиптического уравнения с переменными коэффициентами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 11, 2 (1971), 385—410.

[10] Андреев В. Б., О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 8, 6 (1968), 1218—1231.

[11] Самарский А. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем, ДАН СССР, 181, 4 (1968), 808—811.

[12] Самарский А. А., Некоторые вопросы общей теории разностных схем, Сб.: «Дифференциальные уравнения с частными производными», Труды симпозиума, посвященного 60-летию С. Л. Соболева, М., изд-во «Наука», 1970, 191—223.

[13] Самарский А. А., Об устойчивости трехслойных разностных схем, ДАН СССР, 192, 5 (1970), 998—1001.

[14] Гулин А. В., Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойных разностных схем, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 8, 4 (1968), 889—902.

[15] Самарский А. А., Гулин А. В., Об устойчивости разностных схем по правым частям, ДАН СССР, 192, 2 (1970), 285—288.

[16] Гулин А. В., Самарский А. А., Об устойчивости разностных схем в комплексном гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 181, 5 (1968), 351—357.

[17] Меладзе Г. В., Схемы повышенного порядка точности для систем эллиптических и параболических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 10, 2 (1970), 482—490.

[18] Меладзе Г. В., О факторизованных схемах для некоторых систем уравнений гиперболического типа, Семинар ин-та прикл. матем. Тбилисского ун-та, 2 (1970), 15—20.

[19] Самарский А. А., Аддитивные схемы, Доклад на Международном конгрессе математиков в Москве, 1966.

[20] Фрязинов И. В., Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 8, 2 (1968), 436—443.

[21] Фрязинов И. В., Априорные оценки для одного семейства экономичных схем, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9, 3 (1969), 595—604.

[22] Фрязинов И. В., Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9, 6 (1969), 1316—1326.

[23] Самарский А. А., Фрязинов И. В., О сходимости локально-одномерной схемы решения многомерного уравнения теплопроводности на неравномерных сетках, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, 3 (1971), 642—657.

[24] Фрязинов И. В., Экономичные аддитивные схемы с уравнениями на графах, ч. I—III, препринты № 11—13, 1971 г., ин-т прикл. матем. АН СССР.

[25] Фрязинов И. В., Алгоритмы решения разностных схем на графах, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**, 2 (1970), 474—477.

[26] Штойан Г., Некоторые экономичные аддитивные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**, 3 (1970), 644—653.

[27] Штойан Г., К устойчивости аддитивных разностных схем по краевым данным, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, 4 (1971), 934—947.

[28] Яненко Н. Н., О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений, Сиб. матем. ж., 5, 6 (1964), 1431—1434.

[29] Гордезиани Д. Г., О применении локально-одномерного метода для решения многомерного уравнения параболического типа 2-го порядка, Сообщ. АН ГССР, XXXIX, 3 (1965), 535—541.

[30] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, изд-во «Наука», Сиб. отд., 1967.

[31] Temam R., Sur l'approximation semi-discrète de la solution d'équations d'évolution linéaires par la méthode de pas fractionnaires, C. R. Acad. Sci. Paris, **263** (1966), 241—244.

[32] Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В., О моделировании многомерных квазилинейных уравнений параболического типа одномерными уравнениями, Сообщ. АН ГССР, **60**, 3 (1970), 537—540.

[33] Peaceman D. W., Rachford H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., 3, 1 (1955), 28—42.

[34] Самарский А. А., Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, 4 (1964), 638—648.

[35] Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.

[36] Попов Ю. П., Самарский А. А., Полностью консервативные разностные схемы, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **9**, 4 (1969), 953—958.

[37] Гольдин В. Я., Ионкин А. И., Калиткин Н. Н., Об энтропийной схеме расчета газодинамики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9, 6 (1969), 1411—1413.

[38] Попов Ю. П., Самарский А. А., Полностью консервативные схемы для уравнений магнитной гидродинамики, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**, 4 (1970), 990—998.