

УДК 518.517.944/947

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ, А. В. ГУЛИН

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПО ПРАВЫМ ЧАСТЯМ**

В работах (1, 2) получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным двухслойных разностных схем, определяемых как операторно-разностные уравнения на семействе гильбертовых пространств  $\{H_h\}$ .

В настоящей работе построены оценки некоторых энергетических норм решений двухслойных разностных схем через начальные данные  $y_0 \in H_h$  и правую часть  $\varphi(t) \in H_h$ , совпадающие при  $\varphi = 0$  с оценками работ (1, 2).

Для изучения устойчивости по правой части применяется метод выделения стационарных неоднородностей (см. (3, 4)), что позволяет освободиться от некоторых ограничений (таких, например, как малость шага по времени  $\tau$ ) работы (5), где устойчивость исследовалась методом энергетических неравенств. Кроме того, оказалось возможным рассмотреть случай несамосопряженных операторов и установить ряд новых оценок. Отметим, что все полученные оценки имеют место при тех же условиях на операторы разностной схемы, которые обеспечивают устойчивость по начальным данным.

1. Пусть  $\{H_h\}$  — семейство гильбертовых пространств (вещественных или комплексных), зависящее от параметра  $h$  ( $H_h$  является аналогом пространства сеточных функций),  $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\}$  — сетка с шагом  $\tau > 0$  и  $A, B: H_h \rightarrow H_h$  — линейные (аддитивные и однородные) операторы, действующие в  $H_h$  и зависящие от  $h, \tau$  и  $t = t_n$ .

Двухслойная разностная схема определяется как операторное уравнение (см. (5))

$$B(t_n)y_t + A(t_n)y = \varphi(t_n), \quad n = 0, 1, \dots; \quad y_0 \in H_h, \quad (1)$$

где  $y = y_n = y_h, \tau(t_n) \in H_h, y_t = (y_{n+1} - y_n) / \tau, \varphi(t) \in H_h$ .

Оператор  $A: H \rightarrow H$  называется положительным ( $A > 0$ ), если  $(Ax, x) > 0$  для всех  $0 \neq x \in H$ , неотрицательным ( $A \geq 0$ ), если  $(Ax, x) \geq 0$  для всех  $x \in H$ . Если  $A$  — самосопряженный и положительный оператор, то можно ввести энергетическую норму  $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ .

Следующие леммы потребуются для доказательства теорем об устойчивости.

Л е м м а 1 (см. (1, 2)). *Неравенство*

$$\|S\| \leq \rho, \quad S = E - \tau C, \quad (2)$$

следует из условия

$$B_0 \geq \frac{\tau}{1+\rho} A, \quad B_0 = \operatorname{Re} B = \frac{B+B^*}{2}, \quad (3)$$

если  $\rho \geq 1, A^* = A > 0, C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ , и из условия

$$(A^{-1})_0 \geq \frac{\tau}{1+\rho} B^{-1}, \quad (A^{-1})_0 = \operatorname{Re} A^{-1}, \quad (4)$$

если  $\rho \geq 1, B^* = B > 0, C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ .

З а м е ч а н и е. В случае действительного пространства  $H_h$  неравенства (3) и (4) эквивалентны соответственно условиям

$$B \geq \frac{\tau}{1+\rho} A; \quad A^{-1} \geq \frac{\tau}{1+\rho} B^{-1}.$$

Будем говорить (см. (5)), что самосопряженный оператор  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$ , если существует постоянная  $c_1 \geq 0$ , не зависящая от  $\tau, h, n$ , такая, что при любых  $t$  и  $\tau$  справедливы операторные неравенства

$$(1 - c_1\tau)\mathcal{D}(t - \tau) \leq \mathcal{D}(t) \leq (1 + c_1\tau)\mathcal{D}(t - \tau). \quad (5)$$

Лемма 2. Если  $\mathcal{D}(t)$  — самосопряженный положительный оператор, то условие Липшица (5) эквивалентно оценке

$$\|\mathcal{D}^{1/2}(t)(\mathcal{D}^{-1}(t) - \mathcal{D}^{-1}(t - \tau))\mathcal{D}^{1/2}(t)\| \leq c_1\tau. \quad (6)$$

Доказательство. Переходя в (5) к обратным операторам, получим

$$-c_1\tau\mathcal{D}^{-1} \leq \mathcal{D}^{-1} - \check{\mathcal{D}}^{-1} \leq c_1\tau\mathcal{D}^{-1},$$

где  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ ,  $\check{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(t - \tau)$ . Отсюда следует неравенство

$$-c_1\tau E \leq \mathcal{D}^{1/2}(\mathcal{D}^{-1} - \check{\mathcal{D}}^{-1})\mathcal{D}^{1/2} \leq c_1\tau E,$$

эквивалентное (6).

2. Теорема 1. Пусть оператор  $A(t)$  удовлетворяет условию Липшица и  $A^*(t) = A(t) > 0$ . Тогда, если выполнено условие устойчивости (3) с константой  $\rho = e^{c_0\tau}$ ,  $c_0 \geq 0$ , то для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq \tilde{\rho}^{n+1} \|y_0\|_{A(0)} + \sum_{n'=0}^n \tau \tilde{\rho}^{n-n'} \|B^{-1}\varphi_{n'}\|_{A(t_{n'})}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где  $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0\tau}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$ .

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде эквивалентной явной схемы (см. (1))

$$x_{n+1} = S\bar{x}_n + \tau A^{1/2}B^{-1}\varphi_n, \quad (8)$$

где  $x_{n+1} = A^{1/2}(t_n)y_{n+1}$ ,  $\bar{x}_n = A^{1/2}(t_n)y_n$ ,  $S = E - \tau C$ ,  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ . Из условия устойчивости (3), согласно лемме 1, следует оценка (2) нормы оператора перехода  $S$ , а из условия Липшица — очевидная оценка

$$\|\bar{x}_n\| \leq \sqrt{1 + c_1\tau} \|x_n\| \leq e^{c_1\tau/2} \|x_n\|.$$

Поэтому из (8) получим

$$\|x_{n+1}\| \leq \tilde{\rho} \|x_n\| + \tau \|A^{1/2}B^{-1}\varphi_n\|,$$

откуда и следует (7).

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть оператор  $B(t)$  удовлетворяет условию Липшица и  $B^*(t) = B(t) > 0$ . Тогда, если выполнено условие устойчивости (4) с константой  $\rho = e^{c_0\tau}$ ,  $c_0 \geq 0$ , то для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{B(t_n)} \leq \tilde{\rho}^{n+1} \|y_0\|_{B(0)} + \sum_{n'=0}^n \tau \rho^{n-n'} \|\varphi(t_{n'})\|_{B^{-1}(t_{n'})}, \quad (9)$$

где  $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}_0\tau}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$ .

Заметим, что если и оператор  $A(t)$  является самосопряженным, то для оценки (9) достаточно условия (3).

3. Оценки, отличные от (7), можно получить, используя метод выделения стационарных неоднородностей, состоящий в следующем.

Пусть оператор  $A(t)$  в схеме (1) является самосопряженным и положительным. Представим решение задачи (1) в виде суммы

$$y_n = v_n + w_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

где  $w$  есть решение уравнения

$$A(t_n)w(t_{n+1}) = \varphi(t_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Положим, кроме того,  $w(0) = w(\tau)$ . Для определения функции  $v(t)$  получим задачу

$$B(t)v_t + A(t)v = \bar{\varphi}, \quad v_0 = y_0 - w_1, \quad (12)$$

где  $\bar{\varphi} = -(B - \tau A)w_t$ .

Решение  $v_{n+1}$  вспомогательной задачи (12) оценивается по теореме 1. После этого, используя неравенство треугольника, из (10) и (11) получаем оценку решения задачи (1).

**Теорема 3.** При тех же условиях, что и в теореме 1, для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_{A(t_n)} &\leq \tilde{\rho}^{n+1} (\|y_0\|_{A(0)} + \|\varphi(0)\|_{A^{-1}(0)} + \|\varphi(t_n)\|_{A^{-1}(t_n)} + \\ &+ \sum_{n'=1}^n \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [c_1 \|\varphi_{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + \|\varphi_{n',\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_{n'})}], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tilde{\rho} = e^{\tilde{c}\tau}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 + c_1/2$ ,  $\varphi_{n,\bar{t}} = (\varphi_n - \varphi_{n-1})/\tau$ .

**Доказательство.** Воспользовавшись методом выделения стационарных неоднородностей, получим оценку

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq \|v_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|\varphi(t_n)\|_{A^{-1}(t_n)}, \quad (14)$$

где  $v_{n+1}$  — решение задачи (12). Так же как и в теореме 1, для (12) может быть доказана оценка

$$\begin{aligned} \|v_{n+1}\|_{A(t_n)} &\leq \tilde{\rho} \|v_n\|_{A(t_{n-1})} + \tau \|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_{A(t_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \|v_1\|_{A(0)} &\leq \rho \|v_0\|_{A(0)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для оценки слагаемого  $\|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_A$  в (15) заметим, что

$$\|B^{-1}\tilde{\varphi}\|_A = \|SA^{1/2}w_t\|,$$

где  $S = E - \tau C$ ,  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ .

Далее, согласно (11) имеем

$$w_t = (A^{-1}\varphi)_{\bar{t}} = A^{-1}\varphi_{\bar{t}} + (A^{-1} - \check{A}^{-1})\varphi(t_{n-1})/\tau,$$

так что справедлива оценка

$$\|A^{1/2}w_t\| \leq \|\varphi_{\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)} + \frac{1}{\tau} \|A^{1/2}(A^{-1} - \check{A}^{-1})A^{1/2}\| \|\varphi(t_{n-1})\|_{A^{-1}(t_n)}.$$

Отсюда, учитывая лемму 2, получим

$$\|B^{-1}\tilde{\varphi}_n\|_{A(t_n)} \leq \rho \{c_1 \|\varphi_{n-1}\|_{A^{-1}(t_n)} + \|\varphi_{n,\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_n)}\}.$$

Таким образом, из (15) следует оценка

$$\|v_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq \tilde{\rho}^{n+1} \|v_0\|_{A(0)} + \sum_{n'=1}^n \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [c_1 \|\varphi_{n'-1}\|_{A^{-1}(t_{n'})} + \|\varphi_{n',\bar{t}}\|_{A^{-1}(t_{n'})}].$$

Наконец, замечая, что

$$\|v_0\|_{A(0)} \leq \|y_0\|_{A(0)} + \|w_1\|_{A(0)} = \|y_0\|_{A(0)} + \|\varphi_0\|_{A(0)},$$

получаем (13).

4. В случае перестановочных операторов удается получить более общие оценки.

**Теорема 4.** Пусть оператор  $A(t)$  удовлетворяет условию Липшица,  $A^*(t) = A(t) > 0$ ,  $AB = BA$ ,  $A(t)A(t-\tau) = A(t-\tau)A(t)$  при всех  $t$  и  $\tau$ . Тогда, если выполнено условие устойчивости (3) с  $\rho = e^{c_0\tau}$ ,  $c_0 \geq 0$ , то при

$l = 0, 1, 2, \dots$  имеют место следующие оценки решения задачи (1):

$$\|A^l(t_n) y_{n+1}\| \leq \tilde{\rho}^{n+1} \|A^l(0) y_0\| + \sum_{n'=0}^n \tau \tilde{\rho}^{n-n'} \|A^l B^{-1} \varphi_{n'}\|, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \|A^l(t_n) y_{n+1}\| &\leq \tilde{\rho}^{n+1} \|A^l(0) y_0\| + \|A^{l-1}(t_n) \varphi_n\| + \tilde{\rho}^{n+1} \|A^{l-1}(0) \varphi_0\| + \\ &+ \sum_{n'=1}^n \tau \tilde{\rho}^{n+1-n'} [c_1 \|A^{l-1}(t_{n'}) \varphi_{n'-1}\| + \|A^{l-1}(t_{n'}) \varphi_{n', \bar{t}}\|], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\tilde{\rho} = e^{c_0 \tau}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 + lc_1$ .

**Теорема 5.** Пусть оператор  $B(t)$  удовлетворяет условию Липшица,  $B^*(t) = B(t) > 0$ ,  $AB = BA$ ,  $B(t)B(t-\tau) = B(t-\tau)B(t)$ . Тогда, если выполнено условие устойчивости (4) с  $\rho = e^{c_0 \tau}$ ,  $c_0 \geq 0$ , то при  $l = 0, 1, 2, \dots$  для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\|B^l(t_n) y_{n+1}\| \leq \tilde{\rho}^{n+1} \|B^l(0) y_0\| + \sum_{n'=0}^n \tau \tilde{\rho}^{n-n'} \|B^{l-1}(t_{n'}) \varphi_{n'}\|, \quad (18)$$

где  $\rho = e^{c_0 \tau}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 + lc_1$ .

**Замечание 1.** Если и оператор  $A(t)$  является самосопряженным, то (18) выполняется при условии (3).

**Замечание 2.** Оценки (16), (18) с  $l = 0$  имеют место и без требования липшиц-непрерывности.

Институт прикладной математики  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
24 XII 1969

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). <sup>2</sup> А. А. Самарский, А. В. Гулий, ДАН, 181, № 5, 1042 (1968). <sup>3</sup> А. А. Самарский, И. В. Фрязинов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, № 5, 806 (1961). <sup>4</sup> А. А. Самарский, Там же, 1, № 6, 972 (1961). <sup>5</sup> А. А. Самарский, Там же, 7, № 5, 1096 (1967).