ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 10 Ноябрь 1970 Декабрь № 6

УДК 518:517.9:533.9

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О СИЛЬНОТОЧНОМ РАЗРЯДЕ В ПЛАЗМЕ

П. П. ВОЛОСЕВИЧ, С. П. КУРДЮМОВ, Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. Исследование процессов, происходящих в плазме при сильноточном излучающем разряде, связано с решением системы уравнений магнитной радиационной гидродинамики (МРГД). В общем случае такое решение может быть получено лишь на основе применения численных методов. Примеры подобных решений приведены, например, в [1–3].

Использование автомодельных решений в данной задаче хотя и связано с определенными ограничениями, налагаемыми условиями автомодельности, тем не менее позволяет исследовать отдельные качественные стороны процесса, выяснить характер его зависимости от параметров задачи, таких, как коэффициенты электро- и теплопроводности, ток в разряде и т. д.

В работе изучаются автомодельные решения, в которых масса плазмы в разряде не меняется со временем. Установлено, что автомодельные решения такого типа существуют лишь при достаточно больших значениях коэффициента теплопроводности. Для частных случаев вычислены значения нижней границы диапазона изменения коэффициента теплопроводности, где автомодельное решение существует.

Установлено, что при определенных условиях в автомодельных решениях существует T-слой [4]. Сделаны выводы относительно влияния процесса теплопроводности на его структуру.

Анализ автомодельных решений дополняется численными расчетами на ЭВМ полной системы уравнений МРГД как в автомодельной, так и в «околоавтомодельной» области изменения параметров.

Наиболее подробно анализируются автомодельные режимы, в которых наряду с постоянной массой плазмы остается неизменной во времени и ее полная энергия. В рассматриваемой задаче это постоянство энергии обеспечивается не консервативностью системы, а равенством потоков энергии, поступающей в систему и выходящей из нее.

Отметим, что построенные в работе автомодельные решения являются хорошим тестом для проверки и контроля точности численных методов решения системы уравнений МРГД. Они, в частности, были использованы при разработке и отладке численных методов в [3].

2. Рассматривается разлет в вакууме плазмы, образовавшейся в результате электрического взрыва проволочки, и ее взаимодействие с магнитным полем собственных токов (см. фиг. 1). Процессы теплопереноса учтены в приближении нелинейной теплопроводности.

Предполагается, что длина плазменного шнура намного превышает его диаметр, а также имеет место осевая симметрия; задача рассматривается в одномерном нестационарном приближении для бесконечного цилиндра.

Соответствующая система уравнений магнитной гидродинамики в лагранжевых массовых координатах в абсолютной гауссовой системе единиц имеет вид [5]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -r\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{j_z H_\varphi}{\rho}, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial (rv)}{\partial x},$$

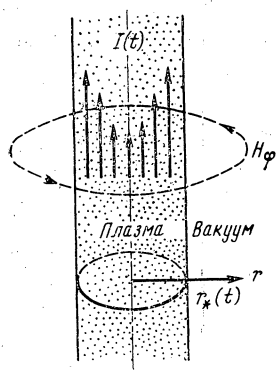
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_\varphi}{\rho r}\right) = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad E_z = \frac{c\rho}{4\pi\sigma}\frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial x}, \qquad j_z = \sigma E_z,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial (rv)}{\partial x} - \frac{\partial (rW)}{\partial x} + Q,$$

$$W = -\varkappa\rho r\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad Q = \frac{j_z E_z}{\rho}, \tag{2.1}$$

$$p = \rho RT, \qquad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1}T.$$

Обозначения: t — время, r — переменная Эйлера, ρ — плотность среды, $x\,(dx = \rho r dr)$ — лагранжева массовая переменная, v — продольная компонента скорости, p — давление, ε — внутренняя энергия, T — температура плазмы, H_φ — азимутальная компонента напряженности магнитного поля, E_z — осевая компонента напряженности электрического поля, j_z — плотность электрических токов, σ, $\varkappa$ — коэффициенты, соответственно, электро- и теплопроводности, Q — джоулево тепло, выделяющееся в единице массы, W — тепловой поток через азимутальный угол, равный одному радиану, R — газовая постоянная, γ — показатель адиабаты, c — скорость света в пустоте; производная по времени лагранжева.



Фиг. 1

Уравнение состояния выбрано в простейшем виде.

Решение задачи ищется для цилиндра единичной высоты в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant M$, где $M = \int\limits_0^{r_*} \rho r\, dr = \text{const}$ — масса плазмы в разряде, приходящаяся на единицу высоты плазменного шнура и заключенная в одном радиане по азимутальному углу, $r_*(t)$ — радиус границы плазма — вакуум. Граничные условия для системы (2.1) формулируются следующим образом: в центре при $x = 0$ условия симметрии

$$v(0, t) = 0, \qquad H_\varphi(0, t) = 0, \qquad W(0, t) = 0, \tag{2.2}$$

справа на границе плазма — вакуум при $x = M(r = r_*(t))$

$$p(M, t) = 0, \qquad H_\varphi(M, t) = 2I(t) / cr_*(t), \qquad T(M, t) = 0; \tag{2.3}$$

$I(t)$ — закон изменения со временем полного тока в разряде.

В общем случае МРГД при наличии в среде нелинейной теплопроводности температура на границе вещества с вакуумом отлична от нуля. Условие $T(M, t) = 0$ — предельный случай, гарантирующий отсутствие теплового потока в систему из вакуума.

Возможны и другие виды правого граничного условия для тепловых функций, например $W(M, t) = 0$, что соответствует случаю электронной теплопроводности, или $W(M, t) = \sigma_c T^4$: плазменный шнур излучает как черное тело (σ_c — постоянная Стефана — Больцмана). Последнее условие приводит к дополнительным ограничениям в полученных ниже условиях автомодельности.

Для построения автомодельного решения рассмотрим асимптотическую стадию разлета плазмы, когда влияние начальных данных уже не сказывается. При этом можно пренебречь начальным диаметром плазменного шнура по сравнению с его размерами на асимптотической стадии и соответственно считать начальную плотность плазмы бесконечно большой. Это позволяет сократить число определяющих параметров задачи.

Коэффициенты электро- и теплопроводности предполагаются степенными функциями температуры и плотности; для достижения большей общности при выводе условий автомодельности введена также явная зависимость этих коэффициентов от времени:

$$\sigma = \sigma_0 T^{k_0} \rho^{-q_0} t^{n_0}, \qquad \varkappa = \varkappa_0 T^{k_1} \rho^{-q_1} t^{n_1}. \tag{2.4}$$

Закон $I(t)$ также задается в виде степенной функции

$$I(t) = I_0 t^m. \tag{2.5}$$

В дальнейшем подробно будет рассматриваться случай постоянного тока $m = 0$.

Будем искать автомодельное решение системы уравнений (2.1), в котором все функции представимы в виде $F(x, t) = F_0 f(s) t^{n_f}$, где F_0 — размерная постоянная, $s = x / M$ — автомодельная переменная, пропорциональная массовой переменной, $f(s)$ — безразмерная функция от автомодельной переменной. Автомодельные решения такого типа изучались в [6, 7].

Анализ показывает, что условия автомодельности в этом случае сводятся к выполнению определенных соотношений между параметрами задачи — показателями в степенных зависимостях (2.4), (2.5):

$$m + 1 = \frac{2k_0 + 1 - n_0}{2(k_0 + 1) + 2q_0} = \frac{2k_1 - 1 - n_1}{2(k_1 + q_1)}. \tag{2.6}$$

Из условий (2.6) следует также, что при фиксированных зависимостях

(2.4), удовлетворяющих равенству (2.6), можно обеспечить автомодельность решения за счет соответствующего подбора закона тока (величины m в (2.5)).

Например, при нарастающем токе $m > 0$ и отсутствии временной зависимости в (2.4), (2.5) ($n_0 = n_1 = 0$) условия автомодельности (2.6) приводят к неравенствам

$$q_0 \leqslant -0.5, \quad q_1 \leqslant -0.5.$$

Таким образом, коэффициенты электропроводности и теплопроводности должны увеличиваться с ростом плотности, в то время как на практике обычно имеет место обратная зависимость. Правда, эта зависимость довольно слабая, наиболее существенное влияние она оказывает вблизи границы плазма — вакуум. Здесь такой характер зависимости от плотности может моделировать тот факт, что вблизи границы с вакуумом электро- и теплопроводность убывают более резко, чем, соответственно, T^{k_0} и T^{k_1}.

Если в качестве определяющих параметров с независимой размерностью выбрать постоянные задачи M, R и I_0, то при выполнении условий (2.6) все искомые функции можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{I_0}{\sqrt{M}} \alpha(s) t^m, \qquad r(x, t) = \frac{I_0}{\sqrt{M}} \lambda(s) t^{m+1},$$

$$\rho(x, t) = \frac{M^2}{I_0^2} \delta(s) t^{-2(m+1)}, \qquad T(x, t) = \frac{I_0^2}{MR} f(s) t^{2m},$$

$$p(x, t) = M\beta(s) t^{-2}, \qquad H_\varphi(x, t) = \sqrt{M}\, h(s) t^{-1},$$

$$E_z(x, t) = \frac{1}{c} I_0 \varphi(s) t^{m-1}, \qquad W(x, t) = I_0 \sqrt{M}\, \omega(s) t^{m-2}, \tag{2.7}$$

$$\sigma(x, t) = c^2 \frac{M}{I_0^2} \tilde{\sigma}(s) t^{-(1+2m)}, \qquad \varkappa(x, t) = RM\tilde{\varkappa}(s) t^{-1},$$

$$j_z(x, t) = c \frac{M}{I_0} \zeta(s) t^{-(m+2)}.$$

Приведенные формулы выясняют характер зависимости различных функций в автомодельном режиме от параметров задачи и времени. Например, величина электрического сопротивления плазмы на единицу длины плазменного шнура $R_{\text{пл}}$ вычисляется следующим образом:

$$R_{\text{пл}} = \left[2\pi \int_0^{r_*} \sigma r\, dr \right]^{-1} = \frac{R_0}{c^2} t^{-1}$$

(R_0 — некоторая безразмерная величина). Отсюда следует, что в автомодельном режиме сопротивление разлетающейся плазмы убывает со временем, но не зависит ни от массы плазмы M, ни от характера вещества R, ни от закона изменения тока I_0, m.

Величина полной энергии, заключенной в объеме, занимаемом плазмой, выражается следующим образом:

$$e(t) = 2\pi \int_0^M \left(\varepsilon + 0.5v^2 + \frac{H_\varphi^2}{8\pi\rho}\right) dx = e_0 I_0^2 t^{2m} \tag{2.8}$$

(e_0 — безразмерная постоянная).

При выполненных условиях автомодельности (2.6) система уравнений МРГД (2.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных функций α, β, δ, f, h, λ, φ, ω:

$$\begin{gathered}\alpha = (m+1)\lambda, \quad \lambda\beta' = -\frac{\zeta h}{\delta\lambda}, \quad \zeta = \tilde{\sigma}\varphi, \\ (\lambda h)' = 4\pi\frac{\zeta}{\delta}, \ (\lambda\omega)' = -\frac{2m}{\gamma-1} f - 2(m+1)\frac{\beta}{\delta} + \frac{\zeta\varphi}{\delta}, \\ \omega = -\tilde{\varkappa}\lambda\delta f', \quad \beta = f\delta, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 f^{k_0}\delta^{-q_0}, \quad \tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}_0 f^{k_1}\delta^{-q_1}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по автомодельной переменной s.

Безразмерные постоянные $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\varkappa}_0$ следующим образом выражаются через параметры M, I_0, R и, соответственно, σ_0 и $\varkappa_0$:

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 I_0^{2(k_0+q_0+1)}/M^{k_0+2q_0+1}R^{k_0}, \\ \tilde{\varkappa}_0 = \varkappa_0 I_0^{2(k_1+q_1)}/M^{k_1+2q_1+1}R^{k_1+1}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Граничные условия (2.2), (2.3) в автомодельном виде можно переписать следующим образом:

$$\alpha(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \tag{2.11}$$

$$\beta(1) = 0, \quad \lambda(1)h(1) = 2, \quad f(1) = 0. \tag{2.12}$$

3. В дальнейшем мы ограничим анализ автомодельных решений случаем постоянного тока ($m = 0$).

Здесь при дополнительном предположении $k_0 = q_0 = 0$ удается построить решение в аналитическом виде. Коэффициенты электро- и теплопроводности в этом случае имеют вид

$$\sigma = \sigma_0 t^{-1}, \quad \varkappa = \varkappa_0 T^{k_1}\rho^{-q_1}t^{-(1+2q_1)}. \tag{3.1}$$

Зависимость σ и $\varkappa$ от времени в (3.1) весьма искусственна с физической точки зрения. Однако, как показывают расчеты системы (2.9) — (2.12), основные качественные особенности решения, полученного в этом простейшем частном случае, сохраняются и в более общих случаях при разумных значениях показателей k_0, q_0, n_0, k_1, q_1, n_1.

Очевидно, что если для автомодельного решения ток в разряде постоянен, то в силу (2.8) полная энергия плазмы, а также любая величина, имеющая размерность энергии, не зависят от времени. Условие постоянства энергии выполняется и в известных автомодельных решениях задачи о сильном взрыве в атмосфере [8, 9], где выделившаяся в начальный момент энергия в дальнейшем процессе не изменяется по величине. В изучаемой задаче об электрическом разряде в плазме постоянство энергии

обеспечивается не консервативностью системы, а балансом поступающей в систему электромагнитной энергии и энергии, расходуемой на работу против сил магнитного поля, а также энергии, покидающей систему в виде теплового потока. Очевидно, в обычной газодинамике нетривиальные автомодельные решения такого типа невозможны. Для их существования необходимо наличие дополнительных внешних источников энергии, подобных джоулеву нагреву.

Интегрирование (2.9) при условии (3.1), $m=0$ и, например, $q_1 > -1$ приводит к следующим выражениям для безразмерных функций скорости α, давления β, напряженности магнитного поля h, температуры f, плотности δ и теплового потока ω через безразмерный радиус λ:

$$\alpha=\lambda, \qquad \beta=\frac{1}{\pi\lambda_*^4}(\lambda_*^2-\lambda^2), \qquad h=\frac{2}{\lambda_*^2}\lambda, \quad \omega=\frac{\lambda}{2\pi\lambda_*^4}\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0}-2\lambda_*^2+\lambda^2\right). \tag{3.2}$$

$$f=\{A\,[(B-1)\lambda_*^2+\lambda^2]\,(\lambda_*^2-\lambda^2)^{q_1+1}\}^{1/(k_1+q_1+1)}, \qquad \delta=\beta f^{-1},$$

где

$$A=\frac{k_1+q_1+1}{4\tilde{\varkappa}_0\,(q_1+2)\,\pi^{q_1+1}\lambda_*^{4(q_1+1)}}, \qquad B=\frac{q_1+2}{q_1+1}\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2}-1\right).$$

Соотношение $s=\int\limits_0^\lambda \beta f^{-1}\lambda\,d\lambda$ устанавливает связь между безразмерным радиусом и автомодельной переменной. Величина λ_* — безразмерное значение радиуса границы плазма — вакуум — определяется из условия постоянства массы плазмы

$$1=\int\limits_0^{\lambda_*}\frac{\beta}{f}\lambda\,d\lambda=\frac{1}{\pi\lambda_*^4A^{1/(k_1+q_1+1)}}\int\limits_0^{\lambda_*}\left\{\frac{(\lambda_*^2-\lambda^2)^{k_1}}{(B-1)\lambda_*^2+\lambda^2}\right\}^{1/(k_1+q_1+1)}\lambda\,d\lambda. \tag{3.3}$$

Напряженность электрического поля и плотность токов в решении постоянны:

$$\varphi=\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2}, \qquad \zeta=\tilde{\sigma}_0\varphi=\frac{1}{\pi\lambda_*^2}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) следует, что давление является монотонно убывающей функцией радиуса, а h возрастает с ростом λ. Температура же f может быть немонотонна по λ. Положение ее максимума $\lambda_{\max}$ определяется выражением

$$\lambda_{\max}^2=2\lambda_*^2-\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0}, \tag{3.5}$$

при этом максимальное значение f имеет вид

$$f_{\max}=\left[\frac{k_1+q_1+1}{4\tilde{\varkappa}_0\,(q_1+1)\,(q_1+2)\,\pi^{q_1+1}\lambda_*^{2q_1}}\left(\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2}-1\right)^{q_1+2}\right]^{1/(k_1+q_1+1)}.$$

Для того чтобы максимум температуры находился внутри диапазона $0 < \lambda_{\max} < \lambda_*$, должно выполняться условие

$$\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_0} < \lambda_*^2 < \frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0}. \tag{3.6}$$

Из выражения для $f(\lambda)$ в (3.2) следует, что решение имеет смысл ($f(\lambda) \geqslant 0$ во всей области $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_*$) лишь при выполнении неравенства $B \geqslant 1$ или

$$\lambda_*^2 \leqslant \frac{q_1+2}{2q_1+3}\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0}. \tag{3.7}$$

Таким образом, сопоставляя (3.6) и (3.7), приходим к выводу, что температура в решении не монотонна и ее максимум заключен внутри диапазона $(0, \lambda_*)$ при выполнении неравенства

$$\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_0} < \lambda_*^2 \leqslant \frac{q_1+2}{2q_1+3}\frac{1}{\pi\tilde{\sigma}_0},$$

или, что то же,

$$2 < \mathrm{Re}_m^* \leqslant 4\frac{q_1+2}{2q_1+3}, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{Re}_m^* = 4\pi\tilde{\sigma}_0\lambda_*^2$ — магнитное число Рейнольдса, вычисленное по значению скорости границы плазма — вакуум и расстоянию ее от центра. При $\mathrm{Re}_m^* \leqslant 2$ максимум температуры всегда достигается на оси, $f(\lambda)$ — монотонно падающая функция. При $\mathrm{Re}_m^* > 4(q_1+2)/(2q_1+3)$ автомодельное решение не имеет смысла.

Из приведенных выше неравенств можно заключить, что для существования немонотонности температуры (T-слоя) в решении задачи о сильноточном разряде необходимо, чтобы характерное магнитное число Рейнольдса было достаточно велико. Это утверждение согласуется с условиями существования T-слоя, полученными в [4, 6].

Исследуем характер зависимости автомодельного решения (3.2) от величины коэффициента теплопроводности. Рассмотрим сперва простейший случай, когда $\varkappa$ не зависит от температуры и плотности ($k_1 = q_1 = 0$, $\varkappa = \varkappa_0 t^{-1}$). Величина λ_* определяется из (3.3) в явном виде:

$$\lambda_*^2 = \frac{2}{3\pi\tilde{\sigma}_0}\frac{\exp(1/4\,\tilde{\varkappa}_0) - 1}{\exp(1/4\,\tilde{\varkappa}_0) - 2/3}.$$

Из (3.7) следует, что в этом случае автомодельное решение существует лишь при выполнении неравенства $\tilde{\varkappa}_0 > \tilde{\varkappa}_{01} = 0$.

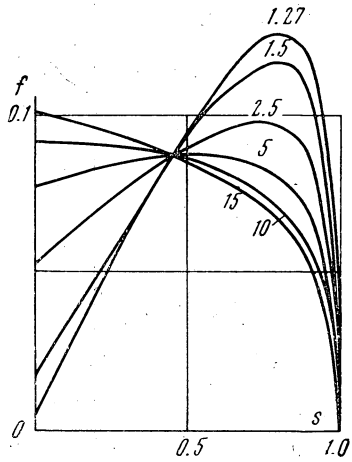
Условие немонотонности температуры (3.8) можно переписать в виде

$$\tilde{\varkappa}_{01} < \tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{02}, \qquad \tilde{\varkappa}_{01} = 0, \qquad \varkappa_{02} = \frac{1}{4\ln 2}. \tag{3.9}$$

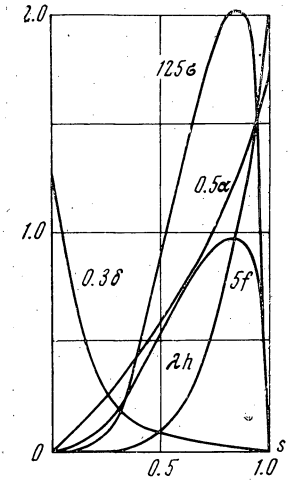
При $\tilde{\varkappa}_0 \geqslant \tilde{\varkappa}_{02}$ максимум температуры находится в центре.

Рассмотрим теперь простейший случай нелинейной теплопроводности $k_1 = 1$, $q_1 = 0$, $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}_0 T t^{-1}$. Выкладки, аналогичные выполненным выше,

вновь приводят к неравенству (3.9) с $\tilde{\varkappa}_{01} = 4/\pi$ и $\tilde{\varkappa}_{02} = 4/\pi(1-2/\pi)^2$, при этом для $\tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{01}$ автомодельное решение смысла не имеет, так как в нем появляется область с отрицательной температурой. Зависимость автомодельного решения от коэффициента $\tilde{\varkappa}_{01}$ (его значения указаны на графике) для $\tilde{\varkappa}_0 > \tilde{\varkappa}_{01}$ представлена на фиг. 2 ($\tilde{\sigma}_0 = 0.02$, $k_1 = 1$, $q_1 = 0$).



Фиг. 2



Фиг. 3

С ростом $\varkappa_0$ максимум температуры уменьшается и перемещается ближе к оси. При $\tilde{\varkappa}_0 \to \infty$ имеем $f(0) = 1/3\pi$.

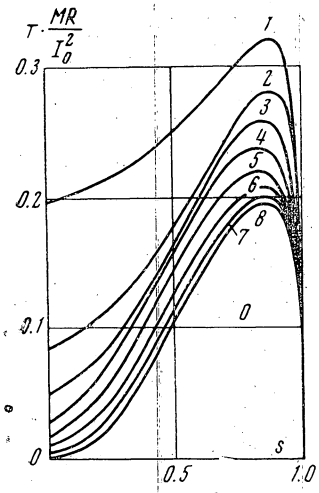
Итак, в двух простых частных случаях оказалось, что для автомодельного решения диапазон допустимых значений ограничен снизу некоторой величиной $\tilde{\varkappa}_{01}$. Анализ решения (3.2) показывает, что с увеличением показателя k_1, т. е. с увеличением степени нелинейности в коэффициенте теплопроводности, характер решения сохраняется, причем значение $\varkappa_{01}$ увеличивается.

4. При более общих, чем условия (3.1), предположениях нахождение автомодельного решения задачи о разлете плазмы в вакуум сводится к численному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.9) при условиях (2.11), (2.12). Из расчетов следует, что основные качественные особенности автомодельного решения, выясненные выше аналитически, имеют место и в этом случае. Так, на фиг. 3 приведено типичное распределение искомых безразмерных функций по автомодельной переменной, полученное при расчете варианта задачи со следующими значениями параметров: $k_0 = {}^3/_2$, $q_0 = 0$, $k_1 = 1$, $q_1 = 0$, $\varkappa_0 = 1.5$, $\sigma_0 = 0.2$.

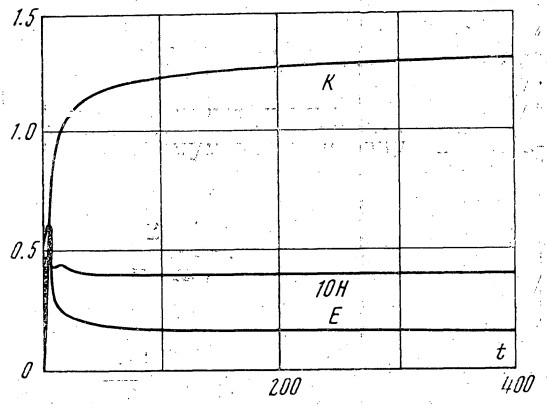
Здесь проводимость плазмы $\tilde{\sigma}$, а также плотность токов ζ уже не постоянны, максимум $\tilde{\sigma}$ совпадает с максимумом температуры f.

Исследование зависимости решения от параметра $\varkappa_0$ позволяет установить, что и в этом случае существуют два характерных значения коэффициента теплопроводности $\tilde{\varkappa}_{01}$ и $\tilde{\varkappa}_{02}$. Автомодельное решение имеет место лишь при $\tilde{\varkappa}_0 > \tilde{\varkappa}_{01}$, при этом в диапазоне $\tilde{\varkappa}_{01} < \tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{02}$ профиль температуры немонотонен по s, при $\tilde{\varkappa}_0 \geqslant \tilde{\varkappa}_{02}$ максимум находится в центре.

Таким образом, даже при выполненных условиях автомодельности (2.6), полученных на основе обычного анализа размерностей, автомодельное решение существует не при всех значениях коэффициента теплопроводности $\tilde{\varkappa}_0$, хотя формально величина этого коэффициента в условия автомодельности не входит.



Фиг. 4



Фиг. 5

5. Построенные автомодельные решения были реализованы при численных расчетах полной системы уравнений (2.1). В расчетах система дифференциальных уравнений аппроксимировалась однородной, полностью консервативной разностной схемой, которая решалась методом последовательных прогонок [10–12]. Граничные режимы осуществлялись в соответствии с (2.2), (2.3). Начальные условия задавались в виде произвольных функций координаты x, не совпадающих с автомодельными профилями. На фиг. 4 представлено такое численное решение задачи для тех же значений параметров, что и на фиг. 3, при $\tilde{\varkappa}_{01} < \tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{02}$. Профили температуры приведены на последовательные моменты времени, которые выбраны так, чтобы за время, прошедшее между ними, в плазму поступало одинаковое количество электромагнитной энергии, равное двум начальным. Здесь $(MR/I_0^2)T(x, 0) = 0.1$, $m = 0$.

Со временем решение выходит на автомодельный режим.

На фиг. 5 дано изменение во времени отдельных видов энергии плазмы в безразмерной форме:
внутренней

$$E = \frac{1}{I_0^2}\int_0^M \varepsilon\, dx,$$

кинетической

$$K = \frac{1}{I_0^2}\int_0^M 0.5\, v^2\, dx$$

и магнитной

$$H = \frac{1}{I_0^2} \int_0^M \frac{H_\varphi^2}{8\pi\rho} dx.$$

С ростом t значения этих величин, а также значение полной энергии стремятся к их значениям в автомодельном решении.

Численные расчеты системы (2.1) проводились и в «околоавтомодельной» области, т. е. при выполненных условиях (2.6), но при малых значениях коэффициента теплопроводности $\tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{01}$. Решения здесь действительно оказывались неавтомодельными, поведение параметров течения не укладывалось в рамки зависимостей (2.7). Неавтомодельное решение имеет существенно нестационарный характер, здесь наблюдается возникновение и развитие высокотемпературного T-слоя, а также ряд других сопровождающих его обычно явлений: образование ударной волны, распространяющейся к оси, общее торможение газа, пинчевание плазменного шнура и т. д. [3, 4].

Суммируя факты, полученные на основе анализа автомодельных решений, и результаты численных расчетов в «околоавтомодельной» области, можно сделать выводы о влиянии теплопроводности на процессы, происходящие при сильноточном разряде в плазме. При достаточно малом коэффициенте теплопроводности ($\tilde{\varkappa}_0 \leqslant \tilde{\varkappa}_{01}$) в плазме возникает и развивается высокотемпературный T-слой. Решение здесь имеет существенно неавтомодельный характер. Например, температура газа в T-слое растет, в то время как в центральной области падает.

При $\tilde{\varkappa}_{01} < \tilde{\varkappa}_0 < \tilde{\varkappa}_{02}$ влияние теплопроводности уже достаточно сильно, чтобы за счет оттока тепла обеспечить своеобразную стабилизацию T-слоя: температура всей массы газа меняется со временем по одному и тому же степенному закону.

Высокий коэффициент теплопроводности уничтожает T-слой, немонотонности температуры в решении не наблюдается, ее максимум находится на оси.

6. Рассмотрим одну особенность аналитического решения, построенного в п. 3. Имеющийся в этом решении максимум температуры (как в автомодельной, так и в «околоавтомодельной» области) не может быть в полном смысле назван T-слоем, ибо здесь $\sigma_0 = \sigma_0 t^{-1}$ не зависит от температуры, а одним из условий образования этого эффекта является наличие существенной нелинейности $d \ln \sigma / dT > 0$. Отсутствует в данном случае и классическое сканирование, так как с ростом t проводимость плазмы становится достаточно малой, а плотность токов — постоянной по радиусу.

Тем не менее температура имеет ярко выраженный максимум. Наличие этого максимума объясняется зависимостью величины джоулева нагрева в единице массы от плотности $Q = \zeta^2 / \tilde{\sigma}_0 \delta$.

Плотность δ в данной задаче в силу интенсивного разлета падает по мере приближения к границе плазма — вакуум, а джоулев нагрев соответственно возрастает. Такое поведение величины Q приводит к появлению

максимума температуры, положение которого, однако, не совпадает с максимумом джоулева нагрева из-за процессов теплопроводности.

Таким образом, в данном случае будет некоторое предельное вырождение эффекта T-слоя, когда отсутствует обратная связь между газодинамическими и электромагнитными процессами (электропроводность не зависит от термодинамического состояния среды).

Если же проводимость является функцией температуры, то подобное неоднородное состояние может стать основой для развития T-слоя. Так, наряду с известными скин-эффектом и перегревной неустойчивостью, мы отмечаем еще один возможный механизм инициирования T-слоя.

Авторы благодарны Л. М. Дегтяреву и А. П. Фаворскому за полезные обсуждения, а также А. А. Иванову и В. Н. Равинской за проведение численных расчетов.

Поступила в редакцию 8.04.1970

Цитированная литература

1. С. И. Брагинский, И. М. Гельфанд, Р. П. Федоренко. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде. В сб. «Физ. плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, 201—221.
2. В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник. К магнитно-гидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. М., ИАЭ, препринт, 1965.
3. П. П. Волосевич, В. Я. Гольдин, Н. Н. Калиткин, С. П. Курдюмов, Ю. П. Попов, В. Б. Розанов, А. А. Самарский, Б. Н. Четверушкин. Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме. IX Междунар. конф. по явлениям в ионизованных газах. Сб. докл. Бухарест, 1969, 348.
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Л. А. Заклязьминский, П. П. Волосевич, А. М. Дегтярев, С. П. Курдюмов, Ю. П. Попов, В. С. Соколов, А. П. Фаворский. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, **173**, № 4, 808—811.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
6. П. П. Волосевич, В. С. Соколов. Автомодельная задача о разлете электропроводного газа в среду с заданным осевым магнитным полем. Магнитная гидродинамика, 1967, 1, 43—46.
7. И. В. Немчинов. Разлет подогреваемой массы газа в регулярном режиме. Прикл. механ. и техн. физ., 1964, № 5, 18—24.
8. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1962.
9. В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов, Н. С. Мельникова. Теория точечного взрыва. М., Гостехиздат, 1962.
10. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Однородные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 4—63.
11. А. А. Самарский, П. П. Волосевич, М. И. Волчинская, С. П. Курдюмов. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 5, 1025—1038.
12. Ю. П. Попов, А. А. Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 4, 953—958.