Цитированная литература

1. А. А. Шкурпелов, Ю. И. Ершов. Решение односкоростного уравнения переноса нейтронов в сферически-симметричной среде. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 6, 1402—1406.
2. Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
3. В. С. Владимиров. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, 61.
4. K. M. Case. Elementary solutions of the transport equation and their applications. Ann. Phys., 1960, 9, 1—23.
5. J. R. Mika. Neutron transport with anisotropic scattering. Nucl. Sci. Engng, 1961, 11, 415—427.
6. R. Bowden, D. Williams. Solution of the initial value transport for monoenergetic neutron in slab geometry. J. Math. Phys., 1964, 11, 1527—1540.
7. E. H. Bareiss. A spectral theory for the stationary transport operator in slab geometry. J. Math. Anal. and Appl., 1966, 13, 53—59.

УДК 517.9:533.7

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. Система уравнений газовой динамики может быть представлена в нескольких видах, имеющих непосредственный физический смысл. Например, уравнение энергии можно записать в дивергентном виде, выражающем изменение полной энергии, в недивергентном — выражающем изменение только внутренней энергии, в энтропийном виде и т. д. В дифференциальной форме эти виды эквивалентны в том смысле, что с помощью остальных уравнений системы сводятся друг к другу.

При численном решении методом конечных разностей система дифференциальных уравнений аппроксимируется разностной схемой. При этом разностная схема может быть построена на основе любого из эквивалентных видов дифференциальной системы. В частности, классические консервативные схемы строятся на основе дивергентных уравнений [1]. Однако для системы разностных уравнений свойство эквивалентности, вообще говоря, не имеет места. Так, если в схеме использовано недивергентное разностное уравнение энергии, то оно не всегда может быть сведено к дивергентной разностной форме. В ходе преобразования из-за «рассогласованности» отдельных уравнений схемы появляются остаточные члены, наличие которых можно трактовать как присутствие в схеме некоторых источников энергии чисто разностной природы. Эти фиктивные источники приводят к нарушению разностного аналога закона сохранения полной энергии.

Точно так же дивергентное разностное уравнение не может быть преобразовано к соответствующему недивергентному виду. В такой разностной схеме при выполненном законе сохранения полной энергии будет нарушен баланс внутренней энергии, а следовательно, и кинетической энергии.

Дисбаланс энергии зависит от характера решения. На гладких функциях он невелик, на решениях, сильно меняющихся во времени и пространстве, дисбаланс может достигать значительной величины, сравнимой с полной энергией системы.

В [2] для уравнений газодинамики в лагранжевых координатах построены полностью консервативные разностные схемы, которые одновременно аппроксимируют все эквивалентные системы дифференциальных уравнений. Для этих схем, в частности, выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения — массы, импульса и полной энергии (как для обычных консервативных схем), но и детальный баланс энергии, т. е. баланс по отдельным видам энергии — внутренней и кинетической.

В работе построены полностью консервативные разностные схемы с первым и вторым порядком аппроксимации для уравнений газодинамики в эйлеровых переменных.

2. Система одномерных нестационарных уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах имеет вид

$$j = \rho v, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial r}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}(p + jv), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\varepsilon + 0.5v^2) = -\frac{\partial}{\partial r}j(\varepsilon + 0.5v^2) - \frac{\partial pv}{\partial r}. \tag{2.4}$$

Обозначения: t — время, r — пространственная координата, j — плотность потока газа, v — скорость, p — давление, ρ — плотность, ε — внутренняя энергия газа.

Уравнения (2.2) — (2.4) после интегрирования по времени и пространству дают для фиксированного объема законы сохранения, соответственно, массы, импульса и полной энергии.

Система (2.1) — (2.4) может быть записана в нескольких эквивалентных формах. Так, уравнение движения (2.3) с помощью (2.2) преобразуется к виду

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + j\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2.5}$$

который выражает изменение количества движения материальной частицы вдоль траектории ее движения.

Уравнение энергии (2.4) с учетом (2.2) и (2.3) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial j\varepsilon}{\partial r} - p\frac{\partial v}{\partial r}, \tag{2.6}$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + j\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = -p\frac{\partial v}{\partial r}, \tag{2.7}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + j\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + p\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = 0, \tag{2.8}$$

которые описывают изменение только внутренней энергии.

В рассматриваемой части пространства r, t, $r_0 \leqslant r \leqslant r_N$, $t \geqslant 0$, введем разностную сетку $\{r_i, t^j\}$: $r_{i+1} = r_i + h_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $t^{j+1} = t^j + \tau^j$, $j = 0, 1, \ldots$. Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся случаем равномерной сетки ($h_i = h = \mathrm{const}$, $\tau^j = \tau = \mathrm{const}$). Определим на сетке сеточные функции скорости v_i^j, плотности потока газа j_i^j, значения которых будем относить к узлам сетки (r_i, t^j), $i = 0, 1, \ldots, N$, и сеточные функции плотности ρ_i^j, давления p_i^j, внутренней энергии газа ε_i^j, значения которых будем относить к полуцелым точкам $(r_{i+1/2}, t^j)$ $(r_{i+1/2} = r_i + 0.5h$, $i = 0, 1, \ldots, N-1)$. Для сеточных функций мы будем пользоваться следующими безындексными обозначениями [3]:

$$y_i^j = y, \qquad y_i^{j+1} = \hat{y}, \qquad y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)\,y, \qquad y(\pm 1) = y_{i\pm 1}^j, \tag{2.9}$$

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} = y_t, \qquad \frac{y(+1)-y}{h} = y_r, \qquad \frac{y-y(-1)}{h} = y_{\bar{r}}. \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i u_i h = (y, u), \qquad \sum_{i=0}^{N-1} y_i u_i h = [y, u), \qquad \sum_{i=0}^{N} y_i u_i h = [y, u]. \tag{2.11}$$

Для разностного суммирования справедлива формула

$$[y, u_r] = -[y_{\bar{r}} u] + y_N u_N - y_{-1} u_0. \tag{2.12}$$

В выкладках будут использоваться формулы разностного дифференцирования произведения

$$(yu)_r = y(+1)u_r + uy_r, \qquad (yu)_t = \hat{y}u_t + uy_t, \qquad (uy)_t = y^{(0.5)}u_t + u^{(0.5)}y_t, \tag{2.13}$$

а также разностное тождество

$$y^{(\sigma_1)} = y^{(\sigma_2)} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_t. \tag{2.14}$$

3. Рассмотрим следующее многопараметрическое семейство разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений газодинамики (2.1) — (2.3), (2.6):

$$j = \rho v, \tag{3.1}$$

$$\rho_t = -j_r^{(\sigma_1,\sigma_2)}, \tag{3.2}$$

$$j_t = -p_{\bar{r}}^{(\sigma_3)} - \left(j^{(\sigma_1,\sigma_2)}\left(v^{(\sigma_4)} + v^{(\sigma_4)}(-1)\right)\right)_r, \tag{3.3}$$

$$(\rho\varepsilon)_t = -\left(j^{(\sigma_1,\sigma_2)}\varepsilon^{(\sigma_5)}\right)_r - p^{(\sigma_6)}v_r^{(\sigma_7)}. \tag{3.4}$$

Здесь использовано следующее обозначение для записи произведения с весовыми множителями:

$$j^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \rho^{(\sigma_1)}v^{(\sigma_2)} = [\sigma_1\hat{\rho} + (1-\sigma_1)\rho]\,[\sigma_2\hat{v} + (1-\sigma_2)\,v].$$

Величины $0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, суть параметры схемы, посредством которых осуществляется тот или иной вид интерполяции по времени соответствующих членов уравнения.

Чтобы обеспечить единообразие записи разностных уравнений схемы, а также формул, встречающихся ниже, в граничных точках, введем в рассмотрение два фиктивных интервала $h_{-1} = 0$ и $h_N = 0$. Тогда, например, в (3.3) $v_{-1} = v_0$, ε_N в (3.4) есть значение внутренней энергии в граничном узле сетки $i = N$, и т. д.

Из дивергентности уравнений (3.2) и (3.3) следует справедливость разностных аналогов законов сохранения массы и импульса для фиксированного объема $\{r_0, r_N\}$.

Уравнение энергии (3.4) выбрано в недивергентной форме. Это обеспечивает в схеме выполнение разностного баланса внутренней энергии

$$[\rho, \varepsilon)\,|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \{(E_N{}^j - E_0{}^j) - A^j\} = 0, \tag{3.5}$$

$$E_i{}^j = j_i^{(\sigma_1,\sigma_2)}\varepsilon_i^{(\sigma_5)}, \qquad A^j = -[p^{(\sigma_6)}, v_r{}^{(\sigma_7)}).$$

Соотношение (3.5) получается суммированием по сетке уравнения (3.4) для $0 \leqslant i \leqslant N-1$, $t^{j_1} \leqslant t^j \leqslant t^{j_2}$ и выражает тот факт, что изменение внутренней энергии газа в фиксированном объеме $\{r_0, r_N\}$ происходит за счет суммарной работы сил давления над газом A и потока внутренней энергии через границы объема r_0 и r_N.

Вычислим для схемы (3.1) — (3.4) изменение полной энергии. Преобразуем для этого в (3.5) последний член. В силу (2.12) и с учетом (2.14) имеем

$$A^j = [p_{\bar{r}}^{(\sigma_3)}, v^{(\sigma_7)}] - (R_N^j - R_0^j) + D_1^j, \tag{3.6}$$

где $R_N^j = p_N^{(\sigma_6)}v_N^{(\sigma_7)}$, $R_0^j = p_{-1}^{(\sigma_6)}v_0^{(\sigma_7)}$, $D_1^j = (\sigma_6 - \sigma_3)\,\tau\,[p_{\bar{r}t}, v^{(\sigma_7)}]$.

Величины p_{-1} и p_N есть значения давления в граничных узлах сетки $i = 0$ и $i = N$.

Из уравнения (3.3) после умножения на $v^{(\sigma_7)}$ и суммирования по узлам сетки находим

$$[p_{\bar r}^{(\sigma_3)}, v^{(\sigma_7)}] = -[v^{(\sigma_7)}, j_t] - 0.5\,[v^{(\sigma_7)}, \{j^{(\sigma_1,\sigma_2)}(v^{(\sigma_4)} + v^{(\sigma_4)}(-1))\}_r]. \tag{3.7}$$

Применяя формулу (2.13) для разностного дифференцирования по времени и заменяя $v^{(\sigma_7)}$ согласно (2.14) на величину $v^{(0.5)} + (\sigma_7 - 0.5)\tau v_t$, получим

$$v^{(\sigma_7)} j_t = v^{(\sigma_7)}(\rho v)_t = 0{,}5 v^{(\sigma_7)}(\rho v)_t + 0.5 v^{(\sigma_7)}(\rho^{(0.5)} v_t + v^{(0.5)}\rho_t) = 0.5(\rho v^2)_t +$$
$$+ 0.5 v^{(\sigma_7)} v^{(0.5)} \rho_t + 0.5(\sigma_7 - 0.5)\tau v_t((\rho v)_t + \rho^{(0.5)} v_t).$$

Подставим сюда ρ_t из уравнения неразрывности и перепишем (3.7) в виде

$$\begin{gathered}[p_{\bar r}^{(\sigma_3)}, v^{(\sigma_7)}] = -0.5\,[\rho, v^2]_t + 0.5\,[v^{(\sigma_7)} v^{(0.5)}, j_r^{(\sigma_1,\sigma_2)}] - \\ - 0.5\,[v^{(\sigma_7)}, \{j^{(\sigma_1,\sigma_2)}(v^{(\sigma_4)} + v^{(\sigma_4)}(-1))\}_r] + D_2{}^j, \\ D_2{}^j = -0.5(\sigma_7 - 0.5)\tau[v_t, (\rho v)_t + \rho^{(0.5)} v_t].\end{gathered} \tag{3.8}$$

Аналогичным путем можно убедиться, далее, в справедливости равенства

$$\begin{gathered}0.5\,[v^{(\sigma_7)} v^{(0,5)}\, j_r^{(\sigma_1,\sigma_2)}] - 0.5\,[v^{(\sigma_7)}, \{j^{(\sigma_1,\sigma_2)}(v^{(\sigma_4)} + v^{(\sigma_4)}(-1))\}_r] = \\ = -(W_{N+1}^{\,j} - W_0{}^j) + D_3{}^j + D_4{}^j, \\ W_i^{\,j} = 0.5\, j_i^{(\sigma_1,\sigma_2)} v_i^{(\sigma_7)} v_{i-1}^{(\sigma_7)}, \qquad v_{-1} = v_0, \qquad v_{N+1} = v_N, \\ D_3{}^j = -0.5\,(\sigma_4 - 0.5)\,\tau\,[v^{(\sigma_7)} v_t, j_r^{(\sigma_1,\sigma_2)}], \\ D_4{}^j = -0.5\,(\sigma_4 - \sigma_7)\,\tau\,[v^{(\sigma_7)}, (j^{(\sigma_1,\sigma_2)} v_t(-1))_r + j^{(\sigma_1,\sigma_2)}(+1)\, v_{rt}].\end{gathered} \tag{3.9}$$

Сводя (3.9), (3.8), (3.6) в (3.5), получаем разностный аналог закона сохранения полной энергии для схемы (3.1) — (3.4) в следующем виде:

$$\begin{gathered}[\rho, \rho)]\big|_{j_1}^{j_2} + 0.5\,[\rho, v^2]\big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \{(E_N{}^j - E_0{}^j) + (R_N{}^j - R_0{}^j) + (W_{N+1}^{\,j} - W_0{}^j)\} = \Delta E, \\ \Delta E = \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} (D_1{}^j + D_2{}^j + D_3{}^j + D_4{}^j).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Как видно, в общем случае этот закон нарушен. Дисбаланс полной энергии ΔE накапливается со временем и на гладких решениях имеет порядок $O(\tau)$. Величина ΔE не зависит от шага сетки по пространству и потому не может быть уменьшена измельчением шага h. Из структуры членов D_k ($k = 1, 2, 3, 4$) видно, что дисбаланс зависит от характера решения и может достигать больших значений на разрывных и сильноменяющихся во времени и пространстве решениях.

Чтобы обеспечить в рассматриваемой схеме соблюдение разностного закона сохранения полной энергии ($\Delta E \equiv 0$, $D_k \equiv 0$), достаточно выполнить условия

$$\sigma_6 = \sigma_3, \qquad \sigma_7 = \sigma_4 = 0.5. \tag{3.11}$$

При выполнении этих условий недивергентное уравнение энергии (3.4) оказывается эквивалентным дивергентному разностному уравнению

$$(\rho\varepsilon)_t + 0.5(\rho v^2)_t = -(j^{(\sigma_1,\sigma_2)}(\varepsilon^{(\sigma_5)} + 0.5 v^{(0.5)} v^{(0.5)}(-1)))_r - (p^{(\sigma_3)}(-1)\, v^{(0.5)})_r. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) является разностной аппроксимацией дивергентного дифференциального уравнения (2.4). Оно может быть получено из (3.4) алгебраически с помощью уравнений (3.1) — (3.3).

В соответствии с [2] формальное требование эквивалентности в разностном виде недивергентного уравнения (3.4) некоторому дивергентному уравнению также приводит к условиям (3.11) и к выражению (3.12) и может служить основой для отбора из семейства (3.1) — (3.4) полностью консервативных разностных схем.

Исходя из правила эквивалентности, потребуем, чтобы уравнение (3.4) сводилось также к разностным формам, аппроксимирующим (2.7) и (2.8). Не останавливаясь на подробностях вывода, приведем результаты.

Уравнение (3.4) эквивалентно разностному уравнению

$$\rho^{(\nu)}\varepsilon_t + j^{(\sigma_1,\,\sigma_2)}(+1)\,\varepsilon_r^{(\sigma_5)} = -p^{(\sigma_3)}v_r^{(0.5)}, \qquad \nu = 1 - \sigma_5, \tag{3.13}$$

при следующих значениях параметра σ_5:

$$\sigma_5 = 0, \qquad \sigma_5 = 0.5, \qquad \sigma_5 = 1. \tag{3.14}$$

При дополнительном условии

$$\sigma_2 = 0.5, \qquad \sigma_5 = \sigma_1 \tag{3.15}$$

уравнение (3.4) преобразовывается также к виду

$$\rho^{(\nu)}\left(\varepsilon_t + p^{(\sigma_3)}\left(\frac{1}{\rho}\right)_t\right) + j^{(\sigma_1,\,0.5)}(+1)\left(\varepsilon_r^{(\sigma_1)} + p^{(\sigma_3)}\left(\frac{1}{\rho^{(\sigma_1)}}\right)_r\right) = 0. \tag{3.16}$$

Уравнения (3.13) и (3.16) аппроксимируют законы изменения внутренней энергии для фиксированных материальных частиц и обеспечивают выполнение вдоль их траекторий соответствующих разностных энергетических балансов.

Так же как в дифференциальном виде, где уравнение движения (2.3) сводилось с помощью уравнения неразрывности (2.2) к (2.5), в разностном виде при условиях (3.11) уравнение (3.3) с использованием (3.2) преобразуется к

$$\rho^{(0.5)}v_t = -p_{\bar r}^{(\sigma_3)} - 0.5\,(j^{(\sigma_1,\,\sigma_2)}(+1)\,v_r^{(0.5)} + j^{(\sigma_1,\,\sigma_2)}v_{\bar r}^{(0.5)}). \tag{3.17}$$

Итак, условия (3.11), (3.14) и (3.15) выделяют из семипараметрического семейства разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений газодинамики в переменных Эйлера, двухпараметрическое семейство схем, являющихся полностью консервативными:

$$j = \rho v \qquad (j^{(\alpha,\,0.5)} = \rho^{(\alpha)}v^{(0.5)}), \tag{3.18}$$

$$\rho_t = -j_r^{(\alpha,0.5)}, \tag{3.19}$$

$$j_t = p_{\bar r}^{(\beta)} - 0.5\,(j^{(\alpha,\,0.5)}(v^{(0.5)} + v^{(0.5)}(-1)))_r, \tag{3.20}$$

$$(\rho\varepsilon)_t = -(j^{(\alpha,\,0.5)}\,\varepsilon^{(\alpha)})_r - p^{(\beta)}v_r^{(0.5)} \tag{3.21}$$

(параметр $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ свободный, параметр α может принимать одно из трех значений 0, 0.5, 1).

Для схемы (3.18) — (3.21) выполнены разностные законы сохранения массы, импульса и полной энергии, а также детальный баланс энергии, т. е. баланс по отдельным видам энергии — внутренней и кинетической. Кроме того, для этих схем справедливы соответствующие энергетические соотношения вдоль траекторий материальных частиц. Семейство схем (3.18) — (3.21) одновременно аппроксимирует возможные эквивалентные виды системы дифференциальных уравнений газодинамики (2.1) — (2.8).

Схема (3.18) — (3.21) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h)$. При значениях параметров $\alpha = \beta = 0.5$ порядок аппроксимации схемы $O(\tau^2 + h)$.

4. Семейство полностью консервативных схем, аналогичное (3.18) — (3.21), можно построить на несколько измененном шаблоне

$$j = \rho(-1)\,v \qquad (j^{(\alpha,\,0.5)} = \rho^{(\alpha)}(-1)\,v^{(0.5)}), \tag{4.1}$$

$$\rho_t = -j_r^{(\alpha,\,0.5)}, \tag{4.2}$$

$$j_t = -p_{\bar r}^{(\beta)} - 0.5\,(j^{(\alpha,\,0.5)}(-1)\,(v^{(0.5)} + v^{(0.5)}(-1)))_r, \tag{4.3}$$

$$(\rho\varepsilon)_t = -\,(j^{(\alpha,\,0.5)}\,\varepsilon^{(\alpha)}(-1))_r - p^{(\beta)}v_{\bar r}^{(0.5)}. \tag{4.4}$$

Здесь сеточная функция плотности потока газа j по-прежнему относится к i-му узлу сетки, но определяется по значению плотности в левой соседней полуцелой точке.

Для схем (4.1) — (4.4) справедливы балансные соотношения, подобные рассмотренным в предыдущем пункте. В соответствии с определением полной консервативности это семейство схем также одновременно аппроксимирует возможные эквивалентные формы исходной системы дифференциальных уравнений. Уравнения движения (4.3) и энергии (4.4) алгебраически преобразуются к соответствующим эквивалентным разностным формам. Например, аналогично (3.12) имеем

$$(\rho\varepsilon)_t + 0.5(\rho v^2(+1))_t = -(j^{(\alpha\,0.5)}(\varepsilon^{(\alpha)}(-1) + 0.5v^{(0.5)}v^{(0.5)}(+1)))_r - (p^{(\beta)}v^{(0.5)})_r. \tag{4.5}$$

Из (4.5), в частности, следует, что для схемы (4.1) — (4.4) кинетическая энергия ячейки сетки $[r_i, r_{i+1}]$ определяется по значению скорости на правой границе v_{i+1}, в отличие от схем, рассмотренных выше, где кинетическая энергия ячейки вычислялась по скорости левой границы v_i.

Порядок аппроксимации схем (4.1) — (4.4) есть $O(\tau + h)$, при $\alpha = \beta = 0.5$ получаем схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h)$.

Разностные схемы (3.1) — (3.4) и (4.1) — (4.4) записаны на несимметричных шаблонах и потому имеют первый порядок аппроксимации по пространству $O(h)$. Используя симметричный шаблон, можно построить полностью консервативные схемы со вторым порядком аппроксимации $O(h^2)$. В обычных индексных обозначениях они имеют вид

$$j_i^{\,j} = 0.5\,(\rho_{i+1/2}^j + \rho_{i-1/2}^j)\,v_i^j, \tag{4.6}$$

$$\frac{\rho_{i+1/2}^{j+1} - \rho_{i+1/2}^j}{\tau^j} = \frac{R_{i+1}^{(\alpha)}(v_{i+1}^{j+1} + v_{i+1}^j) - R_i^{(\alpha)}(v_i^{j+1} + v_i^j)}{2h_i}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{j_i^{j+1} - j_i^{\,j}}{\tau^j} = &-\left[\beta\frac{p_{i+1/2}^{j+1} - p_{i-1/2}^{j+1}}{0.5\,(h_i + h_{i-1})} + (1-\beta)\frac{p_{i+1/2}^j - p_{i-1/2}^j}{0.5\,(h_i + h_{i-1})}\right] - \\ &-\left\{\frac{[R_{i+1}^{(\alpha)}(v_{i+1}^{j+1} + v_{i+1}^j) + R_i^{(\alpha)}(v_i^{j+1} + v_i^j)]\,(v_{i+1}^{j+1} + v_{i+1}^j + v_i^{j+1} + v_i^j)}{8\,(h_i + h_{i-1})} - \right.\\ &\left. - \frac{[R_i^{(\alpha)}(v_i^{j+1} + v_i^j) + R_{i-1}^{(\alpha)}(v_{i-1}^{j+1} + v_{i-1}^j)]\,(v_i^{j+1} + v_i^j + v_{i-1}^{j+1} + v_{i-1}^j)}{8\,(h_i + h_{i-1})}\right\},\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{i+1/2}^{j+1}\,\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \rho_{i+1/2}^j\,\varepsilon_{i+1/2}^j}{\tau^j} = &-\frac{R_{i+1}^{(\alpha)}E_{i+1}^{(\alpha)}(v_{i+1}^{j+1} + v_{i+1}^j) - R_i^{(\alpha)}E_i^{(\alpha)}(v_i^{j+1} + v_i^j)}{2h_i} - \\ &-(\beta p_{i+1/2}^{j+1} + (1-\beta)\,p_{i+1/2}^j)\,\frac{v_{i+1}^{j+1} + v_{i+1}^j - (v_i^{j+1} + v_i^j)}{2h_i},\end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$R_i^{(\alpha)} = \alpha\frac{\rho_{i+1/2}^{j+1} + \rho_{i-1/2}^{j+1}}{2} + (1-\alpha)\frac{\rho_{i+1/2}^j + \rho_{i-1/2}^j}{2},$$

$$E_i^{(\alpha)} = \alpha\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} + \varepsilon_{i-1/2}^{j+1}}{2} + (1-\alpha)\frac{\varepsilon_{i+1/2}^j + \varepsilon_{i-1/2}^j}{2}.$$

Как видно, отдельные уравнения этой разностной схемы представляют собой полусуммы соответствующих уравнений несимметричных схем (3.1) — (3.4) и (4.1) — (4.4).

Значения параметров $\alpha = \beta = 0.5$ в схеме (4.6) — (4.9) выделяют единственную полностью консервативную разностную схему для уравнений газодинамики в переменных Эйлера со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству $O(\tau^2 + h^2)$.

Обычно для обеспечения сквозного счета возможных ударных волн в разностную схему вводится псевдовязкость [4]. Все полученные выше результаты легко обобщаются и на этот случай, достаточно лишь в уравнениях движения и энергии под p понимать сумму газокинетического давления и псевдовязкости.

5. Построенные в работе полностью консервативные разностные схемы дают определенные количественные преимущества по сравнению с другими схемами тех же порядков аппроксимации на разрывных и сильноменяющихся решениях. При расчете таких решений по обычным схемам возникают различные дисбалансы, величины которых в этом случае особенно велики, как следует из структуры членов D_k^j, вычисленных выше. Чтобы устранить влияние дисбалансов, искажающих решение, необходимо дробить временно́й шаг сетки порой до неприемлемо малых с точки зрения практического использования значений.

В полностью консервативных схемах дисбалансы точно равны нулю, причем этот факт является алгебраическим следствием исходной системы разностных уравнений и не зависит от величины шагов сетки. Фактически введение полной консервативности приводит к повышению порядка аппроксимации на сильноменяющихся решениях. На гладких же решениях полностью консервативные и обычные разностные схемы практически дают один и тот же результат.

Поступила в редакцию 21.11.1969

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
2. Ю. П. Попов, А. А. Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 4, 953—958.
3. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
4. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во ин. лит., 1960.

УДК 517.9:539.3

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Х. ОСТРОМОГИЛЬСКИЙ

(Москва)

Рассматривается следующая задача: пусть в полупространстве $x_3 \leqslant 0$ декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3), заполненном упругой средой, возникают колебания, которые регистрируются на границе среды ($x_3 = 0$). Эти колебания вызваны силами, сосредоточенными в некотором ограниченном объеме. По вектору смещений, измеренному на границе, требуется определить силы, вызвавшие колебания среды. Цель настоящей работы — исследование единственности решения этой задачи.