ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 10 Июль 1970 Август № 4

УДК 518:517.9:538.4

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Ю. П. ПОПОВ, А. А. САМАРСКИЙ

(Москва)

1. В [1] показано, что обычные разностные схемы, в том числе и консервативные, аппроксимирующие систему уравнений газодинамики, имеют недостаток: в них нарушены энергетические балансные соотношения.

Выделен класс схем, названных полностью консервативными, которые свободны от указанного дефекта. Для этих схем выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения массы, импульса и полной энергии (как для обычных консервативных схем), но справедлив также детальный баланс энергии, т. е. баланс по отдельным видам энергии: внутренней и кинетической.

Полностью консервативные разностные схемы могут быть получены, например, с помощью известного интегро-интерполяционного метода [2] при соблюдении некоторого формального правила отбора. Сущность этого правила такова. В газодинамике уравнение энергии, например, может быть записано в различных видах: дивергентном, описывающем изменение во времени полной энергии, недивергентном, выражающем изменение внутренней энергии, энтропийном. В дифференциальной форме эти виды эквивалентны, т. е. сводятся друг к другу с помощью остальных уравнений системы.

В разностном же виде такое свойство эквивалентности, вообще говоря, не имеет места и справедливо лишь для полностью консервативных схем. Другими словами, полностью консервативные разностные схемы одновременно аппроксимируют возможные эквивалентные формы исходной дифференциальной системы уравнений.

В настоящей работе рассматриваются разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики в лагранжевых координатах для случая одной пространственной переменной. Построены полностью консервативные разностные схемы с первым и вторым порядком аппроксимации.

2. Система одномерных плоских нестационарных уравнений магнитной гидродинамики при отсутствии продольной компоненты магнитного поля в лагранжевых массовых координатах имеет вид [3]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}=v, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H}{\rho}\right)=\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=4\pi\frac{I}{\rho}, \tag{2.5}$$

$$I=\sigma E, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial v}{\partial x}+Q, \qquad Q=\frac{IE}{\rho}. \tag{2.7}$$

Обозначения: t — время, r — переменная Эйлера, ρ — плотность среды, $x(dx=\rho dr)$ — лагранжева массовая координата, v — продольная компонента скорости, p — газокинетическое давление, ε — внутренняя энергия, σ — электропроводность среды, H, E — поперечные взаимно-перпендикулярные составляющие напряженности, соответственно, магнитного и электрического полей, I — плотность электрических токов, F — электромагнитная сила Лоренца, Q — Джоулево тепло. Производная по времени Лагранжева.

Система уравнений магнитной гидродинамики может быть записана в нескольких эквивалентных видах, имеющих непосредственный физический смысл. Так, уравнение энергии (2.7) с учетом уравнения (2.3) можно представить еще в одном недивергентном виде, выражающем изменение внутренней энергии:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)+Q. \tag{2.8}$$

Кроме того, уравнение (2.7), используя (2.1) — (2.5), можно свести к дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+0.5v^2+\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)v\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{EH}{4\pi}\right), \tag{2.9}$$

описывающей изменение полной энергии.

Дифференциальные уравнения (2.7) — (2.9) эквивалентны в том смысле, что с помощью остальных уравнений системы сводятся друг к другу.

В уравнении движения (2.1) сила Лоренца F может быть записана в дивергентной и недивергентной формах, которые также эквивалентны:

$$F=-\frac{IH}{\rho}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H^2}{8\pi}\right). \tag{2.10}$$

При численном решении методом конечных разностей система дифференциальных уравнений аппроксимируется некоторой разностной схемой. При этом разностную схему можно строить на основе любого из эквивалентных видов дифференциальной системы. В частности, обычные консервативные схемы строятся на основе дивергентных уравнений.

Сформулируем разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений магнитной гидродинамики в виде (2.1)—(2.7).

Для этого в рассматриваемой части пространства x, t введем разностную сетку $\{x_i, t^j\}$, $x_{i+1} = x_i + m_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$; $t^{j+1} = t^j + \tau^j$, $j = 0, 1, \ldots$. Для простоты сетку будем считать равномерной ($m_i = m = \mathrm{const}$, $\tau^j = \tau = \mathrm{const}$), хотя все полученные ниже результаты справедливы и для случая неравномерных сеток.

Определим на сетке сеточные функции, причем значения сеточных функций скорости v_i^j, эйлеровой переменной r_i^j, напряженности электрического поля E_i^j, плотности тока I_i^j и силы Лоренца F_i^j будем относить к узлам сетки (x_i, t^j), а значения сеточных функций плотности ρ_i^j, давления p_i^j, внутренней энергии ε_i^j, магнитного поля H_i^j, электропроводности σ_i^j и джоулева тепла Q_i^j — к серединам массовых интервалов $(x_{i+1/2}, t^j)$, $x_{i+1/2} = x_i + 0.5m$.

В дальнейшем, следуя [4], будем пользоваться удобными для проведения выкладок безындексными обозначениями

$$y_i^j = y, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y}(1-\sigma)y, \quad y(\pm 1) = y_{i\pm1}^j, \tag{2.11}$$

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} = y_t, \quad \frac{y(+1)-y}{m} = y_x, \quad \frac{y-y(-1)}{m} = y_{\bar{x}}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i u_i m_i = (y, u), \quad \sum_{i=0}^{N-1} y_i u_i m_i = [y, u), \quad \sum_{i=0}^{N} y_i u_i m_i = (y, u]. \tag{2.13}$$

Для разностного суммирования справедливо следующее правило:

$$[y, u_x] = -[y_{\bar{x}}, u] + y_N u_N - y_{-1} u_0. \tag{2.14}$$

В выкладках при разностном дифференцировании по времени произведения будет использоваться формула

$$(y \cdot u)_t = \hat{y} u_t + u y_t, \tag{2.15}$$

а также разностное тождество

$$y^{(\sigma_1)} = y^{(\sigma_2)} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_t. \tag{2.16}$$

3. Рассмотрим следующее многопараметрическое семейство разностных схем, аппроксимирующих уравнения магнитной гидродинамики:

$$v_t = -p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)} + F, \tag{3.1}$$

$$r_t = v^{(\sigma_2)}, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = v_x^{(\sigma_3)}, \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{H}{\rho}\right)_t = E_x^{(\sigma_4)}, \tag{3.4}$$

$$H_{\bar{x}} = 4\pi \frac{I}{\rho(-1)}, \tag{3.5}$$

$$I = \sigma(-1)E, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_5)} v_x^{(\sigma_6)} + Q, \qquad Q = \left(\frac{I}{\rho(-1)}\right)^{(\sigma_7)} E^{(\sigma_8)}. \tag{3.7}$$

Здесь $0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, 8$,— параметры схемы, позволяющие осуществить выбор конкретного вида интерполяции по времени соответствующих членов уравнений.

Для достижения единообразия записи в граничных точках сетки уравнений схемы, а также разностных формул, встречающихся ниже, введем в рассмотрение два фиктивных сеточных интервала $m_{-1} = 0$ и $m_N = 0$. Тогда, например, в (3.1) под p_{-1} и p_N следует понимать значения сеточной функции давления в граничных узлах, при этом само уравнение (3.1) сохраняет силу для $i = 0$ и $i = N$.

Очевидно, для схемы (3.1) — (3.7) закон сохранения массы выполняется автоматически в силу использования массовых координат. В данном случае вместо него следует требовать выполнения некоторого соотношения для объема,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\rho_i} m_i = \left[\frac{1}{\rho}, 1\right) = r_N - r_0,$$

которое справедливо, согласно [1], при

$$\sigma_3 = \sigma_2. \tag{3.8}$$

Использование в разностной схеме недивергентного уравнения энергии обеспечивает выполнение баланса внутренней энергии

$$E^{j_2} - E^{j_1} = \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} A^j + B^j, \tag{3.9}$$

$$E^j = [\varepsilon, 1), \qquad A^j = -[p^{(\sigma_5)}, v_x^{(\sigma_6)}), \qquad B^j = [Q, 1).$$

Соотношение (3.9) получено суммированием по сетке уравнения (3.7) для $0 \leqslant i \leqslant N-1$, $j_1 \leqslant j \leqslant j_2$ и выражает тот факт, что изменение внутренней энергии фиксированной массы газа $[x_0, x_N]$ происходит за счет суммарной работы сил давления над газом A и джоулева тепла B.

Вычислим в схеме (3.1) — (3.7) изменение полной энергии. Используя (2.14) и (2.16), преобразуем выражение для A:

$$A^j = -[p^{(\sigma_5)}, v_x^{(\sigma_6)}] = [p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)}, v^{(\sigma_6)}] - R^j + D_1^j, \tag{3.10}$$

где

$$R^j = p_N^{(\sigma_5)} v_N^{(\sigma_6)} - p_{-1}^{(\sigma_5)} v_0^{(\sigma_6)}, \qquad D_1^j = (\sigma_5 - \sigma_1)\tau\, [p_{\bar{x}t}, v^{(\sigma_6)}].$$

После умножения уравнения (3.1) на $v^{(\sigma_6)}$, суммирования его по сетке и учета (2.16) имеем

$$[p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)}, v^{(\sigma_6)}] - [F, v^{(\sigma_6)}] = -[v^{(\sigma_6)}, v_t] = -0.5\,[(v^2)_t, 1] + D_2^j, \tag{3.11}$$

$$D_2^j = (0.5 - \sigma_6)\tau [v_t^2, 1].$$

Преобразуем далее электромагнитные члены:

$$B^j = \left[\left(\frac{I}{\rho(-1)}\right)^{(\sigma_7)}, E^{(\sigma_8)}\right) = \frac{1}{4\pi} [H_{\bar{x}}^{(\sigma_7)}, E^{(\sigma_8)}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}[H^{(\sigma_7)}, E_x^{(\sigma_4)}) + \Pi^j + D_3^j, \tag{3.12}$$

$$\Pi^j = \frac{1}{4\pi}(H_{N-1}^{(\sigma_7)}E_N^{(\sigma_8)} - H_{-1}^{(\sigma_7)}E_0^{(\sigma_8)}), \quad D_3^j = \frac{1}{4\pi}(\sigma_4 - \sigma_8)\tau[H^{(\sigma_7)}, E_{\bar{x}t}).$$

Здесь мы воспользовались разностными уравнениями для электромагнитного поля (3.4) — (3.5).

Исходя из формулы (2.15) для разностного дифференцирования произведения, можно убедиться в справедливости разностного тождества

$$\left(\frac{H^2}{\rho}\right)_t = 2H^{(0.5)}\left(\frac{H}{\rho}\right)_t - H\hat{H}\left(\frac{1}{\rho}\right)_t,$$

которое после замены производных по времени в соответствии с (3.3) и (3.4) можно переписать в виде

$$H^{(0.5)}E_x^{(\sigma_4)} = 0.5\left(\frac{H^2}{\rho}\right)_t + 0.5H\hat{H}v_x^{(\sigma_3)}.$$

Принимая во внимание последнее соотношение, продолжим цепочку преобразований (3.12):

$$\frac{1}{4\pi}[H^{(\sigma_7)}E_x^{(\sigma_4)}) = \left[\left(\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)_t, 1\right) + \left[\frac{H\hat{H}}{8\pi}, v_x^{(\sigma_3)}\right) - D_4^j =$$

$$= \left[\left(\frac{H^2}{8\pi\rho}\right)_t, 1\right) - \left[\left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}, v^{(\sigma_6)}\right] + \frac{H_N\hat{H}_N}{8\pi}v_N^{(\sigma_6)} -$$

$$- \frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}v_0^{(\sigma_6)} - D_4^j - D_5^j,$$

$$D_4^j = \frac{1}{4\pi}(0.5 - \sigma_7)\tau\left[H_t, \left(\frac{H}{\rho}\right)_t\right), \quad D_5^j = \frac{1}{8\pi}(\sigma_6 - \sigma_3)\tau[H\hat{H}, v_{xt}).$$

Сводя все результаты в (3.9), получаем разностный аналог закона сохранения полной энергии для фиксированной массы $[x_0, x_N]$ на отрезке времени $[t^{j_1}, t^{j_2}]$:

$$[\varepsilon, 1)\,|_{j_1}^{j_2} + 0.5[v^2, 1]\,|_{j_1}^{j_2} + \left[\frac{H^2}{8\pi\rho}, 1\right)\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\left\{\left(p_N^{(\sigma_5)} + \frac{H_N\hat{H}_N}{8\pi}\right)v_N^{(\sigma_6)} -\right.$$

$$\left. - \left(p_{-1}^{(\sigma_5)} + \frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}\right)v_0^{(\sigma_6)} - \Pi^j\right\} = \Delta E, \tag{3.13}$$

$$\Delta E = \tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\sum_{p=1}^{6} D_p^j, \qquad D_6^j = \left[\left(F + \frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}, v^{(\sigma_6)}\right],$$

Как видно, в общем случае этот закон не выполняется. Дисбаланс полной энергии ΔE накапливается со временем и на гладких решениях имеет порядок $O(\tau)$. На разрывных же и сильноменяющихся решениях, как следует из структуры членов $D_p{}^j$, дисбаланс может стать значительным и существенно исказить характер решения.

Примечательно, что дисбаланс не зависит от шага сетки m и потому не может быть уменьшен путем сгущения пространственной сетки.

Наличие дисбаланса полной энергии в рассматриваемой схеме связано с недивергентностью уравнения энергии (3.7). Однако использование в схеме дивергентного уравнения, например, в виде

$$\left(\varepsilon + 0.5v^2 + \frac{H^2}{8\pi\rho}\right)_t = -\left[\left(p^{(\sigma_5)}(-1) + \frac{H(-1)\hat{H}(-1)}{8\pi}\right) v^{(\sigma_6)}\right]_x + \left(\frac{H^{(\sigma_7)}(-1)E^{(\sigma_8)}}{4\pi}\right)_x \quad (3.14)$$

приводит к аналогичным трудностям. При выполненном законе сохранения полной энергии в такой схеме будет нарушен детальный баланс энергии, т. е. баланс по отдельным видам энергии. Так, баланс внутренней энергии имеет вид

$$[\varepsilon, 1)\,|_{j_1}^{j_2} - \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \left\{ [p^{(\sigma_1)}, v_x^{(0.5)}) + \left[\left(\frac{I}{\rho(-1)}\right)^{(0.5)}, E^{(\sigma_4)}\right)\right\} = \overline{\Delta E}, \quad (3.15)$$

$$\overline{\Delta E} = \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{p=1}^{6} \overline{D}_p{}^j,$$

$$\overline{D}_1{}^j = (0.5 - \sigma_9)\tau \left\{ \left(p_{N-1}^{(\sigma_1)} + \frac{H_{N-1}\hat{H}_{N-1}}{8\pi}\right)(v_N)_t - \left(p_{-1}^{(\sigma_1)} + \frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}\right)(v_0)_t \right\},$$

$$\overline{D}_2{}^j = (\sigma_1 - \sigma_5)\,\tau\,\{(p_{N-1})_t v_N^{(\sigma_6)} - (p_{-1})_t v_0^{(\sigma_6)}\},$$

$$\overline{D}_3{}^j = (\sigma_7 - 0.5)\,\tau\,\{(H_{N-1})_t E_N^{(\sigma_8)} - (H_{-1})_t E_0^{(\sigma_8)}\},$$

$$\overline{D}_4{}^j = (\sigma_8 - \sigma_4)\,\tau\,\{H_{N-1}^{(0.5)}(E_N)_t - H_{-1}^{(0.5)}(E_0)_t\},$$

$$\overline{D}_5{}^j = (\sigma_3 - 0.5)\,\tau \left[\frac{H\hat{H}}{8\pi}, v_{xt}\right), \qquad \overline{D}_6{}^j = -\left[F + \left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}, v^{(0.5)}\right].$$

В общем случае $\overline{\Delta E} \not\equiv 0$, что свидетельствует о плохой аппроксимации в схеме внутренней энергии. Указанный дефект схемы не менее опасен, чем нарушение закона сохранения полной энергии. По этой причине, например, в ряде расчетов наблюдался такой нефизичный эффект, как уменьшение температуры некоторой массы газа на стадии сжатия при наличии джоулева нагрева. Особенно недопустимы подобные явления при расчете задач, в которых присутствуют функции, сильно зависящие от температуры, такие, как коэффициент электропроводности, теплопроводности и т. д.

Чтобы обеспечить в схеме (3.1) — (3.7) соблюдение разностного закона сохранения полной энергии $\Delta E \equiv 0$, $D_p{}^j \equiv 0$ в (3.13), а в схеме с дивергентным уравнением (3.14) — соблюдение баланса внутренней энергии $\overline{\Delta E} \equiv 0$, $\bar{D}_p{}^j \equiv 0$ в (3.15), достаточно выполнить условия

$$\sigma_5 = \sigma_1, \quad \sigma_6 = \sigma_3 = 0.5, \quad \sigma_7 = 0.5, \quad \sigma_8 = \sigma_4, \quad F = -\left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}. \qquad (3.16)$$

При этом обе схемы оказываются эквивалентными, уравнение (3.7) алгебраически сводится к дивергентному уравнению (3.14) и наоборот.

Очевидно также, что равенство $\sigma_6 = \sigma_3$ обеспечивает алгебраическую эквивалентность уравнения (3.7) разностному уравнению

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_5)}\left(\frac{1}{\rho}\right)_t + Q,$$

которое аппроксимирует дифференциальное уравнение (2.8).

Условия (3.16) однозначно определяют разностный вид силы Лоренца F. Это выражение аппроксимирует дивергентную дифференциальную форму в (2.10) и обеспечивает в схеме соблюдение разностного аналога закона сохранения импульса.

Дивергентное разностное выражение для силы (3.16) можно преобразовать к недивергентной форме

$$F = -0.25\left[\left(\frac{\hat{I}}{\rho(-1)}\right)(H + H(-1)) + \frac{I}{\rho(-1)}(\hat{H} + \hat{H}(-1))\right],$$

которая аппроксимирует недивергентное соотношение в (2.10).

Итак, условия (3.8) и (3.16) выделяют из восьмипараметрического семейства разностных схем (3.1) — (3.7), аппроксимирующих систему уравнений магнитной гидродинамики, двухпараметрическое семейство схем (со свободными параметрами α и β), являющихся полностью консервативными:

$$\begin{gathered} v_t = -p_{\bar{x}}^{(\alpha)} - \left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}, \qquad r_t = v^{(0.5)}, \qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)_t = v_x^{(0.5)}, \\ \left(\frac{H}{\rho}\right)_t = E_x^{(\beta)}, \qquad H_{\bar{x}} = 4\pi\frac{I}{\rho(-1)}, \qquad I = \sigma^{(-1)}E, \qquad (\mathrm{I}) \\ \varepsilon_t = -p^{(\alpha)}v_x^{(0.5)} + \left(\frac{I}{\rho(-1)}\right)^{(0.5)} E^{(\beta)}. \end{gathered}$$

Для семейства схем (I) справедливы не только основные разностные законы сохранения массы (объема), импульса и полной энергии, но также ряд дополнительных балансных соотношений, необходимость выполнения которых диктуется физическими соображениями, например детальный баланс энергии, т. е. баланс по отдельным видам энергии — внутренней, кинетической, магнитной. Схема (I) одновременно аппроксимирует возможные эквивалентные виды системы дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + m)$; при значениях параметров $\alpha = \beta = 0.5$ порядок аппроксимации равен $O(\tau^2 + m)$.

4. Семейство полностью консервативных схем, аналогичное семейству (I), можно построить при использовании несколько иной разностной аппроксимации джоулева тепла в уравнении энергии (3.7):

$$Q = \left(\frac{I(+1)}{\rho}\right)^{\sigma_7} E^{(\sigma_8)}(+1).$$

При этом условия полной консервативности (3.16) сохраняются, а уравнение энергии (3.7) оказывается эквивалентным следующему дивергентному уравнению:

$$\left(\varepsilon + 0.5v^2(+1) + \frac{H^2}{8\pi\rho}\right)_t = -\left[\left(p^{(\alpha)} + \frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)v^{(0.5)}\right]_x + \left(\frac{H^{(0.5)}E^{(\beta)}}{4\pi}\right)_x.$$

Здесь использована другая форма аппроксимации кинетической энергии.

Это семейство схем также имеет порядок аппроксимации $O(\tau + m)$, а при $\alpha = \beta = 0.5$ — порядок $O(\tau_2 + m)$.

Построенные схемы записаны на несимметричных шаблонах и потому имеют первый порядок аппроксимации по пространству. Используя симметричный шаблон, можно получить полностью консервативные схемы со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{gathered}
v_t = -p_{\bar{x}}^{(\alpha)} - \left(\frac{H\hat{H}}{8\pi}\right)_{\bar{x}}, \qquad r_t = v^{(0.5)}, \qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)_t = v_x^{(0.5)},\\
\left(\frac{H}{\rho}\right)_t = E_x^{(\beta)}, \qquad H_{\bar{x}} = 4\pi\frac{I}{\rho_*}, \qquad I = \sigma_* E, \qquad \text{(II)}\\
\varepsilon_t = -p^{(\alpha)} v_x^{(0.5)} + 0.5\left[\left(\frac{I}{\rho_*}\right)^{(0.5)} E^{(\beta)} + \left(\frac{I(+1)}{\rho_*(+1)}\right)^{(0.5)} E^{(\beta)}(+1)\right].
\end{gathered}$$

Здесь использовано обозначение $y_* = 0.5(y + y(-1))$.

Недивергентное уравнение энергии в схеме (II) алгебраически преобразуется к следующему дивергентному:

$$\left(\varepsilon + 0.25(v^2 + v^2(+1)) + \frac{H^2}{8\pi\rho}\right)_t =$$

$$= -\left[\left(p_*^{(\alpha)} + \frac{(H\hat{H})_*}{8\pi}\right)v^{(0.5)}\right]_x + \left(\frac{H_*^{(0.5)}E^{(\beta)}}{4\pi}\right)_x.$$

Значения параметров $\alpha = \beta = 0.5$ выделяют из семейства (II) единственную полностью консервативную разностную схему для уравнений магнитной гидродинамики со вторым порядком аппроксимации $O(\tau^2 + m^2)$.

5. Полностью консервативные разностные схемы, аппроксимирующие систему уравнений магнитной гидродинамики, были реализованы при расчете сильноточного разряда в плазме [5]. В задаче рассматривались процессы, развивающиеся в плазме в результате разряда через нее батареи конденсаторов. Как показали расчеты, возникает сложное магнитогидродинамическое течение с большими пространственными градиентами и резкими изменениями параметров во времени.

При расчете этой задачи по обычным неявным схемам с недивергентным уравнением энергии [6] наблюдался дисбаланс полной энергии, который в различных вариантах составлял 20—50% от общей энергии системы. Это приводило к физически абсурдному результату: энергия, вышедшая из системы в виде оптического излучения, к концу процесса превышала начальный запас энергии, заключенной в батарее конденсаторов.

Применение полностью консервативных схем устранило этот дефект.

6. Для решения системы неявных уравнений обычно используются итерационные методы, причем процесс итераций продолжается до достижения заданной точности или заданного числа итераций. Это означает, что фактически вместо принятой разностной схемы реализуется некоторая другая схема, зависящая от способа решения разностных уравнений. Эта схема, вообще говоря, не обладает свойством полной консервативности и даже не является консервативной. Поэтому в реальных расчетах дисбалансы уже не будут в точности равны нулю. Их величина зависит от количества проведенных итераций и может служить показателем «доитерированности» схемы.

В силу того что в полностью консервативных разностных схемах соответствующие дивергентные и недивергентные разностные уравнения алгебраически эквивалентны, безразлично с точки зрения выполнения балансных соотношений, какой именно вид уравнения использован в схеме. Однако на практике удобнее пользоваться менее громоздкими недивергентными уравнениями.

Поступила в редакцию 17.12.1969

Цитированная литература

1. Ю. П. Попов, А. А. Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 4, 953—958.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—63.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957 г.
4. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 3, 441—460.
5. П. П. Волосевич, В. Я. Гольдин, Н. Н. Калиткин, С. П. Курдюмов, Ю. П. Попов, В. Б. Розанов, А. А. Самарский, Б. Н. Четверушкин. Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме. IX Междунар. конф. по явлениям в ионизованных газах. Бухарест, 1969.
6. А. А. Самарский, П. П. Волосевич, М. И. Волчинская, С. П. Курдюмов. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 5, 1025—1038.