ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Попов Ю.П. Самарский А.А.

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ И МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Препринт № 16

МОСКВА
1969г

Аннотация

Рассматриваются разностные схемы для решения задач газовой динамики и магнитной гидродинамики. Показано, что существующие схемы имеют недостаток, - в них нарушены балансные соотношения.

Введено понятие полностью консервативных схем, для которых выполняются не только основные законы сохранения - массы, импульса и полной энергии, но и детальный баланс энергии, т.е. баланс по отдельным видам энергии: внутренней, кинетической, магнитной.

Построены полностью консервативные разностные схемы с первым и вторым порядком аппроксимации для систем уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики. Эти схемы могут быть получены, например, с помощью известного интегро-интерполяционного метода при соблюдении некоторого формального правила отбора.

Содержание

Стр.

§ I. Введение 3

§ 2. Анализ схемы "крест" 7

§ 3. Полностью консервативная разностная схема для решения системы уравнений газовой динамики I2

§ 4. Анализ неявной разностной схемы для решения системы одномерных МГД-уравнений I9

§ 5. Полностью консервативная разностная схема для системы МГД-уравнений 24

§ 6. Общий вид полностью консервативной разностной схемы для системы МГД-уравнений 27

Литература 33

§ I. Введение

I. Уравнения в частных производных, к которым сводится описание различных физических процессов, выражают, как правило, некоторые законы сохранения (количества движения, количества тепла, числа частиц и т.д.).

При численных расчетах задач с применением разностных методов система дифференциальных уравнений аппроксимируется разностной схемой, что эквивалентно введению вместо непрерывной среды некоторой ее дискретной модели. Эта модель должна отражать основные свойства непрерывной среды. Поэтому естественно требовать, чтобы в ней в первую очередь выполнялись соответствующие разностные аналоги законов сохранения, т.е. разностная схема была консервативной.

На важность этого обстоятельства в начале 50-х годов обратили внимание А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. В дальнейшем ими был построен пример [I], когда неконсервативная разностная схема, имеющая второй порядок аппроксимации на гладких функциях, расходится для случая разрывного решения дифференциального уравнения.

В [I] сформулирован интегро-интерполяционный метод построения консервативных разностных схем, основанный на использовании интегральных соотношений, выражающих законы сохранения (балансы) для элементарной ячейки сетки.

Подобные методы построения разностных схем применяют и другие авторы [2]-[5].

2. Система уравнений газовой динамики представляет собой выражение трех законов сохранения - массы, импульса и энергии.

Считается, что для построения консервативной разностной схемы решения уравнений гидродинамики достаточно аппроксимировать эти три балансных соотношения. Это несложно сделать, записав, например, систему разностных уравнений в дивергентной форме. Видимо, поэтому часто отождествляют понятия консервативности и дивергентности схемы.

Однако, здесь есть принципиальный момент, на который, насколько нам известно, до сих пор не обращалось внимания.

В системе уравнений газовой динамики или магнитной гидродинамики уравнение энергии может быть записано в одном из двух видов - дивергентном или недивергентном, т.е. "энтропийном". В дифференциальной форме оба эти вида полностью эквивалентны и могут быть сведены друг к другу с помощью остальных уравнений. Поэтому для системы дифференциальных уравнений одновременно справедливы и следуют друг из друга как закон сохранения полной энергии, так и баланс внутренней энергии (энтропийный баланс).

Для системы разностных уравнений положение несколько иное. Разностное уравнение энергии, записанноа в недивергентном виде, вообще говоря, не может быть с использованием остальных разностных уравнений строго сведено к дивергентному разностному виду. В ходе преобразования появляются остаточные члены, приводящие к нарушению закона сохранения полной энергии.

Использование в разностной схеме дивергентного уравнения вызывает аналогичные трудности - при выполненном законе сохранения полной энергии оказываются нарушенными балансы для отдельных видов энергии - внутренней и кинетической.

В качестве примера в работе рассматривается известная в газодинамике схема "крест" [3]. Для нее вычислены энергетические дисбалансы как в недивергентном, так и в дивергентном видах

уравнения энергии. Величина дисбаланса не зависит от густоты пространственной сетки и поэтому не может быть существенно уменьшена путем измельчения шага сетки по пространству.

Подобными дефектами обладают и другие разностные схемы, широко применяющиеся для расчета задач газовой динамики (см., например, [2]-[5], и гл. Ш в [6], где дан обзор по численным методам газодинамики).

Наличие в разностной схеме энергетического дисбаланса можно трактовать как присутствие в схеме некоторых источников и стоков энергии чисто разностного происхождения. На гладких решениях "мощность" этих источников невелика и их влияние на ход изучаемого процесса мало. Однако, на сильно меняющихся решениях интегральный вклад фиктивных источников может стать сравнимым с полной энергией и существенно исказить характер явления.

Сильное влияние дисбалансов энергии на решение было отмечено при расчете системы уравнений магнитной гидродинамики, где появляется еще один вид энергии - магнитной, и где соответственно должно быть выполнено еще одно энергетическое балансное соотношение.

3. В работе рассматривается новый тип разностных схем, для которых выполняются не только законы сохранения массы импульса и энергии, но и детальный баланс энергии, т.е. баланс по отдельным видам энергии - внутренней, кинетической, магнитной. При этом выполнение разностных балансов гарантировано независимо от степени гладкости решения, ибо они получаются как алгебраические следствия системы разностных уравнений.

Схемы, обладающие таким свойством, названы полностью консервативными разностными схемами. Такие схемы могут быть получены, например, с помощью интегро-интерполяционного метода [I]

при соблюдении некоторого формального правила отбора. Это правило заключается в следующем: полностью консервативные разностные схемы должны обладать тем же свойством, что и исходная система дифференциальных уравнений, а именно: недивергентное разностное уравнение энергии с использованием остальных разностных уравнений должно сводиться к дивергентному разностному уравнению и наоборот.

В работе построены полностью консервативные разностные схемы для численного решения систем газодинамических и магнитогидродинамических уравнений. Схемы имеют второй порядок аппроксимации по времени и пространству. Схемы опробованы на задачах магнитной гидродинамики и дали хорошие результаты.

4. Для проверки качества разностных схем часто используют уравнения акустики. Заметим, что эффекты, связанные с неполной консервативностью схем, не могут быть выявлены в этом приближении, где фактически выпадает уравнение энергии.

В работе не рассматриваются вопросы устойчивости построенных разностных схем. Ясно, что эти схемы устойчивы в силу их неявности.

Все рассмотрения проведены для систем одномерных уравнений в лагранжевой форме. Однако, сформулированные принципы построения полностью консервативных разностных схем переносятся и на многомерный случай, а также на случай уравнений в эйлеровых переменных.

Описанные в литературе разностные схемы для решения задач газовой динамики и магнитной гидродинамики (см.,например,[2]-[6], [11]), не обладающие свойством полной консервативности, могут быть подправлены, так, что станут полностью консервативными.

Авторы благодарны П.Н. Волосевичу и С.П. Курдюмову за полезные обсуждения.

§ 2. Анализ схемы "крест".

Для численного решения системы одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.4}$$

I

часто применяется классическая разностная схема "крест" [3]

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -\frac{p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}}{m}, \tag{2.5}$$

$$\frac{r_i^{j+1} - r_i^j}{\tau} = v_i^{j+1}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+3/2} - \eta_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{\tau} = -p_{i+1/2}^{j+3/2}\,\frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m}. \tag{2.8}$$

II

Система дифференциальных уравнений I записана для плоского случая в лагранжевых массовых координатах. Использованы обозначения: t – время, r – эйлерова координата, η – удельный объем, x $(dx = \eta^{-1} dr)$ – лагранжева массовая координата, p – давление, ε – внутренняя энергия газа, v – продольная компонента скорости.

Система разностных уравнений II, аппроксимирующая исходную систему I, записана на равномерной сетке $\{x_i, t^j\}$, $x_{i+1} = x_i + m$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $t^{j+1} = t^j + \tau$, $j = 0, 1, \ldots$, которая введена в рассматриваемой области пространства x, t. Значения сеточных функций радиуса r_i^j и скорости v_i^j относятся к "целым" точкам сетки (узлам) (x_i, t^j); значения сеточных функций давления $p_{i+1/2}^{j+1/2}$,

удельного объема $\eta_{i+1/2}^{j+1/2}$ и внутренней энергии $\varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}$ к "полуцелым" точкам $(x_{i+1/2}, t^{j+1/2})$.

Нетрудно видеть, что разностные уравнения (2.6) и (2.7) эквивалентны очевидному с физической точки зрения соотношению

$$(2.9) \qquad \eta_{i+1/2}^{j+3/2} = \frac{r_{i+1}^{j+1} - r_i^{j+1}}{m}.$$

Это соотношение гарантирует для разностной схемы П выполнение закона сохранения массы. В расчетах оно часто используется для определения удельного объема вместо уравнения неразрывности(2.7).

Для разностной схемы П справедлив также закон сохранения импульса, что следует из дивергентного вида записи уравнения движения (2.5).

Уравнение энергии (2.8) записано в т.н. "энтропийном" виде и является недивергентным.

Исследуем вопрос о сохранении полной энергии в схеме П.

Мы будем пользоваться следующими безиндексными обозначениями для сеточных функций [7], [8]

$$(2.10) \qquad y_i^j = y, \quad y_{i+1/2}^{j+1/2} = \bar{y}, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y_{i+1/2}^{j+3/2} = \hat{\bar{y}},$$

$$(2.11) \qquad \frac{\hat{y} - y}{\tau} = y_t,$$

$$(2.12) \qquad \frac{y_{i+1} - y_i}{m} = y_x, \quad \frac{y_i - y_{i-1}}{m} = y_{\bar{x}},$$

$$(2.13) \qquad \sum_{i=1}^{N-1} y_i u_i m = (y,u), \quad \sum_{i=0}^{N-1} y_i u_i m = [y,u), \quad \sum_{i=0}^{N} y_i u_i m = [y,u].$$

Будет использоваться также формула разностного суммирования

$$(2.14) \qquad [y, u_x) = -[y_{\bar{x}}, u] + y_N u_N - y_{-1} u_0.$$

В обозначения (2.10)-(2.12) система разностных уравнений П имеет более компактный вид

$$(2.5') \qquad v_t = -\bar{p}_{\bar{x}},$$

$$(2.6') \qquad \tau_t = \hat{v}, \qquad \bar{\text{II}}'$$

$$(2.7') \qquad \bar{\eta}_t = \hat{v}_x,$$

$$(2.8') \qquad \bar{\varepsilon}_t = -\hat{\bar{p}}\,\hat{v}_x.$$

Используя обозначения (2.13), просуммируем уравнение энергии (2.8′) и применим затем формулу (2.14).

$$(2.15) \quad [\bar{\varepsilon}_t, 1) = -[\hat{\bar{p}}, \hat{v}_x) = [\bar{p}_{\bar{x}}, \hat{v}] - \hat{\bar{p}}_N \hat{v}_N + \hat{\bar{p}}_{-1} \hat{v}_0.$$

В (2.15) под формально введенными величинами $\bar{p}_N$ и $\bar{p}_{-1}$ понимаются значения давления в граничных узлах сетки, соответственно производные $\bar{p}_{\bar{x}}$ в крайних точках вычисляются для половинного пространственного интервала $0{,}5m$.

Умножим теперь уравнение (2.5′) на $\hat{v}$ и просуммируем по всем пространственным узлам

$$(2.16) \quad [\hat{v}, v_t] = -[\bar{p}_{\bar{x}}, \hat{v}] = -[(\hat{\bar{p}} - 0{,}5\tau \bar{p}_t)_{\bar{x}}, \hat{v}] =$$

$$= -[\hat{\bar{p}}_{\bar{x}}, \hat{v}] + 0{,}5\tau [\bar{p}_{t\bar{x}}, \hat{v}].$$

Принимая во внимание тождество

$$(2.17) \qquad \hat{v}\, v_t = 0{,}5 (v^2)_t + 0{,}5\tau v_t^2,$$

и (2.16) с (2.15), получим

$$(2.18) \quad [\bar{\varepsilon}, 1)_t + 0{,}5 [v^2, 1]_t + \hat{\bar{p}}_N \hat{v}_N - \hat{\bar{p}}_{-1} \hat{v}_0 = 0{,}5\tau \left\{ [\bar{p}_{t\bar{x}}, \hat{v}] - [v_t^2, 1] \right\}.$$

Просуммировав последнее равенство по времени на отрезке $[t^{j_1}, t^{j_2}]$, приходим к разностному аналогу интегрального закона сохранения энергии

$$(2.19) \quad [\bar{\varepsilon}, 1)\Big|_{j_1}^{j_2} + 0{,}5 [v^2, 1]\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \left\{ \hat{\bar{p}}_N \hat{v}_N - \hat{\bar{p}}_{-1} \hat{v}_0 \right\} = \Delta E,$$

$$(2.20) \qquad \Delta E = 0{,}5\tau^2 \sum_{j=j_1}^{j_2} \left\{ [\bar{p}_{t\bar{x}}, \hat{v}] - [v_t^2, 1] \right\}.$$

Как видно, этот закон нарушается. Дисбаланс полной энергии ΔE накапливается со временем и имеет на гладких решениях порядок $O(\tau)$.

При этом баланс внутренней энергии ("энтропийный" баланс)

(2.21). $$[\bar{\varepsilon},1)\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} [\hat{\bar{p}},\hat{v}_x) = 0$$

строго выполнен, что можно получить "разностно интегрируя" по времени и пространству уравнение энергии (2.8′). Таким образом, в схеме "крест" плохо аппроксимируется баланс кинетической энергии.

Отметим, что величина ΔE не зависит от шага сетки по массе; поэтому измельчение пространственной сетки не приводит к заметному уменьшению дисбаланса.

Из (2.20) следует, также, что величина дисбаланса зависит от характера решения и может стать особенно большой на разрывных и сильноменяющихся решениях.

Наличие в схеме П дисбаланса полной энергии связано с недивергентностью вида записи уравнения энергии (2.8′). Но замена (2.8′) дивергентным уравнением, например, в виде

(2.8″) $$\bar{\varepsilon}_t + 0{,}25\left(v^2 + v(+1)^2\right)_t = -\left(\hat{\bar{p}}_* \hat{v}\right)_x ,$$

где $v(+1) = v_{i+1}$, $\bar{p}_* = 0{,}5(\bar{p}_{i+1/2} + \bar{p}_{i-1/2})$,

приводит к подобным же трудностям. Конечно, закон сохранения полной энергии теперь будет выполнен. Однако, нарушится "энтропийный" баланс, в чем нетрудно убедиться, повторив выкладки. Несмотря на сохранение полной энергии, баланс внутренней, а следовательно, и кинетической энергии в отдельности не соблюдается. Это означает, что, например, температура определяется с погрешностью.

Последнее обстоятельство может оказаться существенным, ес-

ли в изучаемом явлении присутствуют процессы, сильно зависящие от температуры (электропроводность, теплопроводность и т.д.).

Таким образом, можно сделать вывод: в дифференциальной форме дивергентный и недивергентный вид уравнения полностью эквивалентны и с помощью остальных уравнений сводятся друг к другу. В разностных схемах такой факт, вообще говоря, места не имеет, что служит причиной появления в схеме энергетического дисбаланса.

Заметим, что в расчетах часто при использовании недивергентного уравнения энергии, балано полной энергии рассматривается как критерий точности схемы. Однако, такой способ не всегда может дать верное представление о качестве схемы. Действительно, взяв в уравнении (2.8′) вместо значения $\hat{\bar{p}}$ на верхнем временном слое интерполяцию $0{,}5(\bar{p}+\hat{\bar{p}})$, а в уравнении движения (2.6′) $0{,}5(v+\hat{v})$, мы получим схему со вторым порядком аппроксимации. В то же время величина дисбаланса энергии составит $O(\tau)$.

§ 3. Полностью консервативная разностная схема для решения системы уравнений газовой динамики.

I. Рассмотрим следующую разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений газовой динамики I.

$$(3.1)\qquad \frac{v_i^{j+1}-v_i^j}{\tau} = -\sigma_1\frac{p_{i+1/2}^{j+1}-p_{i-1/2}^{j+1}}{m} - (1-\sigma_1)\frac{p_{i+1/2}^{j}-p_{i-1/2}^{j}}{m},$$

$$(3.2)\qquad \frac{\tau_i^{j+1}-\tau_i^j}{\tau} = \sigma_2 v_i^{j+1} + (1-\sigma_2)v_i^j, \qquad \overline{\underline{III}}$$

$$(3.3)\qquad \frac{\eta_{i+1/2}^{j+1}-\eta_{i+1/2}^{j}}{\tau} = \sigma_3\frac{v_{i+1}^{j+1}-v_i^{j+1}}{m} + (1-\sigma_3)\frac{v_{i+1}^{j}-v_i^{j}}{m},$$

$$(3.4)\qquad \frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1}-\varepsilon_{i+1/2}^{j}}{\tau} = -\left[\sigma_1 p_{i+1/2}^{j+1}+(1-\sigma_1)p_{i+1/2}^{j}\right]\left[\sigma_4\frac{v_{i+1}^{j+1}-v_i^{j+1}}{m}+(1-\sigma_4)\frac{v_{i+1}^{j}-v_i^{j}}{m}\right].$$

В отличие от схемы II здесь все сеточные функции отнесены к одним и тем же временным слоям. Параметры $0\leq\sigma_k\leq 1$ (k = I,2,3, 4) суть весовые множители, при помощи которых можно осуществить тот или иной вид интерполяции по времени для соответствующих членов уравнений.

В обозначениях предыдущего параграфа систему III можно переписать в виде

$$(3.1')\qquad v_t = -p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)},$$

$$(3.2')\qquad \tau_t = v^{(\sigma_2)}, \qquad \overline{\underline{III}}'$$

$$(3.3')\qquad \eta_t = v_x^{(\sigma_3)},$$

$$(3.4')\qquad \varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)}v_x^{(\sigma_4)},$$

где $f^{(\sigma)} = \sigma\hat{f} + (1-\sigma)f$, $f = f^j$, $\hat{f} = f^{j+1}$.

Черта над функциями p, η, ε, означающая сдвиг по пространству на половину интервала в "полуцелую" точку, опущена.

Исследуем вопрос, при каких значениях параметров σ_k в схе-

ме Ш будут выполнены разностные аналоги законов сохранения.

А. Закон сохранения массы.

Продифференцируем разностно по x уравнение (3.2′) и преобразуем правую часть получившегося равенства с помощью тождества (3.5)

$$f^{(\beta)} = f^{(\alpha)} + (\beta - \alpha)\tau f_t \tag{3.5}$$

и уравнения неразрывности.

Получим

$$\eta_{tx} = v_x^{(\sigma_2)} = v_x^{(\sigma_3)} + (\sigma_3 - \sigma_2)\tau v_{xt} = \eta_t + (\sigma_3 - \sigma_2) v_{xt} .$$

Отсюда вытекает, что только при условии

$$\sigma_3 = \sigma_2 \tag{3.6}$$

справедлива формула $\eta = \eta_x$ для определения удельного объема, которая обеспечивает соблюдение закона сохранения массы.

Б. Закон сохранения импульса.

Выполнение этого закона следует непосредственно из дивергентного вида записи уравнения движения (3.I′).

В. Закон сохранения полной энергии.

Повторим последовательно выкладки, проведенные в § 2.

Просуммируем уравнение энергии по всем массовым интервалам и учтем (2.I4):

$$[\varepsilon, 1)_t = -[p^{(\sigma_1)}, v_x^{(\sigma_4)}) = [p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)}, v^{(\sigma_4)}] - p_N^{(\sigma_1)} v_N^{(\sigma_4)} + p_{-1}^{(\sigma_1)} v_0^{(\sigma_4)} . \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.I′) после умножения на $v^{(\sigma_4)}$ и суммирования по узлам сетки, следует

$$[v^{(\sigma_4)}, v_t] = -[p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)}, v^{(\sigma_4)}] . \tag{3.8}$$

Далее нетрудно проверить справедливость разностного тождества

$$v^{(\sigma)} = 0{,}5(v + \hat{v}) + (\sigma - 0{,}5)\tau v_t$$

и следствия из него

$$v^{(\sigma)} v_t = 0{,}5 (v^2)_t - (0{,}5 - \sigma) \tau v_t^2$$

Подставляя все это в (3.7), имеем следующий баланс полной энергии за промежуток времени $[t^{j_1}, t^{j_2}]$.

$$(3.9) \quad [\varepsilon, 1)\Big|_{j_1}^{j_2} + 0{,}5 [v^2, 1]\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} \left\{ p_N^{(\sigma_1)} v_N^{(\sigma_4)} - p_{-1}^{(\sigma_1)} v_0^{(\sigma_4)} \right\} = \Delta E_1 ,$$

$$\Delta E_1 = (0{,}5 - \sigma_4) \tau^2 \sum_{j=j_1}^{j_2} [v_t^2, 1] .$$

Таким образом, чтобы обеспечить в схеме Ш строгое выполнение закона сохранения полной энергии, необходимо потребовать

$$(3.10) \qquad \sigma_4 = 0{,}5 .$$

Кроме того, из самого процесса вывода формулы (3.9) ясно, что интерполяция по времени сеточной функции давления в уравнениях (3.I′) и (3.4′) должна быть одинаковой. В противном случае в (3.9) появится дополнительный дисбалансный член.

Г. Баланс внутренней энергии ("энтропийный" баланс).

Этот баланс в схеме Ш соблюдается в силу использования энтропийного вида уравнения энергии. Балансное соотношение выглядит следующим образом:

$$(3.11) \quad [\varepsilon, 1)\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} [p^{(\sigma_1)}, v_x^{(\sigma_4)}) = 0 .$$

Будем называть разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений газовой динамики, полностью консервативной, если для нее выполняются законы сохранения массы, импульса, полной энергии, а также детальный баланс энергии, т.е. баланс для отдельных видов энергии - внутренней и кинетической.

Для того, чтобы схема Ш была полностью консервативна, достаточно выполнения условий

$$(3.12) \qquad \sigma_4 = 0{,}5 \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_2 .$$

Итак, существует двухпараметрическое (со свободными пара-

метрами σ_1 и σ_2) семейство полностью консервативных разностных схем.

В схеме Ш производные по x аппроксимируются центральными разностями, поэтому схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству $O(m)$.

Если в дополнение к (3.I2) мы положим

(3.I3) $\sigma_1 = 0{,}5$, $\sigma_2 = 0{,}5$,

то схема будет иметь второй порядок аппроксимации и по времени $O(\tau^2)$.

Условия (3.I2) и (3.I3) определяют единственную полностью консервативную разностную схему с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + m^2)$

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -0{,}5\left\{\frac{p_{i+1/2}^{j+1} - p_{i-1/2}^{j+1}}{m} + \frac{p_{i+1/2}^{j} - p_{i-1/2}^{j}}{m}\right\},$$

$$\frac{r_i^{j+1} - r_i^j}{\tau} = 0{,}5\left\{v_i^{j+1} + v_i^j\right\},$$

$$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_{i+1/2}^{j}}{\tau} = 0{,}5\left\{\frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m} + \frac{v_{i+1}^{j} - v_i^{j}}{m}\right\},$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \varepsilon_{i+1/2}^{j}}{\tau} = -0{,}25\left[p_{i+1/2}^{j+1} + p_{i-1/2}^{j}\right]\left\{\frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{m} + \frac{v_{i+1}^{j} - v_i^{j}}{m}\right\}$$

2. Для получения консервативных разностных схем применяется, например, интегро-интерполяционный метод или метод баланса [I]. Сущность этого метода состоит в том, что разностные уравнения строятся не на основе дифференциальных уравнений, а исходя из интегральных соотношений, выражающих законы сохранения для элементарной ячейки сетки. При этом в окрестности узла сетки вводится определенная интерполяция искомого решения и коэффициентов уравнения, от вида которой будет существенно зависеть полученная разностная схема.

Построенная выше полностью консервативная разностная схема также может быть получена интегро-интерполяционным методом.

Покажем это на примере уравнения энергии (3.4′). Оно записано в недивергентном виде, но при условии (3.10) является консервативным и потому эквивалентно некоторому дивергентному уравнению энергии.

Действительно, запишем интегральный закон сохранения полной энергии для массового интервала $[x_i, x_{i+1}]$ для промежутка времени $[t^j, t^{j+1}]$

$$(3.14)\quad \int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial(pv)}{\partial x}\right\}dx\,dt = 0.$$

Примем следующий способ вычисления интегралов

$$(3.15)\quad \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varepsilon\,dx = m\,\varepsilon_{i+1/2}\,,\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{v^2}{2}\,dx = m\,\frac{v_{i+1}^2+v_i^2}{4}\,,$$

$$(3.16)\quad \int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial(pv)}{\partial x}\,dx\,dt = \tau\left\{\overset{*}{p}{}_{i+1}^{(0,5)}\,v_{i+1}^{(0,5)} - \overset{*}{p}{}_i^{(0,5)}\,v_i^{(0,5)}\right\}.$$

Под величиной $\overset{*}{p}$ понимается интерполяция давления в узловую точку сетки, вычисленная по значениям в соседних полуцелых точках

$$\overset{*}{p}_i = 0{,}5\left(p_{i+1/2}+p_{i-1/2}\right).$$

Соотношение (3.14) порождает следующее дивергентное разностное уравнение энергии

$$(3.17)\quad \varepsilon_t = -\,0{,}25\left(v^2+v(+1)^2\right)_t - \left(\overset{*}{p}{}^{(0,5)}\,v^{(0,5)}\right)_x\,.\ ^{1)}$$

Использовано обозначение:

$$(3.18)\quad f(+1) = f_{i+1}\,,\qquad f(-1) = f_{i-1}.$$

Уравнение (3.17), как легко проверить, оказывается в точности эквивалентным "энтропийному" виду уравнения энергии (3.4′) при условии (3.12), (3.13) и сводится к нему с помощью остальных уравнений (3.1′)–(3.3′).

Действительно, из (3.1′) имеем:

1) Эта схема была получена также В.Я. Гольдиным и Н.Н.Калиткиным.

$$-\overset{(0,5)}{p_{\bar{x}}}\,\overset{(0,5)}{v} = v_t\,\overset{(0,5)}{v} = 0{,}5(v^2)_t$$

$$-\overset{(0,5)}{p_{\bar{x}}}(+1)\,\overset{(0,5)}{v}(+1) = 0{,}5(v(+1)^2)_t$$

Беря полусумму этих равенств, и складывая ее с (3.17), получаем (3.4′).

Меняя в (3.14) способ вычисления интегралов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v^2}{2}\,dx = m\,\frac{v_i^2}{2},$$

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial(pv)}{\partial x}\,dx\,dt = \tau\left\{\overset{(0,5)}{p_{i+1/2}}\,\overset{(0,5)}{v_{i+1}} - \overset{(0,5)}{p_{i-1/2}}\,\overset{(0,5)}{v_i}\right\},$$

получаем несколько иной вид дивергентного разностного уравнения энергии.

$$\varepsilon_t = -0{,}5(v^2)_t - \left(\overset{(0,5)}{p}(-1)\,\overset{(0,5)}{v}\right)_x \tag{3.19}$$

Можно предложить и еще один вариант

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{v^2}{2}\,dx = m\,\frac{v_{i+1}^2}{2},$$

$$\int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial(pv)}{\partial x}\,dx\,dt = \tau\left\{\overset{(0,5)}{p_{i+3/2}}\,\overset{(0,5)}{v_{i+1}} - \overset{(0,5)}{p_{i+1/2}}\,\overset{(0,5)}{v_i}\right\},$$

$$\varepsilon_t = -0{,}5\left(v(+1)^2\right)_t - \left(\overset{(0,5)}{p}\,\overset{(0,5)}{v}\right)_x. \tag{3.20}$$

Дивергентные уравнения (3.19) и (3.20) также эквивалентны энтропийному уравнению (3.4′).

Очевидно, что разностная схема, полученная из Ш заменой уравнения энергии (3.4′) на (3.17), также будет полностью консервативной. Это же можно сказать и относительно формул (3.19), (3.20), с той лишь разницей, что нужно по иному суммировать кинетическую энергию, и по иному определять работу сжатия.

Следует отметить любопытный факт: уравнения (3.19) и (3.20) в силу эквивалентности уравнению (3.4′) имеют второй порядок аппроксимации по τ и m (при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}5$). В то же время отдельные

лены в этих уравнениях аппроксимированы с первым порядком по m

3. Обычно для обеспечения сквозного счета возможных ударных волн в разностную схему вводится псевдовязкость [8]. Она входит в уравнения движения (3.I) и энергии (3.4) как добавок к газокинетическому давлению $p+\omega$

Все полученные в параграфе результаты легко обобщаются и на этот случай, достаточно лишь в выкладках вместо p рассматривать величину $g=p+\omega$.

Заметим, что при построении полностью консервативных разностных схем, нельзя аппроксимировать дифференциальные уравнения исходной системы независимо друг от друга.

Разностные уравнения должны быть согласованы так, чтобы обеспечить выполнение необходимых балансных соотношений.

§ 4. Анализ неявной разностной схемы для решения системы одномерных МГД уравнений.

I. Система одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики (МГД-уравнений) для плоского случая при отсутствии продольной компоненты магнитного поля в лагранжевых массовых координатах имеет вид [10]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F, \qquad F = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial x}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial (H\eta)}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}, \tag{4.4}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\sigma\eta}\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial x} + Q, \quad Q = \sigma\eta E^2. \tag{4.6}$$

IV

В дополнение к предыдущим параграфам использованы обозначения: σ – электропроводность среды, H, E – поперечные компоненты соответственно магнитного и электрического полей, F – электромагнитная сила, Q – джоулево тепло.

В уравнении энергии (4.6) опущены члены, соответствующие процессам теплопереноса. Они имеют дивергентный вид и на рассматриваемые ниже эффекты, связанные с дисбалансом энергии, не влияют.

Типичный способ численного решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики заключается в аппроксимации системы IУ однородными неявными разностными схемами, которые решаются методом прогонки (см., например, [II]).

В обозначениях § 2 чисто неявная схема, аппроксимирующая систему IУ, выглядит следующим образом:

$$(4.1') \quad \vartheta_t = -\hat{p}_{\bar{x}} + \hat{F}, \qquad F = -\frac{1}{8\pi}(H^2)_{\bar{x}},$$

$$(4.2') \quad r_t = \hat{\vartheta},$$

$$(4.3') \quad \eta_t = \hat{\vartheta}_x, \qquad \overline{\underline{IV}}'$$

$$(4.4') \quad (H\eta)_t = \hat{E}_x,$$

$$(4.5') \quad E = \frac{1}{2\pi(\tilde{\sigma}+\tilde{\sigma}(-1))} H_{\bar{x}}$$

$$(4.6') \quad \varepsilon_t = -\hat{p}\hat{\vartheta}_x + \hat{Q}, \quad Q = 0{,}5\tilde{\sigma}[E^2 + E(+1)^2].$$

Как и в предыдущих параграфах, разностная схема записана для равномерной сетки. В дополнение к § 2 укажем, что сеточные функции магнитного поля H, электропроводности σ, и джоулева нагрева Q относятся к "полуцелым" массовым точкам $(x_{i+1/2}, t^j)$, а электрическое поле E и электрические силы F – к "целым" (x_i, t^j).

В уравнении поля (4.5′) введена интерполяция величины $\tilde{\sigma} = \sigma\eta$ из "полуцелых" точек в узлы. Напомним обозначение $\tilde{\sigma}(-1) = \sigma_{i-1}$, $E(+1) = E_{i+1}$. Рассмотрим вопрос о справедливости разностных законов сохранения. Очевидно, для схемы IУ законы сохранения массы и импульса выполнены. Соблюдается разностное балансное соотношение и для электромагнитного поля, т.к. соответствующее уравнение (4.4′) имеет дивергентный вид.

Для схемы IУ соблюдается также "энтропийный" баланс. Исследуем вопрос о законе сохранения полной энергии.

Просуммируем уравнение (4.6′) по всем массовым интервалам

$$(4.7) \quad [\varepsilon,1)_t = -[\hat{p},\hat{\vartheta}_x) + [\hat{Q},1) = [\hat{p}_{\bar{x}},\hat{\vartheta}] - \hat{p}_N\hat{\vartheta}_N + \hat{p}_{-1}\hat{\vartheta}_0 + [\hat{Q},1)$$

Как и прежде, под формально введенными величинами p_N и p_{-1} понимаются значения давления в граничных узлах сетки.

Умножим уравнение (4.1′) на $\hat{\vartheta}$ и затем просуммируем по

всем узлам сетки. Учитывая далее (2.I7), имеем

$$(4.8)\quad -[\hat{p}_{\bar{x}},\hat{v}]+[\hat{F},\hat{v}]=[\hat{v},v_t]=0{,}5[v^2,1]_t+0{,}5\tau[v_t^2,1].$$

Принимая во внимание последнее соотношение, преобразуем (4.7)

$$(4.9)\quad [\varepsilon,1)_t+0{,}5[v^2,1]_t+\hat{p}_N\hat{v}_N-\hat{p}_{-1}\hat{v}_0-[\hat{Q},1)-[\hat{F},\hat{v}]=\Delta E_1$$

где

$$(4.10)\qquad \Delta E_1=-0{,}5\tau[v_t^2,1].$$

Преобразуем выражение для джоулева нагрева при помощи уравнения (4.5′) и формулы (2.I4)

$$(4.11)\qquad [\hat{Q},1)=0{,}5\left[\hat{\tilde{\sigma}},\hat{E}^2+\hat{E}(+1)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\hat{\tilde{\sigma}},\frac{\hat{E}\hat{H}_{\bar{x}}}{\hat{\tilde{\sigma}}+\hat{\tilde{\sigma}}(-1)}+\frac{\hat{E}(+1)\hat{H}_{\bar{x}}(+1)}{\hat{\tilde{\sigma}}(+1)+\hat{\tilde{\sigma}}}\right)=\frac{1}{4\pi}[\hat{E},\hat{H}_{\bar{x}}]=$$

$$=\frac{\hat{E}_N\hat{H}_N}{4\pi}-\frac{\hat{E}_0\hat{H}_{-1}}{4\pi}-\frac{1}{4\pi}[\hat{E}_x,\hat{H}).$$

Используя далее формулу разностного дифференцирования

$$(4.12)\qquad (H^2\eta)_t=2H^{(0,5)}(H\eta)_t-H\hat{H}\eta_t,$$

а также уравнение поля (4.4′) и уравнения неразрывности (4.3′), выразим последний член в (4.II) следующим образом

$$(4.13)\quad \frac{1}{4\pi}[\hat{E}_x,\hat{H})=\frac{1}{8\pi}[H^2,\eta)_t+\frac{1}{8\pi}[H\hat{H},\hat{v}_x)+\frac{\tau}{8\pi}[H_t,\hat{E}_x).$$

Опуская подробности вывода, приведем соотношение для преобразования члена с электромагнитными силами

$$(4.14)\quad [\hat{F},\hat{v}]=-\frac{1}{8\pi}[(\hat{H})^2_{\bar{x}},\hat{v}]=\frac{1}{8\pi}[H\hat{H},\hat{v}_x)-\frac{H_N\hat{H}_N}{8\pi}\hat{v}_N+$$

$$+\frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}\hat{v}_0-\frac{\tau}{8\pi}[\hat{v},(HH_t)_{\bar{x}}].$$

Под H_N и H_{-1} понимается значение напряженности магнитного поля в граничных узлах сетки.

Подставляя (4.14), (4.13), (4.11) в (4.9), и суммируя полученное выражение по времени на промежутке $[t^{j_1}, t^{j_2}]$, мы приходим к выражению

$$(4.15)\quad [\varepsilon,1)\Big|_{j_1}^{j_2}+0{,}5[v^2,1]\Big|_{j_1}^{j_2}+\left[\frac{H^2\eta}{8\pi},1\right)\Big|_{j_1}^{j_2}+\tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\left\{\left[\hat{p}_N+\frac{H_N\hat{H}_N}{8\pi}\right]\hat{v}_N-\right.$$

$$\left.-\left[p_{-1}+\frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}\right]\hat{v}_0\right\}-\tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\left\{\frac{\hat{E}_N\hat{H}_N}{4\pi}-\frac{\hat{E}_0\hat{H}_{-1}}{4\pi}\right\}=\Delta E_1+\Delta E_2+\Delta E_3=\Delta E,$$

где

$$\Delta E_1=-0{,}5\tau^2\sum_{j=j_1}^{j_2}[v_t^2,1],$$

$$(4.16)\qquad \Delta E_2=-\frac{\tau^2}{8\pi}\sum_{j=j_1}^{j_2}[H_t,(H\eta)_t),$$

$$\Delta E_3=-\frac{\tau^2}{8\pi}\sum_{j=j_1}^{j_2}[\hat{v},(HH_t)_{\bar{x}}].$$

Итак, закон сохранения полной энергии для схемы IУ нарушен. Дисбаланс энергии ΔE образуют как чисто газодинамические ΔE_1 и чисто электромагнитные ΔE_2 члены, так и члены, обязанные своим происхождением гидромагнитным взаимодействиям ΔE_3. Величина дисбаланса и его знак определяется характером самого решения.

Как и в чисто газодинамическом случае (§ 2), в схеме IУ дисбаланс энергии не зависит от густоты сетки по пространству. При измельчении сетки по времени величина ΔE уменьшается как $O(\tau)$. Как и в чисто газодинамическом случае положение существенно не улучшится, если "энтропийное" уравнение (4.5′) заменить дивергентным уравнением энергии, например, в форме

$$(4.17)\quad \varepsilon_t=-0{,}25(v^2+v(+1)^2)_t-\frac{1}{8\pi}(H^2\eta)_t-$$

$$-(\hat{p}\hat{v})_x+\frac{1}{4\pi}(\hat{E}\hat{H})_x.$$

Величины $\overset{*}{p}$ и $\overset{*}{H}$ обозначают интерполяцию соответствующей сеточной функции из полуцелой точки в узловую

$$\overset{*}{p} = 0{,}5(p_{i+1/2} + p_{i-1/2}), \quad \overset{*}{H} = 0{,}5(H_{i+1/2} + H_{i-1/2}).$$

Дивергентность уравнения (4.I7) гарантирует в схеме выполнение закона сохранения полной энергии. Однако, попытка выразить на основе (4.I7) и остальных разностных уравнений (4.I′) - (4.5′) баланс для внутренней энергии, приводит к равенству:

(4.I8) $$[\varepsilon, 1)\Big|_{j_1}^{j_2} + \tau \sum_{j=j_1}^{j_2} [\hat{p}, v_x^{(0,5)}) - 0{,}5\tau \sum_{j=j_1}^{j_2} [\hat{E}, (E(\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}(-1)))^{(0,5)}] =$$

$$= \Delta E_1' + \Delta E_2' + \Delta E_3' = \Delta E',$$

где

(4.I9) $$\Delta E_1' = -0{,}5\tau^2 \sum_{j=j_1}^{j_2} \{\hat{p}_N (v_N)_t - \hat{p}_{-1} (v_0)_t\},$$

$$\Delta E_2' = \frac{\tau^2}{8\tilde{\kappa}} \sum_{j=j_1}^{j_2} \{\hat{E}_N (H_N)_t - \hat{E}_0 (H_{-1})_t\},$$

$$\Delta E_3' = -\frac{\tau^2}{8\tilde{\kappa}} \sum_{j=j_1}^{j_2} [\hat{H} H_t, \eta_t).$$

Приведенная формула свидетельствует о невыполнении детального баланса энергии, т.е. о плохой аппроксимации отдельных видов энергии - внутренней, кинетической и магнитной. Такой дефект разностной схемы не менее опасен, нежели нарушение закона сохранения полной энергии. В частности, по этой причине в расчетах наблюдались эффекты уменьшения внутренней энергии некоторой массы газа на стадии сжатия в присутствии джоулева нагрева.

Особенно недопустимы подобные эффекты при наличии в системе процессов, являющихся сильными функциями температуры (электропроводности, теплопроводности и т.д.).

§ 5. Полностью консервативная разностная схема для системы МГД уравнений

По аналогии с § 3 рассмотрим следующее семейство разностных схем, аппроксимирующих систему одномерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики IУ

(5.1) $$v_t = -p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)} + F,$$

(5.2) $$z_t = v^{(\sigma_2)},$$

(5.3) $$\eta_t = v_x^{(\sigma_3)},$$

(5.4) $$(H\eta)_t = E_x^{(\sigma_4)},$$

(5.5) $$E = \frac{1}{2\pi(\tilde{\sigma}+\tilde{\sigma}(-1))} H_{\bar{x}},$$

(5.6) $$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_5)} v_x^{(\sigma_6)} + Q.$$

Здесь $f^{(\sigma)} = \sigma\hat{f} + (1-\sigma)f$,

Величины $0 \le \sigma_k \le 1$, $k = 1,\dots,6$ суть параметры, варьируя которые можно получить различные разностные схемы. В частности, при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 1$ получаем чисто неявную схему IУ, рассмотренную в предыдущем параграфе.

Повторяя выкладки, проведенные в § 3, можно показать: для того, чтобы разностная схема IУ была полностью консервативной, достаточно выполнения следующих условий:

(5.7) $$\sigma_1 = \sigma_5, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_6 = 0{,}5,$$

(5.8) $$F = -\frac{1}{8\pi}(H\hat{H})_{\bar{x}},$$

(5.9) $$Q = 0{,}5\left\{E^{(\sigma_4)}(\tilde{\sigma}E)^{(0,5)} + E^{(\sigma_4)}(+1)(\tilde{\sigma}E(+1))^{(0,5)}\right\}.$$

При этом закон сохранения полной энергии для схемы выполняется в следующей разностной аппроксимации:

$$(5.10)\quad [\varepsilon,1)\Big|_{j_1}^{j_2}+0{,}5[v^2,1]\Big|_{j_1}^{j_2}+\frac{1}{8\pi}[H^2\eta,1)\Big|_{j_1}^{j_2}+\tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\Big\{v_N^{(0,5)}\Big[p_N^{(\sigma_4)}+$$

$$+\frac{H_N\hat{H}_N}{8\pi}\Big]-v_0^{(0,5)}\Big[p_{-1}^{(\sigma_1)}+\frac{H_{-1}\hat{H}_{-1}}{8\pi}\Big]\Big\}-\tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\Big\{\frac{E_N^{(\sigma_4)}H_N^{(0,5)}}{4\pi}-\frac{E_0^{(\sigma_4)}H_{-1}^{(0,5)}}{4\pi}\Big\}=0.$$

Если дополнительно к (5.7)-(5.9) потребовать

$$(5.11)\quad \sigma_1=0{,}5,\qquad \sigma_4=0{,}5,$$

то построенная полностью консервативная схема будет иметь второй порядок аппроксимации по времени и пространству $O(\tau^2+m^2)$.

Такая схема единственна.

Как и в чисто газодинамическом случае схема У может быть получена интегро-интерполяционным методом из интегрального закона сохранения энергии, записанного для элементарной ячейки сетки. При этом недивергентное уравнение энергии (5.6) оказывается в точности эквивалентным некоторому дивергентному разностному уравнению.

Покажем это.

Запишем закон сохранения энергии для отдельного массового интервала на промежутке времени $[t^j,t^{j+1}]$

$$(5.12)\quad \int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varepsilon+\frac{v^2}{2}+\frac{H^2\eta}{8\pi}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big[v\Big(p+\frac{H^2}{8\pi}\Big)\Big]-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{EH}{4\pi}\Big)\Big\}dx\,dt=0.$$

В дополнение к (3.15), (3.16) предположим в (5.12) следующий способ вычисления интегралов, зависящих от электромагнитных членов:

$$(5.13)\quad \int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{H^2\eta}{8\pi}dx=m\,\frac{H_{i+1/2}^2\eta_{i+1/2}}{8\pi},$$

$$(5.14)\quad \int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\Big(v\frac{H^2}{8\pi}\Big)dx\,dt=\tau\Big\{v_{i+1}^{(0,5)}\frac{H_{i+1}^*\hat{H}_{i+1}^*}{8\pi}-v_i^{(0,5)}\frac{H_i^*\hat{H}_i^*}{8\pi}\Big\},$$

$$(5.15)\quad \int_{t^j}^{t^{j+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{EH}{4\pi}\Big)dx\,dt=\tau\Big\{\frac{E_{i+1}^{(0,5)}H_{i+1}^{*(0,5)}}{4\pi}-\frac{E_i^{(0,5)}H_i^{*(0,5)}}{4\pi}\Big\}.$$

Звездочка по-прежнему означает интерполяцию соответствующей функции из полуцелых точек в узловую точку сетки

$$f^* = 0{,}5(f_{i+1/2} + f_{i+1/2}).$$

Закон сохранения (5.I2) в совокупности с соотношениями (3.I5), (3.I6), (5.I3), (5.I4) и (5.I5) порождает дивергентное разностное уравнение энергии:

$$(5.16)\quad \varepsilon_t = -0{,}25\left(v^2 + v_{(+1)}^2\right)_t - \frac{1}{8\pi}\left(H^2\eta\right)_t - \left(v^{(0,5)}\left[p^{*(0,5)} + \frac{\hat{H}^{*}\hat{H}^{*}}{8\pi}\right]\right)_x + \left(\frac{E^{(0,5)*}H^{(0,5)*}}{4\pi}\right)_x.$$

Уравнение (5.I6) строго сводится к уравнению энергии в энтропийном виде (5.6).

Использование уравнения (5.I6) в системе V вместо недивергентного уравнения (5.6), также дает полностью консервативную схему. Порядок аппроксимации в этой схеме – $O(\tau^2 + m^2)$.

§ 6. Общий вид полностью консервативной схемы для системы МГД уравнений.

1. Система дифференциальных уравнений, описывающая задачи одномерной нестационарной магнитной гидродинамики для общего случая в лагранжевых массовых координатах имеет вид

(6.I) $$\frac{\partial v}{\partial t} = -r^n \frac{\partial p}{\partial x} + F_1 + F_2, \quad F_1 = -\frac{r^n}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}, \quad F_2 = -\frac{1}{r^n}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial (r^n H_\varphi)^2}{\partial x},$$

(6.2) $$\frac{\partial r}{\partial t} = v,$$

(6.3) $$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial (r^n v)}{\partial x},$$

(6.4) $$\frac{\partial (H_z \eta)}{\partial t} = -\frac{\partial r^n E_\varphi}{\partial x},$$

(6.5) $$E_\varphi = -\frac{r^n}{4\pi\sigma\eta}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

(6.6) $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_\varphi \eta}{r^n}\right) = \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

(6.7) $$E_z = \frac{1}{4\pi\sigma\eta}\frac{\partial (r^n H_\varphi)}{\partial x},$$

(6.8) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\frac{\partial (r^n v)}{\partial x} + Q_1 + Q_2, \quad Q_1 = \sigma\eta E_\varphi^2, \quad Q_2 = \sigma\eta E_z^2.$$

Здесь H_z и H_φ – осевая и азимутальная компоненты магнитного поля, E_φ и E_z – соответствующие компоненты электрического поля. Значения параметра n = 0;I – дают соответственно плоский случай и случай цилиндрической симметрии.

Выпишем полностью консервативную разностную схему, аппроксимирующую систему МГД-уравнений (6.I)-(6.8)

(6.9) $$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau^j} = -\left(r_i^{(0,5)}\right)^n \frac{g_{i+1/2}^{(0,5)} - g_{i-1/2}^{(0,5)}}{0{,}5(m_i + m_{i-1})} + F_{1,i} + F_{2,i},$$

$$F_{1,i} = -\left(r_i^{(0,5)}\right)^n \frac{H_{i+1/2}^j H_{i+1/2}^{j+1} - H_{i-1/2}^j H_{i-1/2}^{j+1}}{4\pi(m_i + m_{i-1})},$$

$$F_{2,i} = -\frac{1}{(r_i^{(0,5)})^n}\,\frac{b_i^{j+1} h_i^j h_i^{j+1} - b_{i-1}^{j+1} h_{i-1}^j h_{i-1}^{j+1}}{4\tau(m_i+m_{i-1})},$$

$$b_i^{j+1} = \left(\frac{r_i^{(0,5)} r_{i+1}^{(0,5)}}{a_i^{j+1} a_i^j}\right)^n, \qquad a_i = 0{,}5(r_i + r_{i+1}),$$

(6.10) $$\frac{r_i^{j+1} - r_i^j}{\tau^j} = v_i^{(0,5)},$$

(6.11) $$\frac{\eta_{i+1/2}^{j+1} - \eta_{i+1/2}^j}{\tau^j} = \frac{(r_{i+1}^{(0,5)})^n v_{i+1}^{(0,5)} - (r_i^{(0,5)})^n v_i^{(0,5)}}{m_i},$$

(6.12) $$\frac{H_{i+1/2}^{j+1}\eta_{i+1/2}^{j+1} - H_{i+1/2}^j \eta_{i+1/2}^j}{\tau^j} = -\frac{(r_{i+1}^{(0,5)})^n M_{i+1}^{(0,5)} - (r_i^{(0,5)})^n M_i^{(0,5)}}{m_i},$$

(6.13) $$M_i = -\frac{r_i^n}{2\pi(\tilde\sigma_i m_i + \tilde\sigma_{i-1} m_{i-1})}(H_i - H_{i-1}),$$

(6.14) $$\frac{1}{\tau^j}\left(\frac{h_i^{j+1}\eta_{i+1/2}^{j+1}}{(a_i^{j+1})^n} - \frac{h_i^j \eta_{i+1/2}^j}{(a_i^j)^n}\right) = \frac{E_{i+1}^{(0,5)} - E_i^{(0,5)}}{m_i},$$

(6.15) $$E_i = \frac{1}{2\pi(\tilde\sigma_i m_i + \tilde\sigma_{i-1} m_{i-1})}(h_i - h_{i-1}),$$

(6.16) $$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \varepsilon_{i+1/2}^j}{\tau^j} = -g_{i+1/2}^{(0,5)}\left[\frac{(r_{i+1}^{(0,5)})^n v_{i+1}^{(0,5)} - (r_i^{(0,5)})^n v_i^{(0,5)}}{m_i}\right] + Q_{1,i} + Q_{2,i},$$

$$Q_{1,i} = 0{,}5\left\{(r_i^{(0,5)})^n M_i^{(0,5)}\left(\tilde\sigma_i \frac{M_i}{r_i^n}\right)^{(0,5)} + (r_{i+1}^{(0,5)})^n M_{i+1}^{(0,5)}\left(\tilde\sigma_i \frac{M_{i+1}}{r_{i+1}^n}\right)^{(0,5)}\right\},$$

$$Q_{2,i} = 0{,}5\left\{E_i^{(0,5)}(\tilde\sigma_i E_i)^{(0,5)} + E_{i+1}^{(0,5)}(\tilde\sigma_i E_{i+1})^{(0,5)}\right\}.$$

При записи использованы обозначения

$$\tilde\sigma_i = \sigma_{i+1/2}\eta_{i+1/2},\ H_i = H_{zi},\ h_i = (r^n H_\varphi)_{i+1/2},\ M_i = E_{\varphi i},\ E_i = E_{zi}.$$

Под $g = p + \omega$ понимается сумма газокинетического давления и искусственной вязкости, которая вводится в схему для обеспечения возможности сквозного счета сильных разрывов.

Схема (6.9)-(6.16) записана в индексной форме на неравномерной пространственно-временной сетке $\{x_i, t^j\}$. Сеточные функции $r_i^j, v_i^j, E_i^j, M_i^j, F_{1,i}^j, F_{2,i}^j$ относятся к узловым точкам (x_i, t^j),

функции $\varepsilon^j_{i+1/2}, \eta^j_{i+1/2}, q^j_{i+1/2}, H^j_{i+1/2}, h^j_i, \tilde{\sigma}_i, Q_{1,i}\, Q_{2i}$ – к полуцелым $(x_{i+1/2}, t^j)$.

На равномерной сетке схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству $O(\tau^2 + m^2)$.

Закон сохранения энергии для разностной схемы выглядит следующим образом

$$\sum_{i=0}^{N-1} m_i \varepsilon_i^{j2} + \sum_{i=0}^{N} 0{,}5(m_i+m_{i-1})\frac{(v_i^{j2})^2}{2} + \frac{1}{8\pi}\sum_{i=0}^{N-1} m_i \eta_i^{j2}\left[(H_i^{j2})^2 + \left(\frac{h_i^{j2}}{(a_i^{j2})^n}\right)^2\right] -$$

$$-\left\{\sum_{i=0}^{N-1} m_i \varepsilon_i^{j1} + \sum_{i=0}^{N} 0{,}5(m_i+m_{i-1})\frac{(v_i^{j1})^2}{2} + \frac{1}{8\pi}\sum_{i=0}^{N-1} m_i \eta_i^{j1}\left[(H_i^{j1})^2 + \left(\frac{h_i^{j1}}{(a_i^{j1})^n}\right)^2\right]\right\} +$$

$$+ \tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\left\{(r_N^{(0,5)})^n v_N^{(0,5)}\left[q_N^{(0,5)} + \frac{H_N^j H_N^{j+1}}{8\pi} + \frac{1}{(a_N^j a_N^{j+1})^n}\frac{h_N^j h_N^{j+1}}{8\pi}\right] - (r_0^{(0,5)})^n v_0^{(0,5)}\left[q_{-1}^{(0,5)} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{H_{-1}^j H_{-1}^{j+1}}{8\pi} + \frac{1}{a_0^j a_0^{j+1}}\frac{h_{-1}^j h_{-1}^{j+1}}{8\pi}\right]\right\} - \tau\sum_{j=j_1}^{j_2}\left\{\left[\frac{h_N^{(0,5)} E_N^{(0,5)}}{4\pi} - \frac{h_{-1}^{(0,5)} E_0^{(0,5)}}{4\pi}\right] -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{(r_N^{(0,5)})^n H_N^{(0,5)} M_N^{(0,5)}}{4\pi} - \frac{(r_0^{(0,5)})^n H_{-1}^{(0,5)} M_{-1}^{(0,5)}}{4\pi}\right]\right\} = 0,$$

$$a_0 = r_0, \qquad a_N = r_N.$$

Чтобы обеспечить единообразие счета в граничных точках, вводятся два фиктивных интервала $m_{-1} = m_N = 0$.

2. Полностю консервативная разностная схема (6.9) - (6.16) была реализована при численном расчете сильноточного разряда в плазме [12].

В задаче рассматривались процессы, возникающие в плазме в результате разряда батареи конденсаторов через плазменный цилиндр, находящийся в вакууме.

Магнитогидродинамическая сторона явления описывается в рамках системы уравнений (6.1)÷(6.8) при $H_z = E_\varphi = 0$. Влияние внешней электрической цепи учитывалось посредством электротехнического уравнения. Процессы теплопереноса рассматривались в приближении одногруппового кинетического уравнения.

Как показали расчеты, при некоторых условиях в плазме возникает высокотемпературная электропроводная зона - Т-слой [13], появление которого приводит к перестройке течения. Образуются две области - горячее центральное ядро, которое при помощи Т-слоя захватывается магнитным полем и интенсивно сжимается к оси, и холодная непроводящая оболочка, разлетающаяся в вакуум, не взаимодействуя с магнитным полем.

Наличие высоких температур в центральной части системы вызывает мощный поток светового излучения. Т-слой и ядро выступают в роли своеобразного преобразователя электрической энергии батареи конденсаторов в энергию светового излучения.

На расчете описанной задачи о сильноточном разряде было проведено сравнение обычных неявных разностных схем (типа IУ) и полностью консервативной разностной схемы (6.9)-(6.16).

В расчетах по схеме типа IУс недивергентным уравнением энергии наблюдался дисбаланс полной энергии, который в различных вариантах составлял 20% - 50% от начальной энергии батареи кон-

денсаторов. Это приводило к абсурдному с физической точки зрения результату - энергия, вышедшая из системы в виде излучения, превышала начальный запас энергии.

Применение полностью консервативных схем устранило этот дефект.

Появление столь значительного дисбаланса в данной задаче объясняется тем, что ее решение является функцией, сильноменяющейся во времени и пространстве.

Сравнение же обеих схем на гладких решениях показало, что результаты практически совпадают.

3. В настоящей работе мы не обсуждаем вопросов, связанных с выбором алгоритма решения системы разностных уравнений, и не останавливаемся на деталях "счетной технологии".

Сделаем лишь два замечания общего характера.

Замечание I.

В разностное уравнение движения (6.II) входит член, отвечающий электромагнитной силе

$$F_i = -\frac{1}{8\pi}\,\frac{H_i^j H_i^{j+1} - H_{i-1}^j H_{i-1}^{j+1}}{m} \tag{6.I7}$$

(для простоты ограничимся плоским случаем и равномерной сеткой).

В непроводящих областях ($\sigma = 0$) электромагнитные силы отсутствуют, и выражение для F_i должно обращаться в нуль

$$(H_i^{j+1} = H_{i-1}^{j+1}, \; H_i^j = H_{i-1}^j).$$

Однако, при больших значениях напряженности магнитного поля в (6.I7) фактически берется разность больших близких величин. Это может привести к потере точности и к появлению в областях $\sigma = 0$ фиктивных электромагнитных сил.

Избежать указанных трудностей можно с помощью недивергентного вида для электромагнитной силы $F = -\sigma E H$, куда

явно входит значение проводимости среды σ. Нужно требовать только, чтобы способ записи F в разностной схеме не нарушал ее полной консервативности. Такому условию удовлетворяет, например следующая формула

$$(6.18)\quad F_i = -\frac{1}{8}\left\{(\tilde{\sigma}_i^j+\tilde{\sigma}_{i-1}^j)E_i^j(H_i^{j+1}+H_{i-1}^{j+1})+(\tilde{\sigma}_i^{j+1}+\tilde{\sigma}_{i-1}^{j+1})E_i^{j+1}(H_i^j+H_{i-1}^j)\right\}.$$

Действительно, нетрудно проверить, что с помощью уравнения поля соотношение (6.18) преобразуется к виду (6.17).

Сообще следует отметить, что практически в расчетах удобнее пользоватьоя схемами, использующими недивергентное уравнение.

Замечание 2.

Для решения системы разностных уравнений используются итерационные методы. Итерации проводятся до достижения заданной точности или заданного числа итераций. Это означает, что практически вместо принятой разностной схемы на каждой итерации реализуется некоторая другая схема, зависящая от способа решения разностных уравнений. Эти промежуточные схемы не только не обладают свойотвом полной консервативности, но даже не являются консервативными. Если процесс итераций оходится, то в пределе реализуется исходная разностная охема.

Поэтому в расчетах энергетический дисбаланс уже не будет в точности равен нулю. Его величина уменьшается при увеличении числа итераций и может служить показателем "доитерированности" системы разностных уравнений.

Литература

[I] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Об однородных разностных схемах, ЖВММФ, I, № I (I96I).

[2] С.К. Годунов, Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики, Матем.сб., 47 (89), (I959).

[3] Von Neumann J., Richtmyer R.D., A method for numerical calculation of hydrodynamic shoks, J. Appl. Phys., 21, (1949).

[4] В.Ф. Куропатенко, Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики, Изв. вузов., 3 (28), (I962).

[5] В.Ф. Куропатенко, О разностных методах для уравнений гидродинамики, Труды Матем.ин-та АН СССР, 74 (I966).

[6] Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений, Физматгиз, I968.

[7] А.А. Самарский, Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа, ЖВММФ, I, № 3 (I96I).

[8] А.А. Самарский, Априорные оценки для разностных уравнений, ЖВММФ, I, № 6 (I96I).

[9] Р.Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, ИИЛ, М., I960.

[I0] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, I957.

[II] А.А. Самарский, П.П. Волосевич, М.И. Волчинская, С.П. Курдюмов, Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики, ЖВММФ, 8, № 5: (1968).

[I2] П.П. Волосевич, В.Я. Гольдин, Н.Н. Калиткин, С.П. Курдюмов, Ю.П. Попов, В.Б. Розанов, А.А. Самарский, Е.Н.Четверушкин. Численный расчет сильноточного разряда в литиевой плазме. Доклад, Девятая международная конференция по явлениям в ионизированных газах, Бухарест, Румыния, сентябрь 1969 г.

[I3] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский и др., Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики, ДАН СССР, т. I73, № 4, 1967.

Подписано к печати "1" IV 1969 г.

Т04989 от "10" IV 1969 г. Заказ № 898 Тираж 100 экз.

Ордена Ленина институт прикладной математики
Москва, Миусская пл., 4