ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Л.М. Дегтярев А.А. Самарский
А.П. Фаворский

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

№ 2

Москва 1969г.

Аннотация

В работе рассмотрены вопросы, связанные с численным решением некоторых внутренних стационарных задач электродинамики. Приведена монотонная разностная схема второго порядка точности с положительным оператором для решения смешанной краевой задачи. Допускается наличие "косой" производной на определенных участках границы. Для решения стационарной разностной задачи использовано несколько итерационных процессов, основанных на методе переменных направлений. Проведено сравнение различных алгоритмов. Описаны примеры решения конкретных задач.

§ I. Введение

В работе рассматриваются двумерные стационарные задачи электродинамики сплошной проводящей среды в ограниченном объеме. Такие задачи возникают, например, при изучении течений несжимаемых и сжимаемых жидкостей в магнитогидродинамических каналах, при исследовании поведения неравновесной плазмы в сильных магнитных полях, и др.

п.I.I. Основой физической постановки такого рода задач служат макроскопические уравнения Максвелла и закон Ома [I] ,которые будут использоваться при следующих предположениях.

I. Процесс носит достаточно медленный характер, так что токами смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ можно пренебречь.

2. Магнитное число Рейнольдса мало $Re_m \ll 1$. Это допущение позволяет в дальнейшем считать магнитное поле постоянным и заданным извне.

Пространственное распределение проводимости σ , параметра Холла β и скорости среды $\vec{v}$ в настоящей работе считается известным и заданным. Отметим, что уже в такой постановке решение задач электродинамики в ряде случаев представляет самостоятельный интерес. В общем случае эти величины сами находятся в результате решения других уравнений, например, магнитной газодинамики, закона сохранения энергии электронов и т.д.

п.I.2. Математическое описание рассматриваемых задач основано на введении вектор-потенциала $\vec{\phi}$ плотности электрического

тока (обсуждаются также и другие подходы). Функция φ находится из решения краевой задачи для эллиптического положительного оператора второго порядка. Отметим некоторые особенности этой задачи.

Во-первых, коэффициенты уравнения могут оказаться сильноменяющимися функциями пространственных переменных.

Во-вторых, характерным также является смешанный тип краевой задачи, причем на части границы задается "косая" производная от искомой функции. Наконец существенно то обстоятельство, что в общем случае $\beta \neq 0$ краевая задача не является самосопряженной.

п. I.3. Перечислим содержание работы. В § 2 рассмотрена математическая постановка задачи и отмечены некоторые свойства дифференциального оператора. § 3 посвящен разностной краевой задаче. Показана сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной. В § 4 сопоставлено несколько итерационных процессов решения разностной задачи. Наконец, в § 5 описаны характерные примеры расчетов.

§ 2. Дифференциальные уравнения и краевые условия

Рассматривается задача о нахождении стационарного распределения плотности электрического тока $\vec{J}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$ в ограниченной области пространства, заполненной электропроводной средой, движущейся в магнитном поле Отметим, однако, что рассматриваемые постановка, уравнения и краевые условия могут оказаться характерными и для других физических задач.

п.2.I. Всюду в дальнейшем полагается, что токи смещения и индуцированные магнитные поля пренебрежимо малы, а электропроводная среда квазинейтральна. При этих предположениях уравнения Максвелла [I], лежащие в основе макроскопической электродинамики, выражают собой потенциальность электрического поля

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad (2.1)$$

и закон сохранения электрического заряда

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \qquad (2.2)$$

Связь между векторами $\vec{j}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ дается обобщенным законом Ома [2], который в настоящей работе используется в следующей форме

$$\vec{j} + \vec{j}\times\vec{\Omega} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{H}\right),\ \vec{\Omega} = \beta\frac{\vec{H}}{|H|} \qquad (2.3)$$

Значения компонент скорости $\vec{V}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ считаем известными. Скорость $\vec{V}$ либо задана, либо найдена из решения других уравнений (например, гидродинамики), которые в данной работе не рассматриваются. Распределение скалярной электропроводности σ и параметра Холла β (а, следовательно, и $\vec{\Omega}$) по пространству также будем считать известным.

В дальнейшем будем предполагать, что векторы $\vec{j}$, $\vec{E}$ и $\vec{V}$ лежат в одной плоскости координат (x, y), то есть $\vec{V}=\vec{V}(V_x, V_y, 0)$ $\vec{j}=\vec{j}(j_x, j_y, 0)$; $\vec{E}=\vec{E}(E_x, E_y, 0)$. Магнитное поле $\vec{H}$ и вектор $\vec{\Omega}$ направлены перпендикулярно этой плоскости, то есть отличны от нуля только их z -компоненты. Эти компоненты будут обозначаться буквами H и Ω соответственно. Предполагается также, что функции $j_x, j_y, E_x, E_y, V_x, V_y, H, \Omega, \sigma$ зависят только от x и y. В этом случае уравнения (2.I), (2.2) и

закон Ома (2.3) в декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \qquad (2.5)$$

$$j_x + j_y \cdot \Omega = \sigma (E_x + V_y \cdot H) \qquad (2.6)$$

$$j_y - j_x \cdot \Omega = \sigma (E_y - V_x \cdot H) \qquad (2.7)$$

п.2.2. Для построения однозначного решения уравнений (2.4)-(2.7) в конечной области G на ее границе должны быть поставлены надлежащие граничные условия. Будем считать, что граница Γ области G разбита на конечное число участков Γ_k и разделяющих их γ_k $(\Gamma = \sum_k (\Gamma_k + \gamma_k))$, на которых заданы краевые условия различного типа (см. фиг.I). В настоящей работе будут рассмотрены следующие краевые условия.

I. Пусть известна нормальная составляющая плотности электрического тока, протекающего через границу. Длину дуги поверхности, отсчитываемую от некоторой ее точки, будем обозначать S, внешнюю нормаль и единичный касательный вектор, направленный вдоль положительного обхода границы (против часовой стрелки) обозначим соответственно $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$. Величина электрического тока, протекающего через единицу площади поверхности, равна

$$j_n = g(S) \qquad (2.8)$$

Условимся в дальнейшем, что условие (2.8) задано на участках границы Γ. Случай $g(S) \equiv 0$ соответствует идеальному диэлектрику, а $g(S) \neq 0$ идеально секционированному электроду.

2. Другим распространенным типом граничного условия является требование непрерывности касательной составляющей электрического поля на границе раздела двух сред. Так вдоль сплошного идеально проводящего электрода очевидно

$$E_\tau = 0 \tag{2.9}$$

Будем считать, что это условие задано на участках границы . При наличии на границе области G участков γ_k, задачу необходимо доопределить интегральными условиями

$$\int_{\gamma_k} j_n \, ds = J_k \tag{2.10}$$

или

$$\int_{\Gamma_k} E_\tau \, ds = U_k \tag{2.11}$$

где полный ток через электроды J_k (или разность потенциалов между ними U_k) заданы. При этом, вследствие (2.4) и (2.5) должно выполняться

$$\sum_{k'} \int_{\Gamma_{k'}} g(s) ds + \sum_k J_k = 0 \tag{2.12}$$

или

$$\sum_{\Gamma_k} U_k = 0 \tag{2.13}$$

В дальнейшем рассматривается прямоугольная область АВСД (фиг.2). Граница области – идеально диэлектрические стенки Γ_I и Γ_2, исключая пару электродов ab и cd, которые либо идеально секционированные, либо – идеально проводящие. В последнем случае участки границы ab и cd обозначим γ_1 и γ_2.

Если электродов нет или они идеально секционированы, то граница АВСД состоит из одного участка Γ_I.

п. 2.3. Вместо системы уравнений (2.4)-(2.7) можно рассматривать систему двух уравнений для j_x и j_y, исключив из (2.4) E_x и E_y с помощью (2.6) и (2.7).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{j_x + \Omega j_y}{\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{j_y - \Omega j_x}{\sigma}\right) = -f \\ &f = \frac{\partial}{\partial x}(V_x H) + \frac{\partial}{\partial y}(V_y H) \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Краевыми условиями для (2.I4) являются равенства (2.8) и (2.9), которое в переменных j_x и j_y переходит в

$$-j_\tau + \Omega j_n = \sigma V_n H \qquad (2.15)$$

Краевая задача замыкается одним из интегральных условий (2.I0) или (2.II), в котором E_τ выражено через j_τ и j_n

$$E_\tau = (-j_\tau + \Omega j_n)/\sigma - V_n \cdot H \qquad (2.16)$$

Аналогичным образом исключая j_x и j_y из (2.5) приходим к системе уравнений для E_x и E_y

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sigma}{1+\Omega^2}(E_x - \Omega E_y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma}{1+\Omega^2}(E_y + \Omega E_x)\right] = f \\ &f = +\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sigma H}{1+\Omega^2}(\Omega V_x + V_y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma H}{1+\Omega^2}(-V_x + \Omega V_y)\right] \end{aligned}\right\} (2.17)$$

Краевыми условиями для (2.I7) снова являются (2.9) и (2.8), преобразованное к виду

$$\frac{\sigma}{1+\Omega^2}\left[(-E_\tau + V_n H)\Omega + E_n + V_\tau H\right] = g(s) \qquad (2.18)$$

В замыкающих интегральных условиях вместо j_n следует подставить

$$j_n = \frac{\sigma}{1+\Omega^2}\left[(-E_\tau + V_n H)\Omega + E_n + V_\tau H\right] \qquad (2.19)$$

п.2.4. При $\sigma = const$ и $\Omega = const$ системы уравнений (2.I4) и (2.I7) можно привести к разделенному виду, то есть к независимым уравнениям для каждой неизвестной функции j_x, j_y, E_x, E_y. Пусть $\sigma \equiv \Omega \equiv H = 1$ и $V_x = V_y = 0$, тогда (2.I4) преобразуется к

$$\Delta j_x = 0 \qquad (2.20)$$

$$\Delta j_y = 0 \qquad (2.21)$$

а (2.I7) к

$$\Delta E_x = 0 \qquad (2.22)$$

$$\Delta E_y = 0 \qquad (2.23)$$

Несмотря на то, что каждое из этих уравнений содержит только одну неизвестную функцию, решить их независимо друг от друга можно не всегда, так как входящие в них функции, вообще говоря, связаны граничными условиями. Например, для системы уравнений (2.20), (2.2I) краевым условием на сплошных идеальных электродах является

$$j_x + \Omega j_y = 0 \qquad (2.24)$$

Уравнения (2.20) и (2.2I) для компонент плотности электрического тока j_x, j_y и уравнения (2.22) и (2.23) для компонент электрического поля будут полностью независимыми при отсутствии эффекта Холла. Одним из примеров может служить задача о протекании электрического тока между электродами без учета эффекта Холла, то есть при $\Omega = 0$.

В самом деле распределение j_x в АВСД описывается уравнением (2.20). Поставим для него граничные условия. Участки АД и ВС характеризуются "непротеканием" тока: $j_x = 0$. Это же требование на Dd, cC, Aa и bB дает: $\partial j_x/\partial y = 0$. На электродах ab

и bc, которые для определенности считаем идеально секционированными, задается $j_y = g(x)$, следовательно $\partial j_x/\partial y = g'(x)$
Таким образом, сформулирована следующая краевая задача

$$\left.\begin{array}{c} \Delta j_x = 0 \\ j_x = 0, \text{ на } AD \text{ и } BC;\ \dfrac{\partial j_x}{\partial y} = 0 \text{ на } Aa, bB, cC, dD \\ \dfrac{\partial j_x}{\partial y} = g'(x) \text{ на } ab \text{ и } cd \end{array}\right\} \quad (2.25)$$

Аналогичным образом можно поставить краевые условия для уравнений (2.21); (2.22) и (2.23). Приведем пример задачи для системы уравнений (2.20), (2.21), решения которых связаны через граничные условия. Снова обратимся к рассмотренной выше задаче и положим $\Omega = 1$, а электроды ab и cd будем считать сплошными и идеально проводящими. Требуется найти распределение j_x и j_y Теперь уже на ab и cd имеет место условие $E_x = 0$, которое переходит в $j_x + j_y = 0$. Следовательно, уравнения

$$\Delta j_x = 0,\ \Delta j_y = 0$$

со связанными граничными условиями

$$\left.\begin{array}{lll} j_x = 0 & \text{на АД и ВС} & \\ \partial j_x/\partial y & \text{на} & Aa, bB, Cc, Dd \\ \partial j_y/\partial x & \text{на} & AD \text{ и } BC \\ j_y = 0 & \text{на} & Aa, bB, cC, Dd \\ j_x + j_y = 0 & \text{на} & ab \text{ и } cd \\ \displaystyle\int_b^B j_x\,dx + \int_B^C j_y\,dy + \int_C^c j_x\,dx = U & & \end{array}\right\} \quad (2.26)$$

составляют одну краевую задачу. Здесь U – заданная разность потенциалов между электродами ab и cd.

п.2.5. В общем случае переменных по пространству σ, Ω, H, V_x, V_y целесообразно воспользоваться скалярным потенциалом электрического поля φ и вектор – потенциалом электрического тока $\vec{\psi}$ ([3] , [4]).

Из уравнения (2.I) следует, что можно ввести скалярную функцию $\varphi(x, y, z)$, такую, что

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad (2.27)$$

Формально введенная таким образом функция φ имеет физический смысл потенциала электрического поля. Уравнение (2.2) означает, что $\vec{j}$ можно представить как ротор от вектор-функции $\vec{\psi}\{\psi_x(x,y,z), \psi_y(x,y,z), \psi_z(x,y,z)\}$, то есть

$$\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{\psi} \qquad (2.28)$$

В случае, когда решение зависит только от двух пространственных переменных x и y, а магнитное поле имеет только одну компоненту H_z, отличную от нуля, потенциалы φ и $\vec{\psi}$ также зависят только от двух переменных

$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}(0, 0, \psi_z(x, y, z)) \qquad (2.29)$$

В дальнейшем z -компоненту потенциала $\vec{\psi}$ удобно обозначать просто ψ.

Подставляя (2.27) и (2.28) в закон Ома (2.3), получаем в проекциях на оси x, y:

$$\Omega\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\sigma V_y H \qquad (2.30)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial y} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sigma V_x H \qquad (2.31)$$

Физические зависимые переменные j_x, j_y, E_x, E_y выражаются через φ и ψ с помощью (2.27), (2.28)

$$j_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad j_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (2.32)$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (2.33)$$

Сформулируем краевые условия для (2.30) и (2.31). Уравнение (2.8) переходит в $\partial \psi / \partial S = g(S)$ интегрирование которого дает

$$\psi(S) = \nu(S) = \int g(S)\, dS + const \qquad (2.34)$$

Отметим, что задание ψ на границе избавляет от необходимости задания дополнительного интегрального условия (2.10), которое фактически отражено в (2.34а). Условие (2.12) становится следствием однозначности ψ.

Аналогично (2.9) дает условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = 0$$

или

$$\varphi(S) = const \qquad (2.35)$$

При этом условия (2.11), (2.13) также выполняются автоматически.

п.2.6. Система уравнений (2.30), и (2.31) может быть оведена к одному уравнению второго порядка для функции ψ

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-f, \quad (2.36)$$

$$f=+\frac{\partial}{\partial x}(V_x H)+\frac{\partial}{\partial y}(V_y H)$$

Краевое условие (2.34) остается в силе и для (2.36)

$$\psi=\nu(s) \quad (2.37)$$

а (2.35) переходит в условие с "косой производной"

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}+\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\sigma V_n H \quad (2.38)$$

Таким образом, для уравнения (2.36) поставлена краевая задача, для которой на части границы заданы значения ψ согласно (2.37); а на остальной части задана косая производная (2.38).

п.2.7. Представим краевую задачу (2.36)-(2.38) в операторной форме

$$A\psi=-f \quad (2.39)$$

где A - эллиптический оператор второго порядка

$$A\psi=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (2.40)$$

ействующий на достаточно гладкие функции ψ, подчиненные краевым словиям (2.37),(2.38), и

$$f=+\frac{\partial}{\partial x}(V_x H)+\frac{\partial}{\partial y}(V_y H)$$

будем предполагать, что решение уравнения (2.39) существует, оставляя в стороне, вопросы связанные о соответствующими условиями, следование которых содержится в работах [5], [6], а также [7].

Что касается единственности решения, то она следует из

строгой положительности оператора $\mathcal{A}$, при однородных условиях (2.37), (2.38), которую мы сейчас установим. В самом деле, интегрируя по частям, нетрудно убедиться, что для произвольной области

$$(\psi, \mathcal{A}\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}(\nabla\psi)^2 dx\,dy - \oint_\Gamma \frac{\psi}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} + \Omega\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) ds \qquad (2.41)$$

или, в силу однородности краевых условий

$$(\psi, \mathcal{A}\psi) = \iint_G \frac{1}{\sigma}(\nabla\psi)^2 dx\,dy > 0 \qquad (2.42)$$

Отсюда очевидно, что $(\psi, \mathcal{A}\psi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\psi \equiv 0$ и, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ строго положителен.

Заметим, что (2.41) согласно (2.32) (2.6), (2.7) можно представить в виде

$$(\psi, \mathcal{A}\psi) = I_1 + I_2 \; ; \; I_1 = \iint_G \frac{j^2}{\sigma} dx\,dy ; \; I_2 = \oint_\Gamma \psi E_\tau ds$$

Интеграл I_1 представляет собой мощность выделения в среде джоулева тепла, а интеграл I_2 равен мощности энергии, отдаваемую средой. (если $I_2 < 0$, то среда получает энергию от внешних источников). Таким образом "энергия" оператора $(\psi, \mathcal{A}\psi)$ в общем случае неоднородных краевых условий по своему физическому смыслу означает полную работу, совершаемую средой в единицу времени.

В дальнейшем нам потребуется положительная определенность разностного аналога оператора $\mathbb{A}$. Естественно сначала установить это свойство для дифференциального оператора. Из (2.42) следует при $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$, что

$$(\psi, \mathcal{A}\psi) \geqslant \frac{1}{\sigma_0} \iint_G (\nabla\psi)^2 dx\,dy$$

Далее для произвольной области G легко следует положительная определенность оператора A в случае полностью первой краевой задачи (2.37) и в случае, когда на всей границе области G имеет место (2.38). Для доказательства достаточно воспользоваться соответственно неравенствами Фридрихса [8] и Пуанкаре [9] так же, как это сделано, например, в [10].

Для случая смешанной краевой задачи ограничимся прямоугольной областью АВСД и потребуем, чтобы краевое условие (2.37) имело место хотя бы на одной из сторон, например на AD. Тогда

$$[u(x,y)]^2 = \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y)\, d\xi\right)^2 \leq \mathcal{L} \int_0^{x_L} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

и

$$\iint_{ABCD} u^2\, dx\, dy \leq \mathcal{L}^2 \iint_{ABCD} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$$

цесь $\mathcal{L}$ - длина наибольшей из сторон прямоугольника АВСД. Усили-
ая это неравенство получаем

$$\iint_{ABCD} u^2\, dx\, dy \leq \mathcal{L}^2 \iint_{ABCD} (\nabla u)^2\, dx\, dy$$

куда

$$(\phi, A\phi) \geq \gamma^2 (u, u) \qquad (2.43)$$

,

$$\gamma = 1 / \sqrt{\sigma_0 \cdot \mathcal{L}^2}$$

ким образом и в этом случае при $0 < \sigma \leq \sigma_0$ оператор.
оложительно определен.

В заключение отметим, что оператор A является самосопряженным
да и только тогда, когда $\Omega \equiv 0$. В общем случае $\Omega \neq 0$ его
ю представить в виде.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_c + \mathcal{A}_a$$

где $\mathcal{A}_c$ - самосопряженный положительный оператор

$$\mathcal{A}_c \psi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

и $\mathcal{A}_a$ - антисимметричный оператор

$$\mathcal{A}_a \psi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

Отметим, что оператор $\mathcal{A}_a$ не имеет "энергии"

$$(\psi, \mathcal{A}_a \psi) = 0$$

поэтому

$$(\psi, \mathcal{A}\psi) = (\psi, \mathcal{A}_c \psi)$$

п.2.8. Обратимся снова к уравнению в операторной форме

$$\mathcal{A}u = -f \qquad (2.44)$$

где

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2.45)$$

$$u|_{\Gamma_1} = \nu(s) \qquad (2.46)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \Omega\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\Gamma_1} = 0 \qquad (2.47)$$

Как показано в п.2.7, оператор $\mathcal{A}$ строго положителен и, следовательно, решение уравнения (2.44), если оно существует единственно. Обозначим через $C_1^{(2)}$ семейство функций дважды непрерывно дифференцируемых внутри G и удовлетворяющих только

однородному ($\nu=0$) краевому условию (2.46). Семейство дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих (2.46), обозначим через U . Функция $u \in U$ является решением задачи (2.44) - (2.47) тогда и только тогда, когда для любой $v \in C_1^{(2)}$ выполняется равенство

$$\Phi(u,v)=(f,v)-I=0 \quad \forall v \in C_1^{(2)} \qquad (2.48)$$

Здесь

$$I=\iint_G J(u,v)\,dx\,dy$$

$$J(u,v)=\frac{u_x v_x}{\sigma}+\frac{u_y v_x}{\sigma}+\frac{\Omega}{\sigma}u_y v_x-\frac{\Omega}{\sigma}u_x v_y \qquad (2.49)$$

Справедливость этого утверждения сразу следует из интегральной формулы Грина [10]

$$+\iint_G f v\,dx\,dy+\iint_G J(u,v)\,dx\,dy=\oint_\Gamma \frac{v}{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\Omega\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)ds+$$
$$+\iint_G v\,(Au+f)\,dx\,dy \qquad (2.50)$$

и произвела выбора функции $v \in C_1^{(2)}$.

В свою очередь (2.48) можно использовать для определения решения, вообще говоря, обобщенного [15] , задачи (2.44) - (2.47). В дальнейшем такое определение решения будет использовано при построении разностного аналога оператора A .

Полагая $u=v \in C_1^{(2)}$, в (2.50) получаем выражение для энергии оператора

$$I=\iint_G J(u,u)\,dx\,dy=\iint_G u\cdot Au\,dx\,dy=(u,Au) \qquad (2.51)$$

Построим сопряженный оператор, используя (2.50). Заметим, что если обратить знак Ω и поменять ролями $u \in C_1^{(2)}$ и $v \in C_1^{(2)}$, то (2.50) примет вид:

$$\iint_G f u \, dx dy + \iint_G J(u,v) \, dx dy = \oint_\Gamma \frac{u}{\sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial n} - \Omega \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) ds + \iint_G u \left(A^* v + f \right) dx dy$$

где $A^* v$ является сопряженным дифференциальным выражением для (2.45). Сопоставляя последнее равенство с (2.50), получаем, что оператором сопряженным к A будет

$$A^* v = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma} \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$v \big|_{\Gamma_1} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} - \Omega \frac{\partial v}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

Заметим, что рассмотрение, проведенное в этом пункте обобщается на случай несамосоприжённых эллиптических операторов вида

$$Au = -\sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu \quad ; \; c \geq 0$$

с переменными коэффициентами A_{ik} и C с граничными условиями вида $u|_{\Gamma_1} = \nu(S)$ и

$$\sum_{i,k=1}^{2} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\widehat{n, x_i})\Big|_{\Gamma_2} = 0$$

Можно рассматривать также и более общие типы краевых условий.

п.2.9. Аналогичным образом из (2.30), (2.31) следует уравнение для скалярного потенциала, φ, которое сразу удобно представить в операторной форме

$$A\varphi = -f$$

$$A\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma}{1+\Omega^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sigma}{1+\Omega^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma\Omega}{1+\Omega^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sigma\Omega}{1+\Omega^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$f = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sigma H}{1+\Omega^2}(V_y + \Omega V_x)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma H}{1+\Omega^2}(-V_x + \Omega V_y)\right]$$

Оператор A снова определен на функциях, имеющих кусочно-гладкие первые производные. При этом рассматриваемые функции на части границы (электродах) удовлетворяют условию, которое следует из (2.9).

$$\varphi = const$$

На остальной части границы имеет место условие косой производной

$$\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+v_n H\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial n}+v_\tau H=0 \qquad (2.46)$$

которое следует из (2.8).

Уравнения (2.50)-(2.53) определяют краевую задачу для

Снова можно показать, что оператор A всегда положителен и положительно определен, если $\frac{\sigma}{1+\Omega^2}\geqslant a_*>0$. Оператор A является самосопряженным при $\Omega=0$, а при $\Omega\neq 0$ он несамосопряжен и очевидным образом представляется в виде суммы самосопряженного и антисимметричного операторов.

§ 3. Разностная задача

Уточним постановку задачи. В прямоугольной области АВСД требуется найти распределение компонент напряженности электрического поля E_x, E_y и плотности электрического тока j_x, j_x. На участках границы $aACc$ и $bBDd$ задано условие $j_n=0$, на участках ab и cd ставится условие $E_\tau=0$. Полный ток, протекающий через электроды, задан и равен J. В § 2 отмечалось несколько подходов к решению такого типа задач. Остановимся на описании решения с помощью вектор-потенциала Ψ. Выпишем еще раз уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-p\frac{\partial\psi}{\partial x}+q\frac{\partial\psi}{\partial y}=f$$

$$p=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right),\quad q=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right) \qquad (3.1)$$

$$f=\frac{\partial}{\partial x}(v_x H)+\frac{\partial}{\partial y}(v_y H)$$

и краевые условия

$$\psi = 0 \quad \text{на} \quad aAC \quad , \quad \psi = J_0 \quad \text{на} \quad bBDd \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{на} \quad ab \quad \text{и} \quad cd \qquad (3.2')$$

Отметим, что использование потенциала ψ сводит задачу, во-первых, к решению одного уравнения и, во-вторых, имеются участки границы с первым краевым условием. Последнее особенно существенно в случае, если на ab и cd задавать ψ как функцию x, считая электроды идеально-секционированными, что приводит к первой краевой задаче на всей границе для уравнения (3.I). К разностному решению таких краевых задач обращались авторы работ [II], [I2]. В работе [II] задача Пуанкаре (задача с косой производной на всей границе) сводится к задаче Гильберта. В работе [I2] оцениваются операторы повышенного порядка точности, шаблон которых на границе содержит много точек.

п.3.I. Особенностью уравнения (3.I) является присутствие в его коэффициентах множителя $1/\sigma$, в котором величина σ может обращаться в нуль внутри некоторого заранее неизвестного участка области. В этом случае удобно ввести в рассмотрение наряду с функцией ψ новые зависимые переменные, имеющие смысл потоков

$$W_x = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad W_y = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.I) в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} - b_x W_x + b_y W_y + f = 0 \qquad (3.4)$$

$$b_x = \sigma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right) \quad , \quad b_y = \sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right) \quad , \quad f = \frac{\partial}{\partial x}(v_x H) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y H)$$

Краевое условие (3.2′) в новых переменных переходит в

$$W_y = \Omega W_x \qquad (3.5)$$

п.3.2. Перейдем к разностной аппроксимации (3.3)-(3.5). Пусть счетная область покрыта разностной сеткой с шагами h_x, h_y по направлениям x и y соответственно. Каждый узел сетки (i,j) имеет координаты

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i h_x, \quad i = 0, 1, \ldots, N \\ y_j &= y_0 + j h_x, \quad j = 0, 1, \ldots, M \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Будем относить значения функции ψ_{ij} к узлам разностной сетки значения, W_{xij} и W_{yij} к центрам интервалов между узлами $(i-1,j),(i,j)$ и между $(i,j-1),(i,j)$ соответственно (фиг.3). Значения σ_{ij}, V_{xij}, V_{yij} и H_{ij} отнесем к центрам ячеек.

Во внутренних узлах разностной сетки равенства (3.3) аппроксимируем со вторым порядком точности $O(h^2)$ следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \psi_{ij} - \psi_{i+1j} &= S_{x\,i+1j}\, W_{x\,i+1j} \\ \psi_{ij} - \psi_{ij+1} &= S_{y\,ij+1}\, W_{y\,ij+1} \end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$S_{x\,i+1,j} = 0.5\, h_x (\sigma_{ij} + \sigma_{ij-1}), \quad S_{y\,ij+1} = 0.5\, h_y (\sigma_{ij} + \sigma_{i-1,j})$$

если $j=0$, или $j=M$, тогда $S_{x\,i+1j} = h_x \sigma_{i0}$ или $S_{x\,i+1j} = h_x \sigma_{iM-1}$

Дифференциальное уравнение (3.4) также с точностью $O(h^2)$ аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{h_x}(W_{x\,i+1j} - W_{xij}) + \frac{1}{h_y}(W_{y\,ij+1} - W_{yij}) + 0.5\,(b_{x\,i+1j} W_{x\,i+1j} + b_{xij} W_{xij})$$
$$+ 0.5\,(b_{y\,ij+1} W_{y\,ij+1} + b_{yij} W_{yij}) + f_{ij} = 0 \qquad (3.8)$$

$$b_{x\,ij} = -\frac{1}{h_y}\,\frac{\sigma_{i-1j}+\sigma_{i-1j-1}}{2}\left(\frac{\Omega_{i-1j}}{\sigma_{i-1j}} - \frac{\Omega_{i-1j-1}}{\sigma_{i-1j-1}}\right)$$

$$b_{y\,ij} = \frac{1}{h_x}\,\frac{\sigma_{ij-1}+\sigma_{i-1j-1}}{2}\left(\frac{\Omega_{ij-1}}{\sigma_{ij-1}} - \frac{\Omega_{i-1j-1}}{\sigma_{i-1j-1}}\right)$$

$$f_{ij} = -\frac{1}{2h_x}\left(v_{x\,ij-1}H_{ij-1} + v_{x\,ij}H_{ij} - v_{x\,i-1j-1}H_{i-1j-1} - v_{x\,i-1j}H_{i-1j}\right) -$$

$$-\frac{1}{2h_y}\left(v_{y\,i-1j}H_{i-1j} + v_{y\,ij}H_{ij} - v_{y\,i-1j-1}H_{i-1j-1} - v_{y\,ij-1}H_{ij-1}\right)$$

п.3.3. Обратимся к аппроксимации краевых условий (3.2), (3.2) в граничных узлах. Условие (3.2), соответствующее первой краевой задаче, выполняется точно

$$\psi_{ij} = \nu_{ij} \tag{3.9}$$

Для аппроксимации (3.2′) воспользуемся разностным аналогом уравнения (3.I) в граничной точке I3 . Так, после аппроксимации (3.I) в точке $(i,0)$ на участке ab (фиг.4) получим следующее равенство

$$-\frac{1}{h_x}\left(W_{x\,i+1\,0} - W_{x\,i0}\right) - \frac{2}{h_y}W_{y\,i1} - \frac{2}{h_y}\,\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i0} - \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{i0} + f_{i0} = 0 \tag{3.10}$$

Заменив в (3.I0) $\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i0}$ согласно краевому условию (3.2) на $\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i0}$ получим

$$\frac{1}{h_x}\left(W_{x\,i+1,0} - W_{x\,i0}\right) - \frac{2}{h_y}W_{y\,i,1} - \frac{2}{h_y}\left\{\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0} + \frac{h_y}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0}\right\} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{i0} + f_{i0} = 0$$

Отсюда, пользуясь равенством

$$\left[\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0} + \frac{h_y}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0} = \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i,1/2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{i0} + O(h^2) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_{i-1\,0}W_{x\,i0} + \Omega_{i0}W_{x\,i+1,0}\right) + O(h^2)$$

приходим к следующей аппроксимации краевого условия (3.2) с помощью уравнения (3.I)

$$-\frac{1}{h_x}\left(W_{x\,i+1,0}-W_{x\,i0}\right)-\frac{2}{h_y}W_{y\,i1}+\frac{1}{h_y}\left(\Omega_{i-1,0}W_{x\,i0}+\Omega_{i0}W_{x\,i+1,0}\right)+\frac{1}{h_x}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i0}-\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1,0}\right]\frac{\sigma_{i-1,0}+\sigma_{i0}}{2}W_{y\,i1}=f_{i0} \qquad (3.11)$$

Равенство (3.II) аппроксимирует в точке $(i,0)$ дифференциальное уравнение (3.I) с первым порядком $O(h)$, но этого оказывается достаточно, чтобы аппроксимировать со вторым порядком $O(h^2)$ краевое условие (3.2)

Аналогично равенство

$$-\frac{1}{h_x}\left(W_{x\,i+1\,M}-W_{x\,iM}\right)+\frac{2}{h_y}W_{y\,iM-1}-\frac{1}{h_y}\left[\Omega_{i-1\,M-1}W_{x\,iM-1}+\Omega_{iM-1}W_{x\,i+1\,M-1}\right]+$$

$$+\frac{1}{h_x}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{iM-1}-\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1\,M-1}\right]\frac{\sigma_{i\,M-1}+\sigma_{i\,M-1}}{2}W_{y\,iM}=f_{iM} \qquad (3.11')$$

аппроксимирует краевое условие на cd.

п.3.4. Таким образом, получаем разностную краевую задачу (3.7) -(3.9), (3.II), (3.II') для определения сеточных функций ψ_{ij}, W_{xij} и W_{yij}. Эту задачу назовем задачей I. От нее можно перейти к разностной краевой задаче только для функции ψ_{ij}, если с помощью (3.7) исключить из (3.9), (3.II), (3.I2) потоки W_{xij}, W_{yij}. В результате получим, что (3.I) аппроксимируется выражением

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-}\psi_{\bar x}\right)_x-\left(\frac{1}{\sigma_-}\psi_{\bar y}\right)_y+\frac{1}{2}\left(p_-\psi_{\bar x}+p_+\psi_x\right)-\frac{1}{2}\left(q^-\psi_{\bar y}+q^+\psi_y\right)+f=0$$

$$p_-=\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{\bar y}, \quad q^-=\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{\bar x} \qquad (3.12)$$

Краевые условия на $aADd$ и $bBCc$

$$\psi_{ij} = \nu \qquad (3.13)$$

на ab

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-}\psi_{\bar x}\right)_x - \frac{2}{h_y\sigma_+}\psi_y + \frac{1}{h_y}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-10}\psi_{\bar x} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i0}\psi_x\right] - q^+\psi_y + f_{i0} = 0 \qquad (3.14)$$

и на cd

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-}\psi_{\bar x}\right)_x + \frac{2}{h_y\sigma_-}\psi_{\bar y} - \frac{1}{h_y}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1M-1}\psi_{\bar x} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{iM-1}\psi_x\right] - q^-\psi_{\bar y} + f_{iM} = 0 \qquad (3.15)$$

Обозначения использованные здесь показаны на фиг.5, если $j=0$ или $j=M$, то $\sigma_- = \sigma_{i0}$ или $\sigma_- = \sigma_{i1-1}$ соответственно.

Равенства (3.I2)-(3.I5) составляют разностную краевую задачу, эквивалентную задаче I. Будем ее называть задачей II. Задача I более удобна в алгоритмическом плане, а задача II удобнее для исследования свойств разностного оператора.

п.3.5. При замене дифференциальной задачи разностной, желательно требовать от разностного оператора сохранение свойств дифференциального оператора. В § 2 показано, что дифференциальный оператор положителен и его "энергия" определяется величиной

$$(Au,u) = \iint_G \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \qquad (3.16)$$

Потребуем, чтобы оператор A разностной краевой задачи II также был положителен и аппроксимировал энергию дифференциального оператора. Предварительно сформулируем задачу II в стандартных обозначениях. Совокупность внутренних узлов обозначим ω_h, а граничных γ_h. Тогда (3.I2) запишем в виде

$$A_\omega y = f \qquad \text{на} \quad \omega_h \qquad (3.17)$$

а (3.13)-(3.15) – в виде

$$A_\gamma y = f \qquad \text{на} \quad \gamma_h$$

Окончательно во внутренних узлах ω_h имеем

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \left(\frac{1}{\sigma_-} y_{x_2}\right)_{x_2} + \frac{1}{2}\left(p_- y_{\bar{x}_1} + p_+ y_{x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(q^- y_{\bar{x}_2} + q^+ y_{x_2}\right) + f = 0 \qquad (3.19)$$

на участке границы ab в точках $(i,0)$

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \frac{2}{h_2\sigma_+} y_{x_2} + \frac{1}{h_2}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i0} y_{x_1} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1,0} y_{\bar{x}_1}\right] - q^+ y_{x_2} + f = 0 \qquad (3.20)$$

на cd точках (i,M)

$$-\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \frac{2}{h_2\sigma_-} y_{\bar{x}_2} - \frac{1}{h_2}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{iM-1} y_{x_1} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1M-1} y_{\bar{x}_1}\right] - q^- y_{\bar{x}_2} + f = 0 \qquad (3.21)$$

на $aADd$ и $bBCc$

$$y = \nu \qquad (3.22)$$

Найдем "энергию" оператора для однородных функций на участках границы с I-ой краевой задачей

$$(Ay, y) = \sum_{\omega_h} y A_\omega y h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h} y A_\gamma y h_1 h_2 \qquad (3.23)$$

В первом слагаемом (3.23) суммирование ведется по всем внутренним узлам

$$\sum_{\omega_h} y A_\omega y h_1 h_2 = \sum_{i=1,\, j=1}^{N-1,\, M-1} y A_\omega y h_1 h_2 \qquad (3.24)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что горизонтальные участки границы полностью заняты электродами, то есть ab совпадает с AB и cd совпадает с CD. Тогда суммирование во втором

слагаемом ведется только по AB и CD

$$(A_\gamma y,y)=\frac{1}{2}\sum_{\gamma_h} yA_\gamma y h_1h_2=\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{N-1} yA_\gamma y h_1h_2\Big]_{j=0}+\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{N-1} A_\gamma y y h_1h_2\Big]_{j=M} \quad (3.25)$$

Используя разностные формулы дифференцирования и суммирования по частям [3] получаем

$$\sum_{i=1,j=1}^{N-1,M-1} yA_\omega y h_1h_2=\sum_{i=1,j=1}^{N,M-1}\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2h_1h_2+\sum_{i=1,j=1}^{N-1,M}\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_2})^2h_1h_2-$$

$$-\sum_{i=1}^{N-1}\Big[\frac{1}{\sigma_-}y_{\bar x_2}y\Big]_{j=M}h_1+\sum_{i=1}^{N-1}\Big[\frac{1}{\sigma_+}y_{x_2}y\Big]_{j=0}h_1-\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}(p_+)_{\bar x_1}y^2+ \quad (3.26)$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}(q_+)_{\bar x_2}y^2+\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^+y^2\big]_{j=0}+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^-y_{\bar x_2}y\big]_{j=M}+$$

$$+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^+y_{x_2}y_0\big]_{j=0}-\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^-y^2\big]_{j=M}$$

Аналогично суммирование вдоль границы дает

$$(A_\gamma y,y)=\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2\Big]_{j=0}-h_1\sum_{i=1}^{N-1}\Big[\frac{1}{\sigma_+}y_{x_2}y\Big]_{j=0}-$$

$$-\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^+y^2\big]_{j=0}-\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^+y_{x_2}y\big]_{j=0}+\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2\Big]_{j=M}+$$

$$+h_1\sum_{i=1}^{N-1}\Big[\frac{1}{\sigma_-}y_{\bar x_2}y\Big]_{j=M}+\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^-y^2\big]_{j=M}-\frac{h_1h_2}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\big[q^-y_{\bar x_2}y\big]_{j=M}. \quad (3.27)$$

Учитывая, что $(q_+)_{\bar x_2}=(p_+)_{\bar x_1}$, для энергии разностного оператора получаем

$$(Ay,y)=(A_\omega y,y)+(A_\gamma y,y)=\sum_{i=1,k=1}^{N,M-1}\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2h_1h_2+\sum_{i=1,k=1}^{N-1,M}\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_2})^2h_1h_2+$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2\Big]_{j=0}+\sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{1}{\sigma_-}(y_{\bar x_1})^2\Big]_{j=M}\Big)\frac{h_1h_2}{2} \quad (3.28)$$

Это означает, что оператор A положителен и его энергия аппроксимирует энергию дифференциального оператора $\mathcal{A}$.

п.3.6. Получим разностную краевую задачу (3.19) - (3.22), используя функционал (2.48). Введем разностный аналог

$$\Phi_h = h_1 h_2 \sum_{i=0,k=0}^{N-1,M-1} \Big\{ \frac{1}{\sigma_{ik}} \Big[(u_{x_1} v_{x_1})_{ik} + (u_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1})_{i+1k+1} + (u_{x_2} v_{x_2})_{ik} + (u_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2})_{i+1k+1} \Big]$$

$$+ \frac{1}{2} \Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{ik} \Big[(u_{x_2} v_{\bar{x}_1})_{ik} + (u_{x_2} v_{\bar{x}_1})_{i+1k} + (u_{\bar{x}_2} v_{x_1})_{ik+1} + (u_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_1})_{i+1k+1} \Big] -$$

$$- \frac{1}{2} \Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{ik} \Big[(u_{x_1} v_{x_2})_{ik} + (u_{\bar{x}_1} v_{x_2})_{i+1k} + (u_{x_1} v_{\bar{x}_2})_{ik+1} + (u_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_2})_{i+1k+1} \Big] +$$

$$+ (\bar{f} \bar{v})_{ik} \Big\} \qquad (3.29)$$

Здесь

$$(\bar{f} \cdot \bar{v})_{ik} = \frac{1}{16} (v_{ik} + v_{i+1k} + v_{i+1k+1} + v_{ik+1})(f_{ik} + f_{i+1k} + f_{i+1k+1} + f_{ik+1})$$

Нетрудно проверить, что разностный функционал Φ_h аппроксимирует Φ со вторым порядком точности, т.е.

$$\Phi(u,v) - \Phi_h(u, v_h) = O(h_1^2 + h_2^2)$$

Здесь сеточная функция v_h совпадает в каждом узле сетки с v.

Будем искать сеточную функцию y такую, чтобы

$$\Phi_h(y, v_h) = 0 \qquad (3.30)$$

для любой $v \in C_1^2$.

Покажем, что задача (3.30) эквивалентна разностной краевой задаче(3.19)-(3.22).Действительно, преобразуя выражение для Φ_h, получим

$$\Phi_h = \sum_{i,k=1}^{N-1,M-1} \Big\{ v_{ik} - \Big(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\Big)_{x_1} - \Big(\frac{1}{\sigma^-} y_{\bar{x}_2}\Big)_{x_2} + \frac{1}{2}\big(p_+ y_{x_1} + p_- y_{\bar{x}_1}\big) -$$

$$- \frac{1}{2}\big(q^- y_{\bar{x}_2} + q^+ y_{x_2}\big) + f_{ik} \Big\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1,j=0}^{N-1} v_{i0} \Big\{ - \Big(\frac{1}{\sigma_{i-10}} y_{\bar{x}_1}\Big)_{x_1} -$$

$$- \frac{1}{h_2}\Big(\frac{1}{\sigma^+}\Big)_{i0} y_{x_2} - q^+ y_{x_2} + \frac{1}{h_2}\Big[\Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{i-10} u_{\bar{x}_1} + \Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{i0} u_{x_1}\Big] + f_{i0} \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1,j=M}^{N-1} v_{iM} \Big\{ - \Big(\frac{1}{\sigma_{i-1M-1}} u_{\bar{x}_1}\Big)_{x_1} + \frac{1}{h_2}\Big(\frac{1}{\sigma^+}\Big)_{iM-1} u_{x_2} - q^+ u_{x_2} -$$

$$- \frac{1}{h_2}\Big[\Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{i-1M-1} u_{\bar{x}_1} + \Big(\frac{\Omega}{\sigma}\Big)_{iM-1} u_{x_1}\Big] + f_{iM} \Big\} \qquad (3.31)$$

Откуда, пользуясь произвольностью v_h, получаем (3.19)-(3.22).

Обратимся к вопросу об аппроксимации решения и дифференциальной задачи (2.44) - (2.47) решением y разностной задачи (3.19) - - (3.22) эквивалентной (3.30). Так как $\Phi(u,v) = \Phi_h(y, v_h) = 0$ для любых $v \in C_1^2$, то справедливо тождество

$$\Phi_h(u-y, v_h) = \Phi_h(u, v_h) = \Phi_h(u, v_h) - \Phi(u,v) \qquad (3.32)$$

Последняя часть равенства есть погрешность аппроксимации функционала Φ. Предположим, что она имеет порядок $O(h^m)$, где $h = \max(h_1, h_2)$ в любой ячейке (i , j), т.е.

$$\Phi_h(u, v_h) - \Phi(u,v) = \sum_{ij} K_{ij} h^m h_1 h_2 \qquad (3.33)$$

Функция K равномерно по h ограничена в области G и зависит, вообще говоря, от производных u и v, существование которых предполагается.

С другой стороны, согласно (3.31),

$$\Phi_h(u,v_h)-\Phi(u,v)=\sum_{ik} v_{ik}(A_h u-f)h_1h_2=\sum_{ik} v_{ik}\psi_{ik}h_1h_2 \qquad (3.34)$$

где ψ_{ik} – погрешность аппроксимация дифференциального оператора $\mathcal{A}$ разностным оператором A, построенным выше.

Выберем $v\in C_1^2$, такую что $v=v_{ik}$ в узле (i,k) и равную нулю во всех остальных узлах. Тогда из (3.33) и (3.34) следует, что

$$\tilde{K}_{ik}h^m=v_{ik}(A_h u-f)$$

где $\tilde{K}_{ik}$ есть сумма конечного числа слагаемых K_{ik}, не зависящего от шага разностной сетки. Так как v_{ik} произвольно, а Au не зависит от v, то $\tilde{K}_{ik}=v_{ik}\overline{K}_{ik}$, где $\overline{K}_{ik}$ зависит уже только от решения u и равномерно ограничена по h. Поэтому

$$\psi_{ik}\le \max \bar{K}h^m=O(h^m)$$

Проведенное рассмотрение не зависит от конкретного вида оператора $\mathcal{A}$ и распространяется на более общий случай, отмеченный в п.2.8.

Полученная оценка для погрешности аппроксимации ψ будет использована ниже при доказательстве сходимости разностной задачи в п.3.9.

Как и в § 2 можно показать, что оператор A^*, сопряженный A (с однородными граничными условиями) получается обращением знака Ω.

Заметим, что для разностного аналога I имеем

$$I_h(y,y) = (Ay,y) = (A^*y,y) > 0$$

при $y \neq 0$

Отсюда следует положительность A и A^*, а также существование и единственность разностных краевых задач как для A, так и для A^*.

п.3.7. При использовании методов переменных направления для решения многомерных эллиптических и параболических уравнений требуется решать последовательность одномерных разностных краевых задач. После введения, согласно (3.7), новой неизвестной функции потока W одномерная разностная задача принимает вид

$$A_\ell W_\ell - B_\ell W_{\ell+1} - C_\ell y_\ell = -F_\ell \qquad (3.35)$$

$$S_\ell W_\ell = y_{\ell-1} - y_\ell \qquad (3.36)$$

Схема (3.35), (3.36) удовлетворяет принципу максимума [3], если $A_\ell > 0$, $B_\ell > 0$, $C_\ell > 0$, $S_\ell > 0$, т.е. решение y_ℓ монотонно. Что касается коэффициентов C_ℓ и S_ℓ, то для эллиптических и

параболических задач всегда имеет место $C_\ell > 0$, $S_\ell > 0$. Однако коэффициенты A_ℓ, B_ℓ для несамосопряженного эллиптического оператора при наличии первых производных могут стать отрицательными. Действительно, аппроксимируя первые производные центральными разностями, получаем

$$A_\ell = A_{1\ell} + h a_\ell \quad , \quad B_\ell = B_{1\ell} + h b_\ell$$

где $A_{1\ell} > 0$, $B_{1\ell} > 0$, а a_ℓ и b_ℓ могут иметь произвольный знак. Следовательно, (3.35) и (3.36) удовлетворяют принципу максимума, вообще говоря, при ограничении на шаг . Одна из возможностей избежать этого нежелательного ограничения состоит в использовании односторонней аппроксимации первой производной с учетом знака ее коэффициента. Однако при этом получается

первый порядок аппроксимации.

В работе [14] предложен прием названный монотонизацией, позволяющий для уравнений с несамосопряженным эллиптическим оператором получать схемы удовлетворяющие принципу максимума, сохраняя при этом второй порядок аппроксимации. Проведем монотонизацию (3.35) следуя [14]. Введем

$$a_i^+ = 0.5(a_i + |a_i|), \quad a_i^- = 0.5(a_i - |a_i|)$$

тогда в (3.35) коэффициенты при потоках W_i и W_{i+1} можно представить

$$A_i = A_{1i} + h a_i = \frac{A_{1i}}{1 + h\frac{|a_i|}{A_{1i}}} + 2h a_i^+ + O(h^2)$$

$$B_i = B_{1i} + h b_i = \frac{B_{1i}}{1 + h\frac{|b_i|}{B_{1i}}} + 2h b_i^+ + O(h^2)$$

Следовательно, заменяя коэффициент A_i на

$$\tilde{A}_i = \frac{A_{1i}}{1 + h\frac{|a_i|}{A_{1i}}}$$

и B_i на

$$\tilde{B}_i = \frac{B_{1i}}{1 + h\frac{|b_i|}{B_{1i}}}$$

получим, сохраняя второй порядок аппроксимации, схему удовлетворяющую принципу максимума

$$\tilde{A}_i W_i - \tilde{B}_i W_{i+1} - C_i y_i = -F_i$$

$$W_i = S_i(y_{i-1} - y_i)$$

Возникает вопрос, как влияет монотонизация на энергию разностного оператора.

Выясним его сначала на примере одномерного оператора

$$\mathcal{L}u = \frac{d}{dx} k \frac{du}{dx} + r \frac{du}{dx} \qquad (3.37)$$

Оператор немонотонной разностной схемы имеет вид

$$\Lambda y = (k_- y_{\bar{x}})_x + 0.5(r_- y_{\bar{x}} + r_+ y_x) = (k - 0.5h|r_-| y_{\bar{x}})_x + r_- y_{\bar{x}} + r_+^+ y_x \qquad (3.38)$$

После монотонизации получаем

$$\tilde{\Lambda} y = \left(\frac{k_-}{1 + 0.5h \frac{|r_-|}{k_-}} y_{\bar{x}} \right)_x + r_- u_{\bar{x}} + r_+^+ u_x \qquad (3.39)$$

Таким образом,

$$\tilde{\Lambda} y = \Lambda y + \left(\frac{0.25\, h^2 |r_-|^2}{k_- - 0.5h|r_-|} y_{\bar{x}} \right)_x \qquad (3.40)$$

откуда получаем, что монотонизация схемы дает приращение "энергии" соответствующему разностному оператору $\sim h^2$

$$(\tilde{\Lambda} y, y) = (\Lambda y, y) + h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{0.25\, h^2 |r_-|^2}{k_- + 0.5h|r_-|} (y_{\bar{x}})^2 \qquad 3.41$$

Аналогичным образом можно получить, что монотонизованный оператор соответствующий разностной схеме, определяемой уравнениями (3.19)-(3.22) имеет "энергию"

$$(\tilde{A} y, y) = h_1 h_2 \Bigg\{ \sum_{i=1, k=1}^{N, M-1} \frac{1}{\sigma_-} \left(1 + \frac{0.25\, h_1^2 |p_-|^2 (\sigma_-)^2}{1 + 0.5 h_1 |p_-| \sigma_-}\right) (y_{\bar{x}_1})^2 + \sum_{i=1, j=1}^{N-1, M-1} \frac{1}{\sigma_-} \Bigg(1 +$$

$$+ \frac{0.25\, h_2^2 |q_-|^2 (\sigma_-)^2}{1 + 0.5\, h_2 |q_-| \sigma_-} (y_{\bar{x}_2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_-} \left(1 + \frac{0.25\, h_1^2 \Omega^2}{h_2 (h_2 + 0.5 h_1 \Omega)}\right) (y_{\bar{x}_1})^2 \right]_{j=0} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_-} \left(1 + \frac{0.25\, h_1^2 \Omega^2}{h_2 (h_2 + 0.5 h_1 \Omega)}\right) (y_{\bar{x}_1})^2 \Bigg]_{j=M} \qquad (3.42)$$

п. 3.8. Покажем, что оператор A обладает еще более сильным свойством чем положительность, а именно A – положительно определен. Для этого достаточно, чтобы выполнялось неравенство $0 < \sigma \leq \sigma_0$: Действительно из (3.28) следует, что

$$(Ay, y) \geqslant \frac{h_1 h_2}{\sigma_0} \left\{ \sum_{i=1, j=1}^{N, M-1} (y_{\bar{x}_1})^2 + \sum_{i=1, j=1}^{N-1, M} (y_{\bar{x}_2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[(y_{\bar{x}_1})^2 \right]_{j=0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[(y_{\bar{x}_1})^2 \right]_{j=M} \right\} \quad (3.43)$$

Воспользуемся тем, что $y_{0j} = 0$ при $j = 0, \ldots, M$ и, следовательно для любого справедливо равенство

$$y_{ij} = \sum_{l=0}^{i} y_{\bar{x}_1} h$$

откуда в силу неравенства Коши-Буняковского получаем

$$y_{ij}^2 \leq \mathcal{L} \sum_{i=1}^{N} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 \quad (3.44)$$

где $\mathcal{L}$ – длина максимальной стороны прямоугольника $ABCD$. Умножая (3.44) на $h_1 h_2$ и суммируя обе части приходим к неравенству

$$\sum_{i=1, j=1}^{N-1, M-1} y^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left[(y)_{j=0}^2 + (y^2)_{j=M} \right] h_1 h_2 \leq \mathcal{L}^2 \sum_{i=1, j=1}^{N, M-1} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 h_2 +$$

$$+ \frac{\mathcal{L}^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[(y_{\bar{x}_1})_{j=0}^2 + (y_{\bar{x}_1})_{j=M}^2 \right] h_1 h_2$$

Наконец, усиливая его добавлением в правую часть слагаемого $\mathcal{L}^2 \sum_{i=1, j=1}^{N-1, M} (y_{\bar{x}_2})^2 h_1 h_2$, получаем

$$\|y\|^2 \le h_1 h_2 \mathcal{L}^2 \left\{ \sum_{i=1,j=1}^{N,M-1} (y_{\bar{x}_1})^2 + \sum_{j=1,j=1}^{N-1,M} (y_{\bar{x}_2})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x}_1})^2_{j=0} + (y_{\bar{x}_1})^2_{j=M} \right\} \quad (3.45)$$

Сопоставляя (3.43) и (3.45) имеем

$$(Ay, y) \geq \gamma'^2 \|y\|^2 \quad (3.46)$$

где

$$\gamma' = \sqrt{\frac{1}{\sigma_0 \mathcal{L}^2}}.$$

Как следует из п.3.6 монотонизация схемы не меняет положительной определенности.

п. 3.9. Из положительной определенности оператора A следует сходимость решения y разностной задачи к решению u соответствующей дифференциальной задачи. В самом деле введем невязку $z = y - u$ и рассмотрим

$$\|Az\| = \|f - Au\| = \|\psi\|$$

где ψ – погрешность аппроксимации. Согласно (3.40) имеем

$$\gamma \|z\|^2 \le (Az, z) \le \|Az\| \|z\| \text{ или } \|z\| \le \frac{1}{\gamma} \|\psi\| \quad (3.47)$$

Отсюда следует сходимость решения разностной задачи, причем $z \sim O(h^2)$.

п. 3.10. Отметим, наконец, что как и в случае дифференциальной задачи разностный оператор самосопряжен только при $\Omega = 0$. В общем случае $\Omega \neq 0$ разностный оператор A так же как и дифференциальный A разбивается на положительный оператор A_c такой что $(A_c y, y)$ и оператор $A_a = A - A_c$ с нулевой "энергией" $(A_a y, y) = 0$.

§ 4. Решение разностной задачи

п.4.I. В § 3 сформулированы разностная задача I и эквивалентная ей задача II. Представим оператор A задачи II в виде суммы двух операторов

$$A = A_1 + A_2$$

каждый из которых действует по одному направлению. Оператор A_1 во внутренних точках области ω_h для каждого $j = 1, \ldots, M-1$ определяется выражением

$$A_1 y = -\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \left(p_- y_{\bar{x}_1} + p_+ y_{x_1}\right), \quad y_0 = y_N = 0 \qquad (4.1)$$

на границе AB

$$A_1 y = -\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \frac{1}{h_2}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i0} y_{x_1} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-10} y_{\bar{x}_1}\right] \qquad (4.2)$$

$y_0 = y_N = 0$

и на границе CD

$$A_1 y = -\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \frac{1}{h_2}\left[\left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{iM-1} y_{x_1} + \left(\frac{\Omega}{\sigma}\right)_{i-1M-1} y_{\bar{x}_1}\right] \qquad (4.3)$$

$y_0 = y_N = 0$

Оператор A_2 во внутренних точках области ω_h для каждого $i = 1, \ldots, N-1$ определяется выражением

$$A_2 y = -\left(\frac{1}{\sigma_-} y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2} - \left(q^- y_{\bar{x}_2} + q^+ y_{x_2}\right) \qquad (4.4)$$

на границе AB

$$A_2 y = -\left(q_{i0} + \frac{2}{h_2 \sigma_+}\right) y_{x_2} \qquad (4.5)$$

и на границе CD

$$A_2 y = \left(\frac{1}{h_2 \sigma} - q_{iM}\right) y_{\bar{x}_2} \qquad (4.6)$$

п. 4.2. Рассматриваемая разностная задача обладает рядом специфических особенностей. Основные из них состоят в следующем:

I. Величины σ, Ω, v_x, v_y могут быть сильно переменными по пространству.

2. При $\Omega \neq 0$ уравнение схемы содержат первые разности. В силу этого разностный оператор А не является самосопряженным.

3. На горизонтальных участках границы AB и CD аппроксимировано условие "косой производной".

4. Величина σ на некотором заранее неизвестнос участке области может обращаться в нуль.

5. При $\Omega \neq 0$ операторы A_1 и A_2 не являются, вообще говоря, положительно определенными несмотря на то, что "энергия" их суммы (Ay,y), как показано в § 3 не зависит от величины Ω и положительна.

п.4.3. Для решения разностной краевой задачи П использовались следующие три различные итерационные схемы.

а) локально-одномерная схема,

б) продольно-поперечная схема (ППС),

в) схема Дугласа-Рекфорда.

Остановимся более подробно на каждой из этих схем.

Локально-одномерная схема эффективно применяется для решения многомерных нестационарных задач I6 . Всвязи с этим естественно рассмотреть итерационный процесс, основанный на этой схеме

$$(E+\tau_k A_1)\bar{v} = v_k + \tau_k f_1 \qquad (4.7)$$

$$(E+\tau_k A_2)v_{k+1} = \bar{v} + \tau_k f_2 \quad , \quad f = f_1 + f_2 \qquad (4.8)$$

Пусть y -точное решение стационарной разностной задачи

$$Ay = f \ , \quad A_1 + A_2 = A$$

Для невязки

$$z_k = v_k - y \ , \quad \bar{z}_k = v_k - y$$

следует, что

$$(E + \tau_k A_1)\,\bar{z}_k = z_k + \tau_k \psi_1 \qquad (4.9)$$

$$(E + \tau_k A_2)\, z_{k+1} = \bar{z}_k + \tau_k \psi \qquad (4.10)$$

Здесь $\psi_1 = f_1 - A_1 y$, $\psi_2 = f_2 - A_2 y$ – погрешность аппроксимации каждым из уравнений (4.7), (4.8) соответствующих дифференциальных уравнений. Исключая $\bar{z}_k$ и пользуясь свойством суммарной аппароксимации $\psi_1 + \psi_2$, получаем

$$z_{k+1} = \overset{k}{S}_1 \overset{k}{S}_2 z_k - \tau_k^2 \overset{k}{S}_1 \overset{k}{S}_2 \tilde{\psi} \ ,$$

$$\overset{k}{S}_1 = (E + \tau_k A_1)^{-1} \ , \quad \overset{k}{S}_2 = (E + \tau_k A_2)^{-1} ; \ \tilde{\psi} = A_1 \psi_2$$

или, вводя $S_k = S_1 S_2$

$$z_{k+1} = S_k z_k - \tau_k S_k \tilde{\psi}$$

Если A_1 и A_2 положительно определены, т.е.

$$A_1 \geqslant \delta_1 E \ , \ A_2 \geqslant \delta_2 E \ , \ \delta_1 > 0 , \ \delta_2 > 0 \ , \text{ то}$$

$$\|S_k\| \leqslant \|\overset{k}{S}_1\| \, \|\overset{k}{S}_2\| \leqslant \frac{1}{(1 + \tau_k \delta_1)(1 + \tau_k \delta_2)} = q_k < 1$$

при любых $\tau_k \geqslant \tau_0 > 0$.

Последовательно используя рекуррентное соотношение

$$\|z_{k+1}\| \leq q_k \left(\|z_k\| + \tau_k^2 \|\tilde{\psi}\|\right)$$

получаем оценку

$$\|z_k\| \leq \delta_k \|z_0\| + \delta_k \tau_0^2 \|\tilde{\psi}\| + \delta_{k-1} \tau_1^2 \|\tilde{\psi}\| + \ldots + \delta_1 \tau_{k-1}^2 \|\tilde{\psi}\|$$

$$\delta_k = q_k \cdot q_{k-1} \cdots q_1$$

Ограничимся случаем $\tau_k = \tau$, тогда

$$\|z_k\| \leq q^k \|z_0\| + \tau^2 \|\tilde{\psi}\| \frac{q}{1-q} \qquad (4.10)$$

$$q = \frac{1}{(1+\tau\delta_1)(1+\tau\delta_2)} < 1$$

Переходя в (4.10) к пределу при $k \to \infty$ имеем

$$\lim_{k \to \infty} \|z_k\| \leq \tau^2 \|\tilde{\psi}\| \frac{q}{1-q}, \quad q<1$$

Учитывая, что $\frac{q}{1-q} \leq \frac{1}{\tau(\delta_1+\delta_2)}$, приходим к выводу, что

$$\|v - y\| \leq \frac{\tau \|\tilde{\psi}\|}{\delta_1 + \delta_2} \sim O(\tau) \qquad (4.11)$$

где

$$v = \lim v_k \text{ при } k \to \infty$$

Таким образом показано, что для положительно определенных операторов и итерационный процесс (4.7), (4.8) сходится и его предел v отличен на величину $\sim O(\tau)$ от точного решения

у исходной стационарной задачи. Оценим число итераций, необходимое для достижения точного решения y с заданной точностью ε. Как видно из (4.10) оценка погрешности k-той итерации v_k складывается из двух членов-один из них убывает с ростом k, а другой постоянен и равен $\tau^2 \|\tilde{\varphi}\| \frac{q}{1-q} \leq \frac{\tau \|\tilde{\varphi}\|}{\delta_1 + \delta_2}$. Отсюда следует, что необходимым условием достижение точности ε является требование $\tau \sim \varepsilon \left(\frac{\|\tilde{\varphi}\|}{\delta_1 + \delta_2}\right)^{-1} \sim O(\varepsilon)$. Зафиксировав такое τ, получаем число итерций ν, необходимое для того, чтобы первое слагаемое в (4.10) стало меньше $0{,}5\,\varepsilon \|z_0\|$

$$\nu \geq \frac{\|\tilde{\varphi}\|}{(\delta_1 + \delta_2)^2} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Так как аппроксимация дифференциальной задачи разностной $O(h^2)$, то естественно потребовать и $\varepsilon = O(h^2)$. Таким образом, для достижения требуемой точности ε достаточно совершить $\nu = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h}\right)$ итерацмй с постоянным $\tau \sim O(\varepsilon)$.

Соответствующий объем вычислительной работы по порядку величины такой же, как и в методе простой итерации [3].

Значительное сокращение числа итераций может быть достигнуто если положить в основу итерационного процесса продольно поперечную схему [17].

$$(E + \tau_k A_1)\bar{v}_{k+1} = (E - \tau_k A_2) v_k + f_1 \qquad (4.12)$$

$$(E + \tau_k A_2) v_{k+1} = (E - \tau_k A_1)\bar{v}_{k+1} + f_2 \qquad (4.13)$$

При постоянных коэффициентах уравнения эта схема является предпочтительнее всех остальных здесь рассматриваемых и обладает наибольшей скоростью сходимости. В работе [18] получена оценка скорости сходимости ППС в предположении положительной определенности A_1 и A_2. Показано, что в этом случае для уменьшения начальной погрешности в $1/\varepsilon$ раз (ε - заданная точность) достаточно сделать

$$\nu \geq \ln\frac{1}{\varepsilon}\ \ln\frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}$$

итерации. (Здесь $\eta = \delta/\Delta$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$

$$\delta_\alpha \leq \frac{(A_\alpha y, y)}{\|y\|^2} \leq \Delta_\alpha \ , \ \Delta_\alpha, \delta_\alpha \geq 0 \ , \ \alpha = 1,2.$$

при

$$\tau_{opt} = \frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}$$

В частности, для задачи Дирихле при $\varepsilon = O(h^2)$

$$\nu = O\left(\frac{1}{h}\ln\frac{1}{h}\right)$$

п.4.4. Отметим, что для рассматриваемых задач операторы A_1 и A_2 могут оказаться не знакоопределенными. Тем самым вопрос о сходимости итерационного процесса остается открытым. Наряду с этим оценки границ операторов A_1 и A_2 и оптимального итерационного параметра также вырастают в самостоятельную проблему. В связи с этим на практике часто приходится прибегать к сравнению различных алгоритмов с помощью методических расчетов. Ниже обсуждаются результаты таких расчетов, позволяющие сделать некоторые сравнительные выводы о сходимости итерационных процессов. Опробованы три схемы переменных направлений: локально-одно-

мерная схема (4.7), (4.8), продольно-поперечная схема (4.I2), (4.I3).и схема Дугласа-Рекфорда (СДР) [I9]

$$(E+\tau_k A_1)\bar{v}_{k+1} = (E-\tau_k A_2)v_k + f_1 \qquad (4.I4)$$

$$(E+\tau_k A_2)v_{k+1} = \bar{v}_{k+1} + \tau_k A_2 v_k + f_2 \qquad (4.I5)$$

Экспериментальное сравнение ППС (4.I2), (4.I3) и СДР (4.I4),(4.I5 было проведено в случае первой краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f \qquad (4.I6)$$

Правая часть f подбиралась так, чтобы уравнению (4.I6) удовлетворяла функция

$$u = \mu\cdot x(1-x)\cdot y(1-y) \qquad (4.I7)$$

Численное решение (4.I6) было проведено для двух значений $p(x,y)$:

I. $p(x,y) = 0$, $\mu = 4$

2. $p(x,y) = a\sin\gamma x\cdot\sin\gamma y + b$

$$a = 5.5,\ b = 6,\ \gamma = 5\pi,\ \mu = 16$$

Таким образом, в I-ом случае решалось уравнение Пуассона, а во втором в эллиптическом операторе присутствовали первые производные с сильнопеременными коэффициентами. Квадратная область со стороной равной единице была покрыта квадратной сеткой с шагом h = 0,05 (число узлов N = 400). Описанные ниже расчеты проводились при фиксированном ε = 0,00I и различных значениях итерационного параметра τ, который не зависел от номера итерации. Характеристикой качества метода служит зависимость числа итераций ν от τ. На фиг. 6а показана зависимость $\nu(\tau)$ для ППС

(I кривая), СДР (2 кривая) и ЛОС (3 кривая) при $p(x,y)=0$ и M = 4. Из рисунка видно, что наиболее высоким качеством обладает ППС, график которой при всех τ расположен ниже, чем для СДР. Для ЛОС кривая имеет вертикальную ассимптоту при $\tau=\tau_*$. При $\tau>\tau_*$ погрешность ЛОС (см. п. 4.3 формула 4.II) не позволяет достигнуть заданной точности. Очевидно, что с уменьшением ε, значение τ_* убывает. Можно видеть также, что для ППС и СДР число итераций ν при $\tau\leq$ 0.05 резко убывает с ростом τ, а далее изменение ν с ростом τ происходит медленно. Поэтому подбор оптимального значения τ_{opt} не требует большой точности. Во втором случае (несамосопряженный оператор) результат представлен на фиг. 6(б) (I кривая - ППС, 2 кривая - СДР). Прежде всего следует отметить появление критического $\tau=\tau_*$, начиная с которого итерации расходятся. Появление τ_* для ППС может быть связано только с потерей знакоопределенности операторов A_1, A_2 при $p(x,y)\neq 0$ (см. П. 4.3).

Другой особенностью является то, что минимальное число итераций достигается в СДР хотя при малых τ более выгодной является ППС. Это происходит за счет того, что τ_* для СДР оказывается больше чем для ППС. Кроме того, для СДР существует "плато" слабого изменения $\nu(\tau)$, что облегчает выбор величины τ. Поэтому для задач с незнакоопределенными операторами A_1, A_2 наиболее эффективным методом при постоянном τ оказывается схема Дугласа-Рекфорда.

п. 4.5. Отметим, что коэффициенты S_ℓ в (4.30) для рассматриваемых задач могут сильно меняться ($0\leq S_\ell\leq\infty$),причем $S_\ell=\infty$ на заранее неизвестном участке. В этом случае при приме-

нении метода прогонки [5] возникает потеря точности, которая усугубляется дальнейшим дифференцированием решения для вычисления потоков w_{ik}. Использование потокового варианта метода прогонки [20], [21] позволяет обойти эти трудности.

§ 5. Примеры численного решения задач

В настоящем параграфе приведены результаты численного решения некоторых характерных задач. Описание результатов не претендует на полноту и носит иллюстративный характер.

Проблема расчета электрического поля и компонент электрического тока в канале при движении проводящей жидкости в магнитном поле занимает значительное место в теоретических исследованиях, связанных с физическими и прикладными вопросами [2]. В частности, большой интерес представляет изучение различного рода двумерных эффектов в краевых зонах магнитного поля или вблизи электродов. В настоящее время имеется ряд результатов аналитических исследований в этой области [22]. Однако возможности аналитического аппарата ограничены даже при весьма упрощенном подходе рассмотрения задач с постоянными заданными параметрами потока проводящей жидкости. В общем случае переменных коэффициентов в уравнении (3.I) численное решение задачи является практически единственно доступным.

п. 5.I. Рассмотрим течение электропроводной среды с постоянной скоростью

$$v_x = 1 \ , \quad v_y = 0$$

и постоянной электропроводностью $\sigma = 1$

Течение происходит в плоском канале $-\infty \leq x \leq \infty \ , \ 0 \leq y \leq 1$ с параллельными стенками (см. фиг. 7), которые являются идеальным диэлектриком всюду, за исключением участков, занятых сплошными идеальными электродами

$$-0.5 \leq x \leq 0.5$$

Между электродами поддерживается заданная разность потенциалов

$U = 0.7$. Магнитное поле постоянно в электродной зоне и равно H=I, а вне ее спадает по экспоненте с показателем 2 (см. фиг. 7). Параметр Холла постоянен и равен $\Omega = 3$.

Результаты численного решения этой задачи позволяет построить, например, распределение электрических токов, представленное на фиг. 7, а также найти такие энергетические интегральные характеристики, как мощность работы плазмы, электрический к.п.д. и другие. В [23] приведены результаты серии аналогичных расчетов, имеющих целью выяснение влияния распределения по пространству магнитного поля, взаимного расположения магнитного поля и электродов, параметра Холла и др. на картину распределения тока и интегральные энергетические характеристики МГД-каналов.

п. 5.2. Значительный интерес с общефизической и прикладной точек зрения представляет собой явление ионизационной неустойчивости в низкотемпературной, замагниченной плазме [24]. При определенных предположениях принципиальное математическое описание этого явления сводится к решению системы уравнений [25]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)=0 \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right]-n\cdot T\cdot \nu \qquad (5.2)$$

где n - концентрация свободных электронов в единице объема, $\sigma = n/\nu$. В математическом отношении характерной особенностью является сильная зависимость ν от n, что приводит к сильноменяющимся по пространству коэффициентам в уравнении (5.I). Численное решение задачи позволило получить качественную картину и количест-

венные характеристики процесса зарождения и развития страт, наблюдаемых в эксперименте. На фиг. 8 представлены линии уровня $n = 1$ электронной концентрации в момент интенсивного развития страт при значении параметра Холла $\Omega = 10$. Область $n > 1$ (страта) заштрихована. Векторное поле плотности электрических токов показано стрелками. Отчетливо видна тенденция жгутования электрического тока вдоль сильно ионизованной страты. Геометрия задачи ясна из рисунка. Граница области АВСД суть идеальный диэлектрик за исключением идеально секционированных электродов ab и cd, на которых задана постоянная плотность нормального электрического тока $j_y = -1$ В начальный момент времени $t = 0$ концентрация электронов n была распределена равномерно $n = 1$. Связь температуры T и концентрации n электронов задавалась по формуле Саха. Учитывались столкновения электронов с ионами и нейтральными атомами. При дальнейшем развитии процесса распределение концентрации n и электрических токов перестает носить регулярный характер и напоминает турбулентную картину, наблюдаемую в эксперименте.

Более обстоятельное описание результатов численного решения аналогичных задач содержится в [26].

п. 5.3. Приведем в качестве третьего примера результат численного решения двумерной задачи о входе сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле. Явление описывается системой уравнений магнитной газодинамики. Интересует стационарное решение задачи, которое достигается интегрированием нестационарной системы уравнений методом установления. Остановимся на следующей постановке задачи. Имеется канал постоянного сечения $d = 1$. Магнитное поле распределено по пространству следующим образом

$$H = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ e^{15x}, & x < 0 \end{cases}$$

Область решения задачи ограничим сечениями $x = \pm 1{,}5$ (см. фиг.9). На входе в канал (сечение $x = -1{,}5$) задан сверхзвуковой поток газа с параметрами: плотность $\rho = \rho_0$ температура $T = T_0$ скорость $u = u_0$ давление $p = p_0$, постоянная адиабаты $\gamma = 1.12$. Проводимость σ определяется концентрацией электронов цезиевой присадки посчитанной по формуле Саха

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/4} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-1/2} e^{-\frac{I_{cs}}{2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

Основными безразмерными параметрами, характеризующими течение, являются число Маха M и параметр гидромагнитного взаимодействия R_M. В сечении $x = -1{,}5$ они имеют значения $M = 2.92$, $R_M = 0.5$. Установившиеся по времени значения распределенных по пространству параметров приведены на фиг.9. Указано отношение значения параметра на линии уровня к значению соответствующего параметра во входном сечении. Более подробно см. [27]. На фиг.9 показан токовый вихрь, возникающий при входе проводящей среды в магнитное поле. Существование такого вихря известно из решения этой задачи при заданном движении среды, т.е. в приближении $R_M \ll 1$

Из фиг.9, опуская детальную картину, видно, что вход сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле при $R_M = 0.5$ сопровождается его значительным торможением и сжатием к оси. В свою очередь изменение параметров потока приводит к резкому затуханию компоненты тока в зоне постоянного магнитного поля при $x > 0$.

В заключение авторы приносят благодарность И.В. Фрязинову за плодотворные обсуждения, а также Т.А. Горбушиной, Е.Е. Мышецкой, В.А. Равинской за создание программ и проведение расчетов.

Литература

I. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред.

2. Саттон Шерман. Основы технической магнитной газодинамики.

3. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. Москва. 1968.

4. Ф.М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. ИЛ. Москва, 1958.

5. Векуа П.Н. Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа. ДАН, 1953, 92, № 6.

6. Векуа П.Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением и теории оболочек. Мат. сборник, 31(73), 2, 1952.

7. Векуа П.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат. 1948.

8. Randwert, Eigenwert- Probleme aus die Theorie die elastischen Platten. Math. Ann. Bd 98, 1928

9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, гл. П. Гостехиздат, 1945, спец.гл. УП.

10. Михлин С.Г. Курс математической физики. Изд-во Наука, Москва, 1968.

11. Клабухова Л.С. Приближенный метод решения задачи Гильберта и Пуанкаре. Вычислительная математика, сб. 3, 1958.

12. Волков Е.А. О методе сеток для задачи с косой и нормальной производной. Журн.вычисл.мат.и мат.физ., т. I, № 4. 1961.

13. Самарский А.А. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Журн.вычисл.матем. и матем. физ., т. 2, № I, 1962.

14. Самарский А.А. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Журн.вычисл.мат.и матем.физ., т. 5, № 3, 1965.

15. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математичеокой физике. Изд-во СО АН СССР. 1962.

16. А.А. Самарский. Об одном экономичном разностном методе решения параболического уравнения в произвольной области. Журн.вычисл.матем.и матем.физ., 2, № 5, 1965.

17. D.W. Peaceman, H.H. Rachford The equation? Solution of parabolic and elliptic equation. J. Soc. Industr. Appl. Math. 1953, N1

18. А.А. Самарский. Некоторые вопросы теории разностных схем. Журн.вычисл.матем.и матем.физ., 1965, 5, № 4.

19. J. Douglas, H.H. Rachford. On numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, Trans. Amer. Soc. 1956, N2.

20. Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский. Потоковый вариант метода прогонки. Журн.вычисл.матем.и матем.физ., 1968, 8, № 3.

21. Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский. Потоковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. Журн.вычисл.матем.и матем.физ., 1969, 9, № I.

22. Дж. Шерклиф. Теория электромагнитного измерения расхода. Дополнение. Изд-во Мир, 1965.

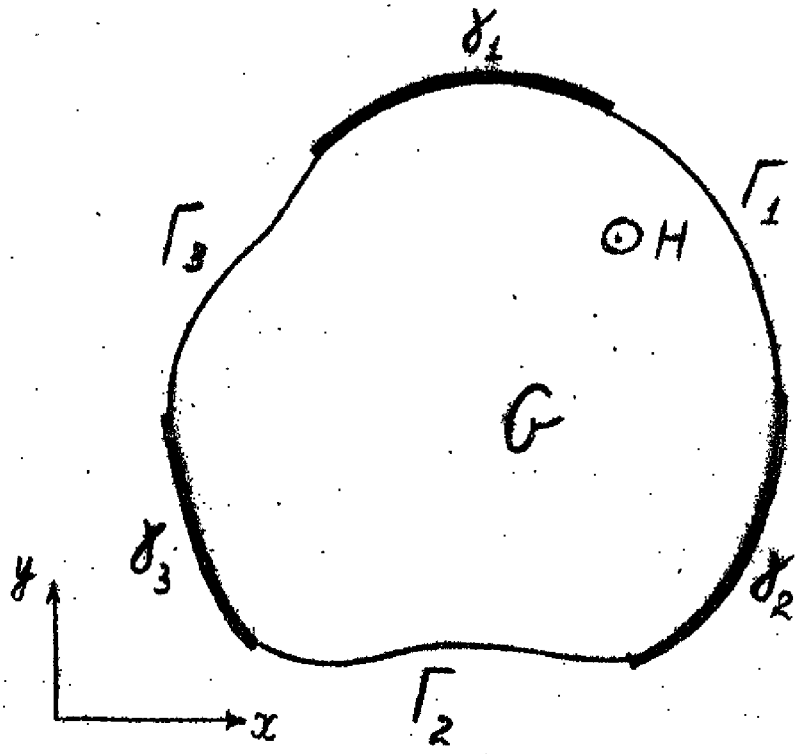
23. А.В. Губарев, Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский. Численное исследование пространственного распределения плотности электрического тока в МГД-каналах. Отчет ИПМ АН СССР и ИАЭ имени И.В. Курчатова. 1969.

24. Е.П. Велихов, А.М. Дыхне, И.Д. Доклад на УП Международной конференции по ионизационным явлениям в газах. Белград. 1965.

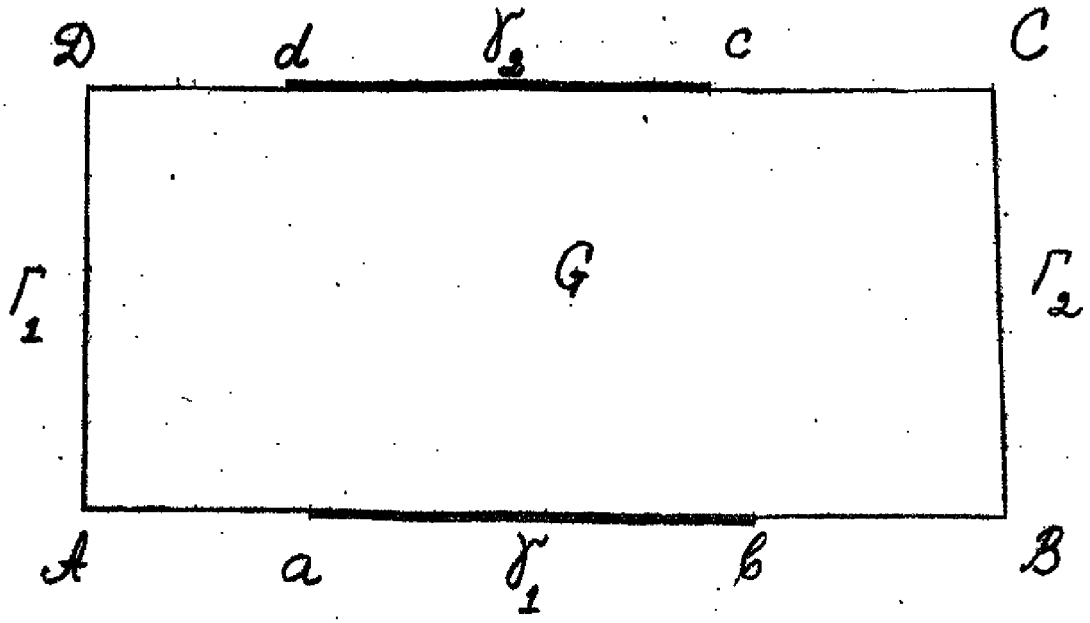
25. А.А. Веденов, Е.П. Велихов. Proceedings of a Symp. of MHD, Salzburg, 1966.

26. Е.П. Велихов, Л.М. Дегтярев, А.А. Самарский, А.П. Фаворский. ДАН, 1969, 184, № 3.

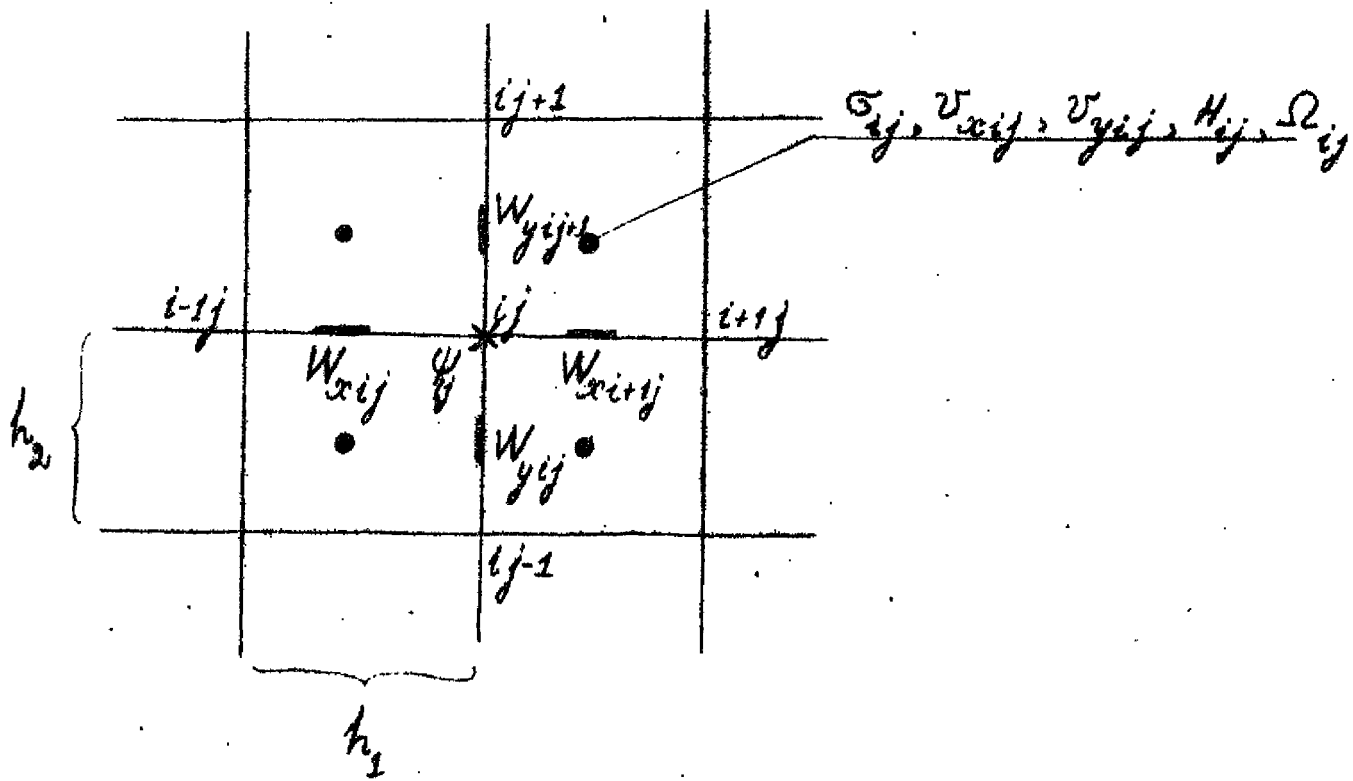
27. А.В. Губарев, Л.М. Дегтярев, А.А. Самарский, А.П. Фаворский. Некоторые двумерные эффекты сверхзвукового течения проводящего газа в неоднородном магнитном поле. Препринт ИПМ АН СССР. 1969.


γ_1
Γ_1
Γ_3
H
G
γ_3
γ_2
y
x
Γ_2

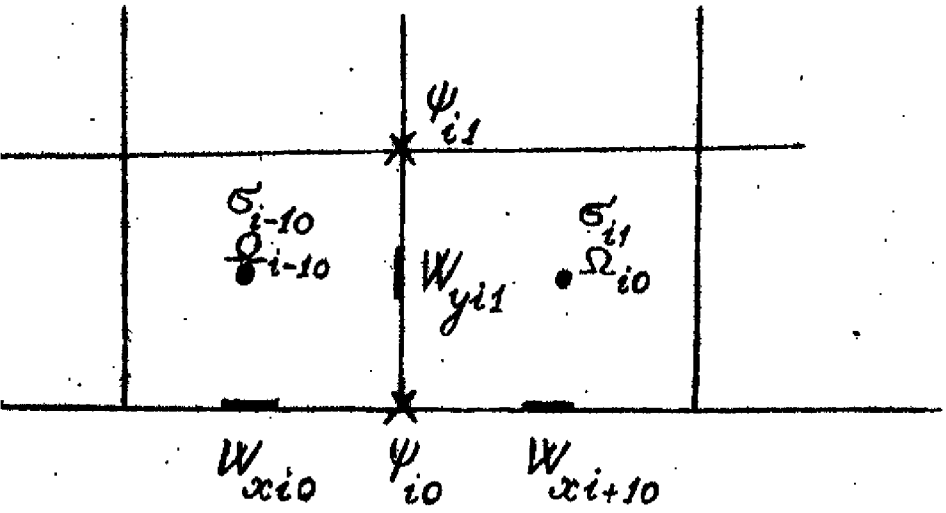
Фиг. 1


D
d
γ_2
c
C
G
Γ_1
Γ_2
A
a
γ_1
b
B

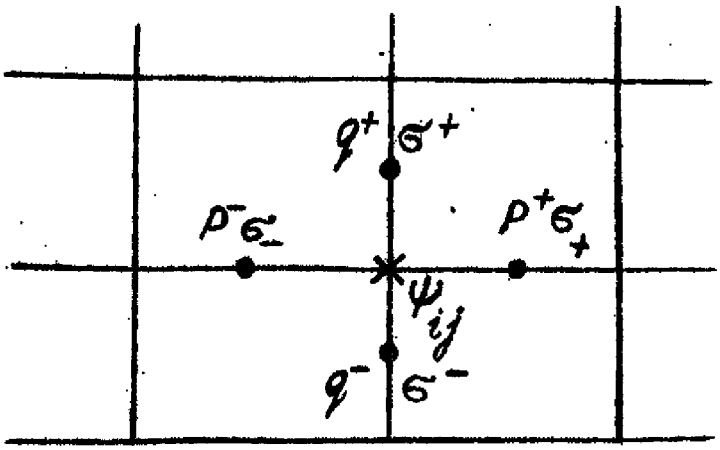
Фиг. 2


ij+1
$\sigma_{ij}, v_{xij}, v_{yij}, H_{ij}, \Omega_{ij}$
W_{yij+1}
i-1j
ij
i+1j
W_{xij}
ψ_{ij}
W_{xi+1j}
h_2
W_{yij}
ij-1
h_1

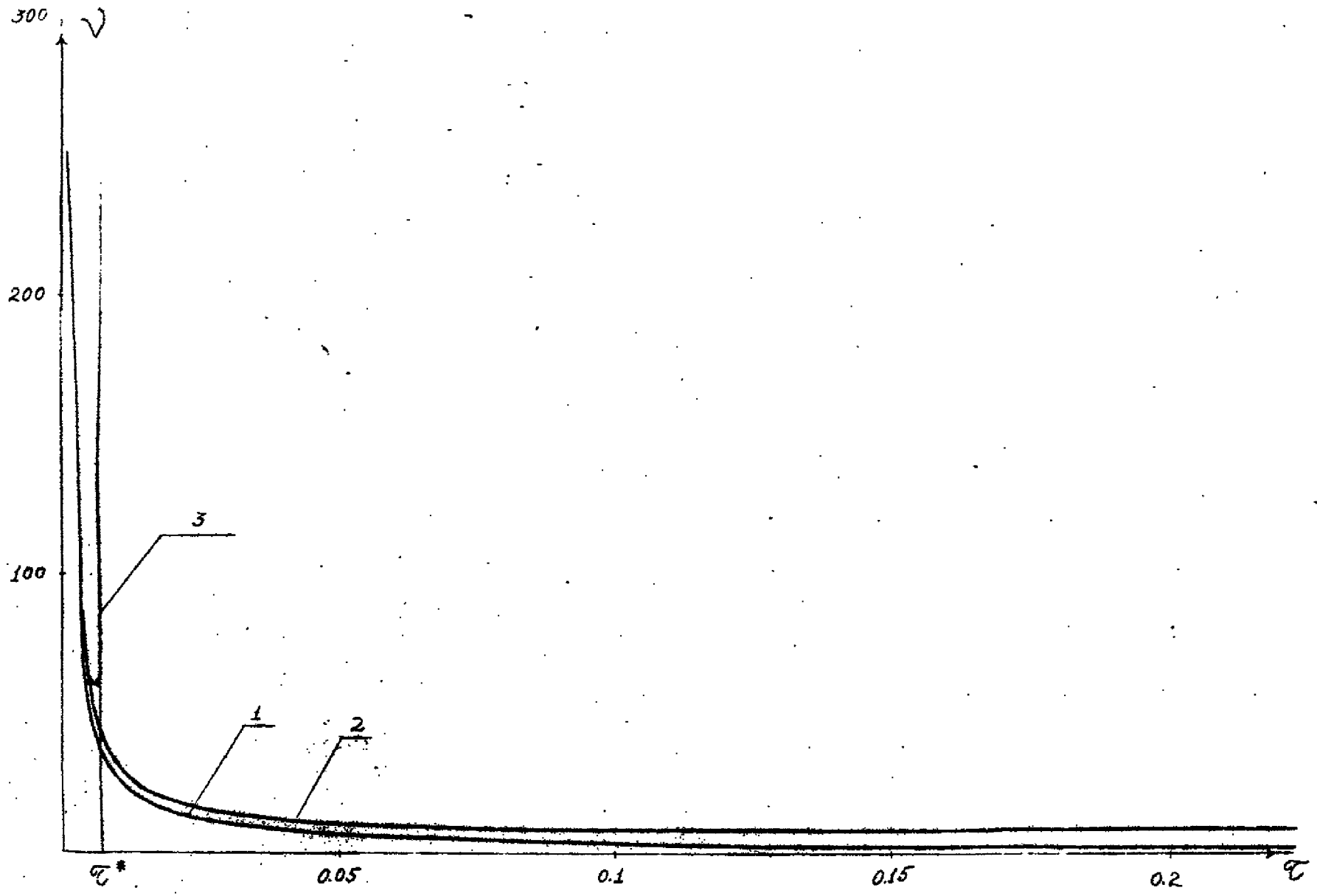
Фиг. 3


ψ_{i1}
σ_{i-10}
Ω_{i-10}
W_{yi1}
σ_{i1}
Ω_{i0}
W_{xi0}
ψ_{i0}
W_{xi+10}

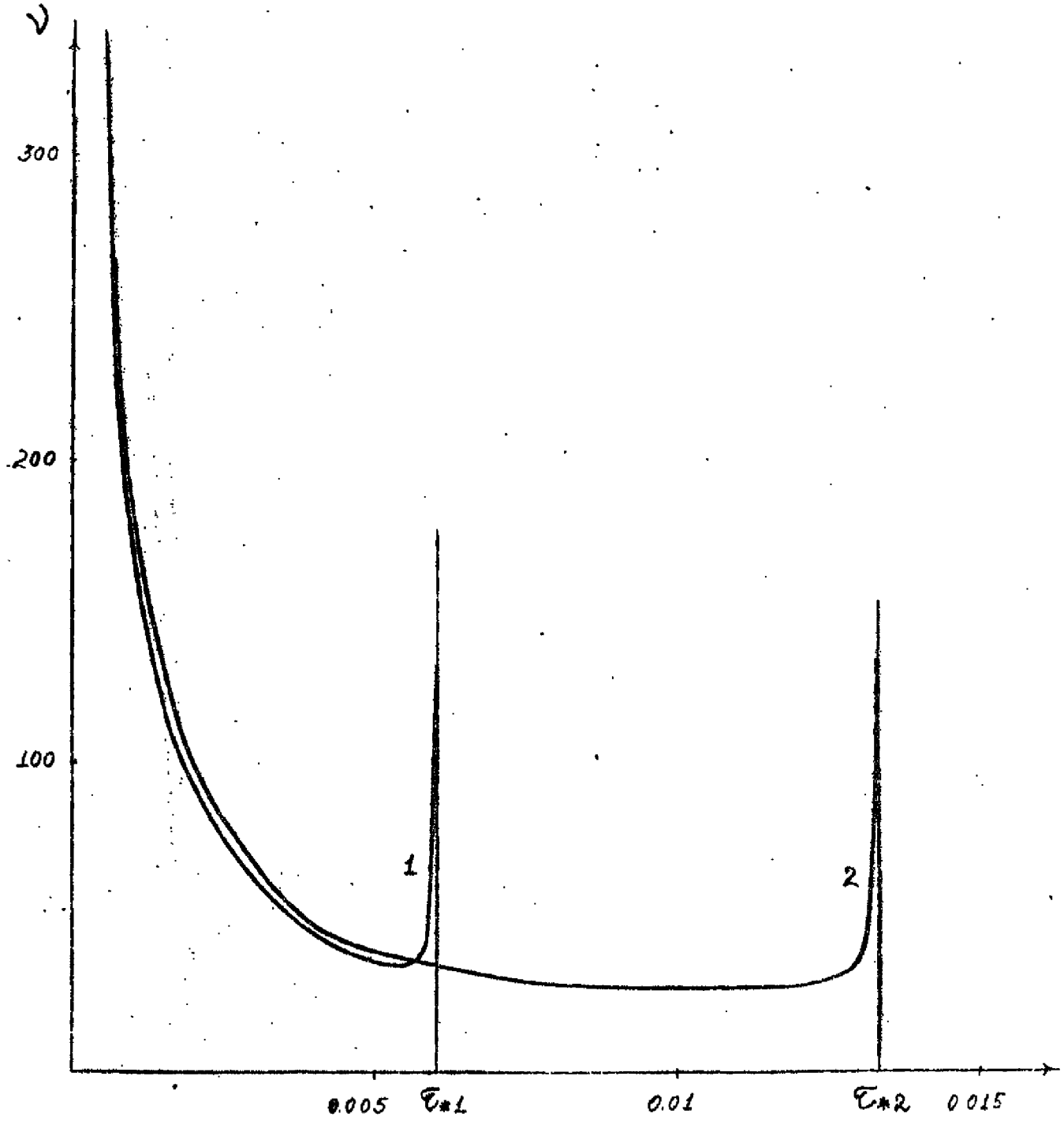
Фиг. 4


q^+ σ^+
$p^-\sigma_-$
$p^+\sigma_+$
ψ_{ij}
q^- σ^-

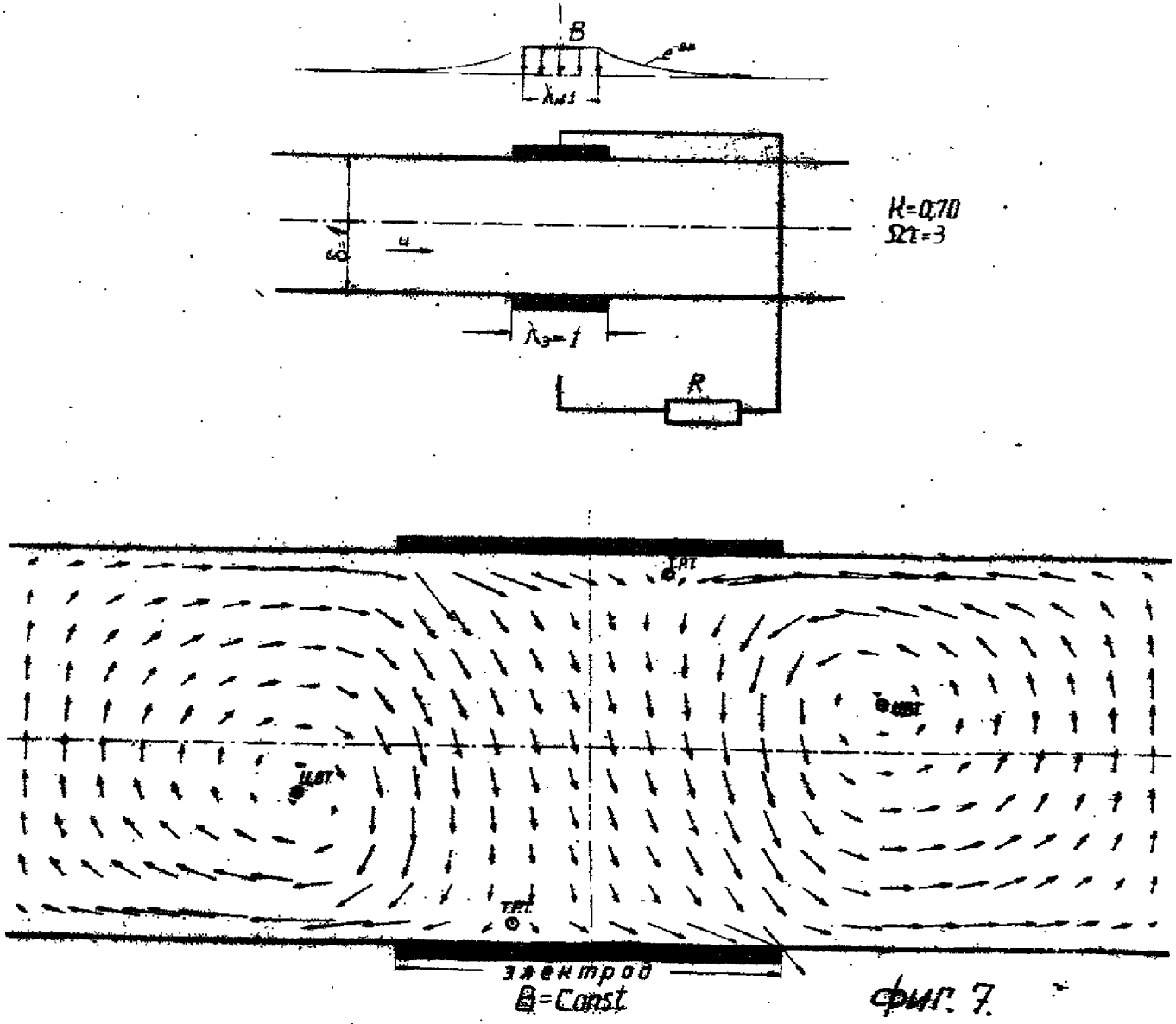
Фиг. 5



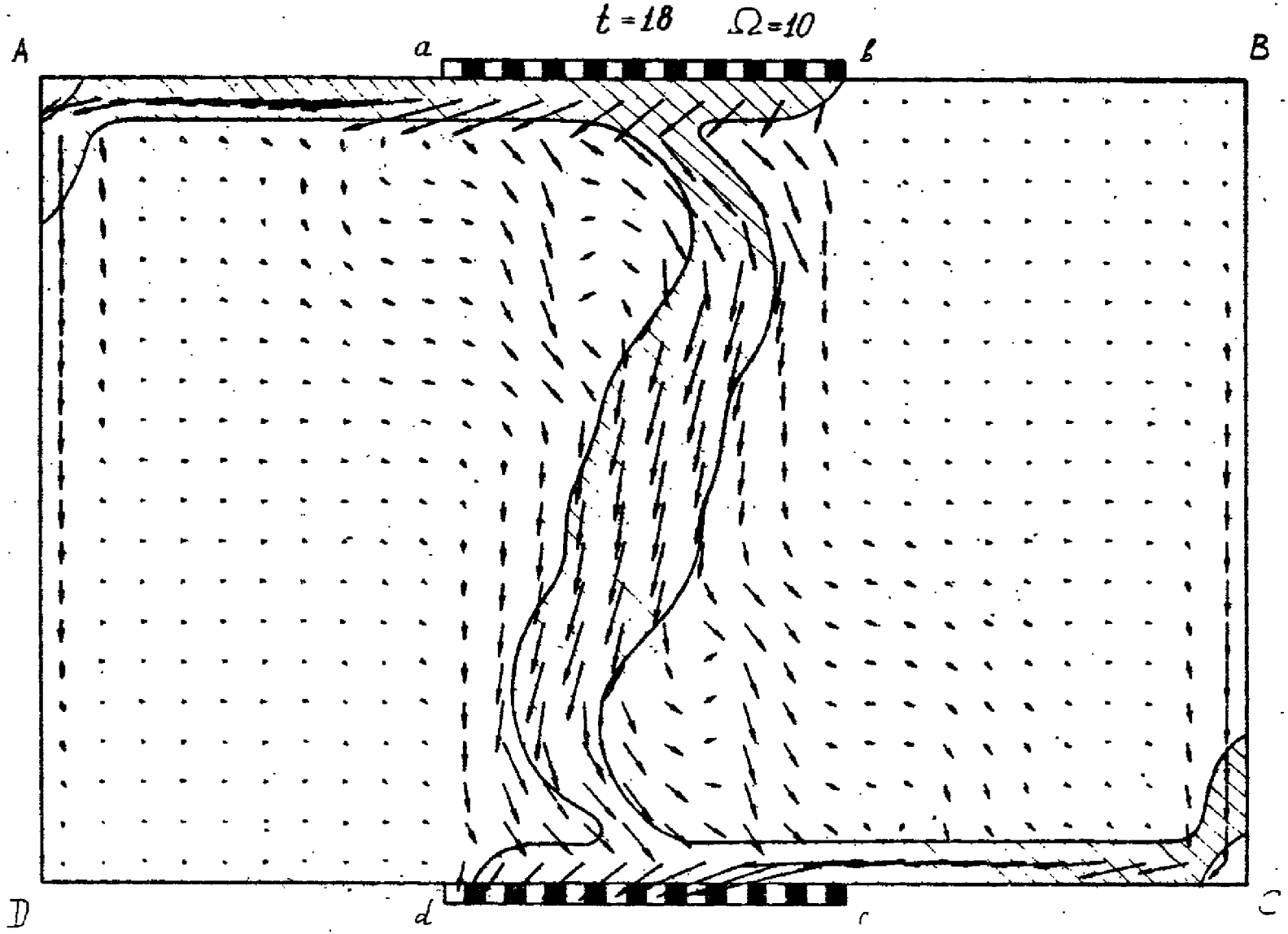
Фиг. 6а



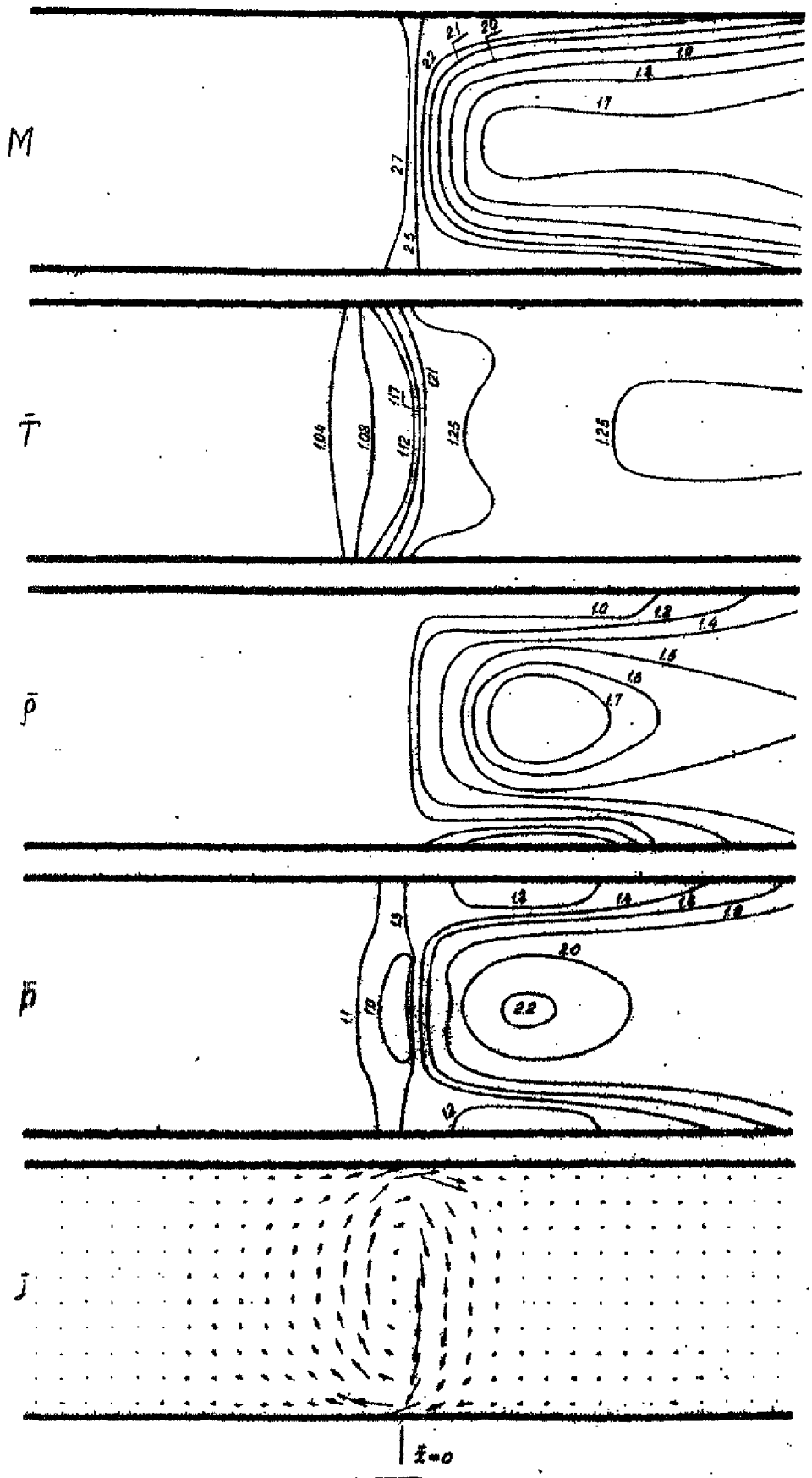
Фиг. 6б


B
$\lambda_{м1}$
$\delta=1$
u
$K=0{,}70$
$\Omega\tau=3$
$\lambda_э=1$
R
I.PT
II.BT
III.BT
T.PT
электрод
B=Const

фиг. 7.



фиг. 8



фиг. 9