Доклады Академии наук СССР
1969. Том 186, № 1

УДК 518.517.944/947 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ИТЕРАЦИОННЫЕ ДВУХСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Методами работ ([1-3]) исследуются двухслойные (одношаговые) итерационные схемы для решения уравнения $Au = f$, где A — линейный несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве (г.п.). Неявные стационарные итерационные схемы сводятся к явным схемам, для которых решаются задачи о минимуме нормы оператора перехода и получаются значения для итерационных параметров в зависимости от объема информации об операторе A. Найдены оценки скорости сходимости метода минимальных поправок для случая $A \neq A^*$. Основное внимание уделяется выбору итерационных параметров.

1. Пусть H — вещественное г.п., $(\ ,\ )$ — скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}$ — норма в H. Всюду будем рассматривать операторы A, B, R и т. д., отображающие H в H. Обозначения те же, что и в ([1]).

Рассмотрим уравнение первого рода

$$Au = f, \tag{1}$$

где A — положительный $(A > 0)$ несамосопряженный оператор $(A \neq A^*)$; u — искомый, f — заданный векторы из H. Для решения уравнения (1) будем пользоваться двухслойной итерационной схемой

$$B(y_{k+1} - y_k)/\tau + Ay_k = f,\ k = 0, 1, \ldots,$$
$$\text{задан любой вектор } y_0 \in H, \tag{2}$$

где k — номер итерации, B — самосопряженный положительный оператор

$$B = B^* > 0. \tag{3}$$

Все рассуждения проводятся в предположении, что начальное приближение y_0 — произвольный вектор из H.

Неявная схема (2), согласно ([1]), эквивалентна явной схеме

$$(x_{k+1} - x_k)/\tau + Cx_k = \varphi,\quad k = 0, 1, 2, \ldots,\quad x_0 = B^{1/2}y_0 \in H \tag{4}$$

при $x_k = B^{1/2}y_k$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $\varphi = B^{-1/2}f$, так что

$$\|x_k\| = \|y_k\|_B = \sqrt{(By_k, y_k)}.$$

Схема (4), очевидно, соответствует уравнению $Cv = \varphi$, где

$$v = B^{1/2}u,\quad C = B^{-1/2}AB^{-1/2},\quad \varphi = B^{-1/2}f. \tag{5}$$

Для оценки скорости сходимости итераций рассмотрим однородное уравнение с произвольным $x_0 \in H$

$$x_{k+1} = Sx_k,\quad k = 0, 1, \ldots,\ S = E - \tau c, \tag{6}$$

где S — оператор перехода явной схемы, E — единичный оператор. Уравнение (6) дает

$$\|x_{k+1}\| \leqslant \|S\|\|x_k\|,\quad \|x_n\| \leqslant \|S^n\|\,\|x_0\| \leqslant \|S\|^n\|x_0\|.$$

Из предыдущего ясно, что достаточно ограничиться изучением явной схемы, получить для нее оценку $\|S\|$ и выбрать из условия минимума $\|S\|$. Выбор параметра τ и оценка скорости сходимости итераций являются главной задачей теории.

2. Рассмотрим сначала случай, когда заданы нижние грани операторов C и C^{-1}:

$$C \geqslant \gamma_1 E \quad \text{или} \quad (Cx, x) \geqslant \gamma_1 \|x\|^2, \quad \gamma_1 > 0 \quad \text{для всех } x \in H, \tag{7}$$

$$C^{-1} \geqslant \frac{1}{\gamma_2} E \quad \text{или } \|Cx\|^2 \leqslant \gamma_2 (Cx, x), \quad \gamma_2 > 0 \quad \text{для всех } x \in H. \tag{8}$$

Из ([3]) непосредственно следует

$$\|S\| = \|E - \tau C\| \leqslant \sqrt{1-\xi}, \quad \xi = \gamma_1 / \gamma_2 \quad \text{при} \quad \tau = 1/\gamma_2. \tag{9}$$

Для оператора перехода $S = (E + \omega A)^{-1}(E - \omega A) = E - \tau C$, $\tau = 2\omega$, $C = (E + \omega A)^{-1} A = (A^{-1} + \omega E)^{-1}$, $A \geqslant \delta E$, $A^{-1} \geqslant \frac{1}{\Delta} E$, $\Delta > \delta > 0$ в ([3]) была получена оценка

$$\|S\| \leqslant \sqrt{(1 - \sqrt{\eta}) / (1 + \sqrt{\eta})}, \quad \eta = \delta / \Delta \ \text{при} \ \omega = 1 / \sqrt{\delta\Delta}, \quad \tau = 2\omega. \tag{10}$$

Пользуясь (9) для $C = (A^{-1} + \omega E)^{-}$ и учитывая, что $\gamma_1 = \delta / (1 + \omega\delta)$, $\gamma_2 = \Delta / (1 + \omega\Delta)$, находим $\omega = 1/\Delta$ и $\|S\| \leqslant [(1-\eta)/(1+\eta)]^{1/2}$. Сравнение с (10) показывает, что (9) является слишком грубой оценкой (улучшить (9) при условиях (7), (8), к сожалению, не удается).

Замечание. Для неявной схемы (2) условия (7) и (8) эквивалентны условиям

$$(Ax, x) \geqslant \gamma_1 (Bx, x), \quad (B^{-1}Ax, Ax) \leqslant \gamma_2 (Ax, x) \quad \text{для всех } x \in H. \tag{11}$$

3. Объем информации относительно C (A и B) может быть увеличен заданием трех чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ вместо двух. При этом оценка $\|S\|$ улучшается и переходит в оценку для $\|S\|$ при $C = C^*$. В этом пункте рассмотрим случай комплексного г.п. $\tilde{H}$.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{H}$ — комплексное г.п. со скалярным произведением (,) и нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$; C — линейный оператор из $\tilde{H}$ в $\tilde{H}$; $C = C_0 + iC_1$, $C_0 = \operatorname{Re} C = \frac{1}{2}(C + C^*)$, $C_1 = \operatorname{Im} C = (C - C^*)/2i$.*

Если выполнены условия

$$\gamma_1 E \leqslant C_0 \leqslant \gamma_2 E, \quad \gamma_2 > \gamma_1 > 0, \quad \|C_1\| \leqslant \gamma_3, \quad \gamma_3 \geqslant 0, \tag{12}$$

где $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, γ_3 — заданные числа, то при $\tau = \bar{\tau}$, равном

$$\bar{\tau} = \tau_0 (1 - \varkappa^2) / (1 + \varkappa\rho_0), \quad \varkappa = \gamma_3 / \sqrt{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3^2}, \quad 0 \leqslant \varkappa < 1,$$
$$\rho_0 = (\gamma_2 - \gamma_1) / (\gamma_2 + \gamma_1), \tag{13}$$

для нормы оператора перехода схемы (6) верна оценка

$$\|S\| = \|E - \bar{\tau} C\| \leqslant \bar{\rho}, \quad \text{где} \quad \bar{\rho} = (\rho_0 + \varkappa) / (1 + \varkappa\rho_0) < 1. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть $A = A_0 + iA_1$ и $B = B^* > 0$ заданы на $\tilde{H}$ и*

$$\gamma_1 B \leqslant A_0 \leqslant \gamma_2 B, \quad \gamma_2 > \gamma_1 > 0, \quad |(A_1 y, y)| \leqslant \gamma_3 (By, y)$$
$$\text{для всех } y \in \tilde{H}. \tag{15}$$

Тогда для решения задачи (2) при $\tau = \bar{\tau}$ имеют место априорные оценки

$$\|y_n - u\|_B \leqslant \bar{\rho}^n \|y_0 - u\|_B, \quad \|y_{n+1} - y_n\|_B \leqslant \bar{\rho}^n \|y_1 - y_0\|_B, \tag{16}$$

где $\bar{\rho}$ дается формулой (14).

Эта теорема уточняет оценки работы ([5]), где дано приближенное решение задачи о нахождении $\inf\|S\|$ в конечномерном случае.

Лемма 1. *Пусть A, R, B заданы на $\tilde{H}$, $R = R^* > 0$, $B = B^* > 0$,*

$$c_1 R \leqslant A_0 \leqslant c_2 R, \quad c_2 \geqslant c_1 > 0, \quad |(A_1 y, y)| \leqslant c_3 (Ry, y)$$
$$\text{для всех } y \in \tilde{H}, \tag{17}$$

$$c_3 \geqslant 0, \quad \mathring{\gamma}_1 B \leqslant R \leqslant \mathring{\gamma}_2 B, \quad \mathring{\gamma}_2 \geqslant \mathring{\gamma}_1 > 0.$$

Тогда выполнены условия (15) с $\gamma_1 = c_1 \mathring{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2 \mathring{\gamma}_2$, $\gamma_3 = c_3 \mathring{\gamma}_2$.

4. Пусть H — вещественное г.п., C задан на H, $C = C_0 + C_1$, где $C_0 = \frac{1}{2}(C + C^*)$, $C_1 = \frac{1}{2}(C - C^*)$, так что $(C_1 x, x) = 0$ для всех $x \in H$.

Если выполнены условия (12), то справедливо оценка (14) при тех же значениях $\tau = \bar{\tau}$ и $\rho = \rho$. Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть A, B заданы на H, $B = B^* > 0$, $A = A_0 + A_1$, $A_0 = {}^1/_2(A - A^*)$, $A_1 = {}^1/_2(A - A^*)$ и выполнены условия*

$$\gamma_1 B \leqslant A_0 \leqslant \gamma_2 B, \quad (B^{-1}A_1 y,\ A_1 y) \leqslant \gamma_3^2 (By,\ y), \tag{18}$$

где $\gamma_2 \geqslant \gamma_1 > 0$, $\gamma_3 \geqslant 0$ — заданные числа. Тогда при $\tau = \bar{\tau}$ для схемы (2) *верны оценки* (16).

Лемма 2. *Пусть $R = R^* > 0$, $B = B^* > 0$, $A = A_0 + A_1$, $A_0 = A_0^* > 0$, A, B, R заданы на H,*

$$c_1 R \leqslant A_0 \leqslant c_2 R, \quad (R^{-1}A_1 y,\ A_1 y) \leqslant c_3^2 (Ry,\ y) \quad \text{для всех } y \in H. \tag{19}$$

Тогда выполнены условия (18) *с постоянными*

$$\gamma_1 = c_1 \mathring{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = c_2 \mathring{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = c_3 \mathring{\gamma}_3 \quad (c_2 \geqslant c_1 > 0,\ c_3 \geqslant 0).$$

Операторы $A \neq A^*$ и R, для которых выполнена одна из групп условий (7) — (8), (19) или (17), будем называть энергетически эквивалентными (эн. экв.) (ср. с ([4]), где условия эквивалентности по спектру содержат 4 постоянных). Если $A = A^*$, то условия (7) — (8), (19) или (17) переходят в условия $c_1 R \leqslant A \leqslant c_2 R$.

5. Априорные оценки (9) и (16) позволяют получить оценку числа итераций, достаточного для нахождения по схеме (2) приближенного решения задачи (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ (см. ([2])). При практическом применении теории надо выбрать оператор B и вычислить эти постоянные (см. ([3–5])). В качестве B можно взять факторизованные операторы (2):

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2) \quad \text{при } R_2 = R_1^* > 0, \quad R = R_1 + R_2; \tag{20}$$

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2) \quad \text{при } R_1 = R_1^* > 0, \quad R_2 = R_2^* > 0, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1. \tag{21}$$

Постоянные $\mathring{\gamma}_1$, $\mathring{\gamma}_2$ и параметры ω, ω_1, ω_2 найдены в ([2]). Остается вычислить постоянные c_1, c_2, c_3 в условиях (11) — (18) и (17), где $R = R_1 + R_2$, затем найти $\gamma_1 = c_1 \mathring{\gamma}_1$, $\gamma_2 = c_2 \mathring{\gamma}_2$, $\gamma_3 = c_3 \gamma_2$ и воспользоваться теоремами 1, 2, 3.

6. Двухслойную итерационную схему

$$B(y_{k+1} - y_k) / \tau_{k+1} + Ay_k = f, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{22}$$

можно трактовать как метод поправок:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} w_k, \quad w_k = B^{-1} r_k, \quad r_k = Ay_k - f, \tag{23}$$

где w_k — поправка, r_k — невязка для k-й итерации.

Если постоянные γ_1, γ_2, γ_3 априори неизвестны (либо вычисляются слишком грубо), то целесообразно для вычисления параметров τ_{k+1} использовать метод скорейшего спуска ([6], [7]).

$$\tau_{k+1} = (w_k,\ r_k) / (Aw_k,\ w_k) \tag{24}$$

или метод минимальных поправок, полагая

$$\tau_{k+1} = (Aw_k,\ w_k) / (B^{-1}Aw_k,\ Aw_k) \tag{25}$$

(для явной схемы, $B = E$ он совпадает с методом минимальных невязок, предложенным в ([8])).

Если $A = A^*$, то метод (24) сходится в H_A, а метод (25) в H_{A^2} с той же скоростью, что и схема (2) при постоянном $\tau = \tau_0$, $\tau_0 = 2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$: $\|Ay_n - f\| \leqslant \rho_0^n \|Ay_0 - f\|$, $\rho_0 = (1 - \xi) / (1 + \xi)$, $\xi = \gamma_1 / \gamma_2$ (см. ([8])). В случае несамосопряженного A применим лишь метод минимальных поправок. Он сходится с той же скоростью, что и при постоянных $\tau = \bar{\tau}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (18). *Тогда для метода минимальных поправок* (23), (25) *справедливы оценки*

$$\|Ay_n - f\| \leqslant \bar{\rho}^n \|Ay_0 - f\| \quad \text{при } n = 1,\ 2, \ldots, \tag{26}$$

где $\bar{\rho}$ определяется по формуле (14).

При доказательстве теоремы 4 неявная схема (22) сводится к явной схеме $x_{k+1} = x_k - \tau_{k+1}(Cx_k - \varphi)$, $x_k = B^{1/2}y_k$, $\varphi = B^{1/2}f$, после чего используется следующая фундаментальная

Лемма 3. *Пусть C — несамосопряженный оператор с границами $\gamma_2 > 0$ и $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 E \leqslant C \leqslant \gamma_2 E$, и пусть существуют числа $\tau_* > 0$ и $\rho_* \in (0, 1)$, удовлетворяющие условиям*

$$\gamma_1\tau_* \leqslant 1 - \rho_*^2 \leqslant \gamma_2\tau_*, \tag{27}$$

такие, что справедлива оценка

$$\|E - \tau_* C\| \leqslant \rho_* < 1. \tag{28}$$

Тогда имеет место неравенство

$$(Cx, x)^2 \geqslant (1 - \rho_*^2)\|Cx\|^2\|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in H. \tag{29}$$

Условия (27) и (28) с $\tau_* = \bar{\tau}$, $\rho_* = \rho$, в силу теоремы 3 выполнены при (18). Лемма 3 позволяет для неявного метода скорейшего спуска при $A = A^*$ получить оценку

$$\|y_n - u\|_A \leqslant \rho_0^n \|y_0 - u\|_A, \quad \text{если } \gamma_1 B \leqslant A \leqslant \gamma_2 B. \tag{30}$$

7. Поправка w_k в (21) есть решение уравнения $Bw_k = r_k$. Оператор B задается либо конструктивно (например, B есть факторизованный оператор (20) или (21)) либо строится в результате некоторого вычислительного процесса. Это имеет место в одном из вариантов метода поправок — двухступенчатом методе ([4], [5]). Пусть $R = R^*$ — зн. экв. с A оператор, т. е. выполнена одна из групп условий (7)—(8) или (19) при $A \neq A$ или условия $c_1 R \leqslant A \leqslant c_2 R$ при $A = A^*$. Для вычисления поправок w_k уравнение

$$Rw = r_k, \quad r_k = Ay_k - f, \tag{31}$$

решается либо прямым методом (тогда $B = R$), либо итерационным методом с разрешающим оператором T_m при нулевом начальном приближении $w^{(0)} = 0$. После m итераций имеем $w^{(m)} - w = -T_m w$, где $\|T_m\| \leqslant q < 1$, w — точное решение (31). Полагая $w_k = w^{(m)}$ и подставляя $w = (E - T_m)^{-1}w^{(m)}$ в (31), получаем $Bw_k = r_k$, где $B = R(E - T_m)^{-1}$. Если $T_m = T_m^*$, операторы T_m и R перестановочны, то $B = B^* > 0$ и $\mathring{\gamma}_1 = 1 - q$, $\mathring{\gamma}_2 = 1 + q$ (см. ([4], [5])).

Для нахождения итераций $y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} w_k$ можно полагать: 1) $\tau_{k+1} = \tau_0$ при $A = A^*$; тогда $\gamma_1 = (1 - q)c_1$, $\gamma_2 = (1 + q)c_2$; 2) $\tau_{k+1} = \bar{\tau}$ при $A \neq A^*$; тогда $\gamma_1 = (1 - q)c_1$, $\gamma_2 = (1 + q)c_2$, $\gamma_3 = (1 + q)c_3$.

Если c_1, c_2, c_3 неизвестны, то можно пользоваться двухступенчатым вариационным методом: 1) при $A = A^*$ τ_{k+1} вычислять по формуле (24); 2) при $A \neq A^*$ вычислять τ_{k+1} по формуле (25). Из (25) видно, что двухступенчатый метод минимальных поправок (23), (25) требует последовательного решения при помощи внутренних итераций T_m двух уравнений: $Rw = r_k$, $w^{(0)} = 0$, $w_k = w^{(m)}$: $Rv = Aw_k$, $v^{(0)} = 0$, $v_k = B^{-1}Aw_k = v^{(m)}$.

Зная w_k и $B^{-1}Aw_k = v_k = v^{(m)}$, из (25) найдем τ_{k+1}. В силу теоремы 4 имеет место оценка (26), в которой ρ определяется по формуле (14).

По аналогии с ([2]), пользуясь оценками для $\|S\|$, нетрудно получить априорные оценки, выражающие устойчивость итерационных схем по правой части.

Поступило
2 X 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). [2] А. А. Самарский, ДАН, 185, № 3 (1969). [3] А. А. Самарский, Журн. вычислительн. матем. и матем. физ., 6, № 4, 665 (1966). [4] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 138, № 3, 522 (1961); 163, № 6, 1314 (1965); Журн. вычислительн. матем. и матем. физ., 6, № 1 (1966); 6, № 4, 777 (1966). [5] J. E. Gunn, J. Soc. Industr. and Appl. Mathem. Numer Anal., ser. B, 2, № 1, 24 (1965). [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [7] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960. [8] М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, Матем. сборн., 31 (73), 315 (1952).