ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

А.В. Губарев Л.М. Дегтярев
А.А. Самарский А.П. Фаворский

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Москва 1969г.

Аннотация

В работе рассматривается взаимодействие сверхзвукового потока электропроводного газа с неоднородным магнитным полем. Изучается вход потока в однородное магнитное поле и выход из него. Двумерная магнитогазодинамическая задача решается численно методом установления. Для входа в резконарастающее магнитное поле построена модельная задача, результаты решения которой согласуются с результатами численных расчетов. Показано, что взаимодействие сверхзвукового проводящего потока с неоднородным магнитным полем при конечных значениях R_M приводит к существенному торможению потока и нарушению его одномерной структуры.

§ I. Введение.

В настоящей работе рассматривается взаимодействие сверхзвукового потока электропроводного газа с неоднородным магнитным полем. Двумерные эффекты, сопровождающие такого рода течения, представляют как общефизический, так и прикладной интерес. Достаточно указать, например, взаимодействие проводящего газа с магнитным полем в магнитогидродинамических каналах.

I.I. Будем считать, что течение проводящего газа происходит в плоском канале с параллельными друг другу диэлектрическими стенками. Постановка такой задачи должна быть двумерной по существу дела, так как одномерное приближение является вырожденным. В самом деле, электрические токи в этом случае должны отсутствовать (они не могут замыкаться через диэлектрические стенки). Поэтому проводящий поток в одномерном приближении не взаимодействует с магнитным полем.

I.2. Известно, что неоднородность магнитного поля, вызывающая неоднородность индуцированного электрического поля $\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}$, приводит к образованию вихря электрического тока, который стремится скомпенсировать вызвавшую его неоднородность. Эта задача достаточно полно исследованв в [I]-[3] в предположении

$$R_M \ll 1$$

где R_M – параметр магнитогидродинамического взаимодействия. При этом предположении задача становится линейной и в ряде случаев допускает аналитическое решение.

Однако приближение $R_M \ll 1$ не всегда оказывается оправ-

данным. Тогда необходимо учитывать воздействие вихревого электрического тока на газ, причем, как уже отмечалось в п. I.I, эффективной может быть только двумерная постановка, возможности аналитического исследования которой ограничены.

В работах [3], [4] рассматривается линейная по параметру задача для несжимаемой жидкости, в работе [5] решается линейная задача для сжимаемого газа, а в [6] численно решена нелинейная задача для несжимаемой жидкости.

В настоящей работе также решение задачи проводится с помощью численных методов.

I.3. В работе изучается процесс торможения потока электропроводного газа, а также нарушение его однородности в зависимости от величины параметра R_M, профиля распределения по пространству магнитного поля и закона проводимости

I.4. Стационарное решение магнитогазодинамической задачи отыскивалось методом установления, фактически решалась нестационарная задача. Численное интегрирование уравнений газодинамики проводилось по схеме предиктор-корректор [7] с использованием локально-одномерного метода [8] и матричной прогонки [9] в неявной части. Возможность проведения расчета при наличии ударных волн в потоке обеспечивалась введением искусственной вязкости [10]. Характерной особенностью задачи является решение на каждом шагу по времени стационарной электродинамической задачи, которое проводилось итерационными методами, описанными в [II].

§ 2. Постановка задачи. Уравнения.

2.I. В плоском канале постоянной ширины d с диэлектри-

ческими стенками имеется сверхзвуковой ($M>1$) однородный поток газа с параметрами ρ_1 , u_1 , T_1 , $v_1=0$. Газ обладает конечной электропроводностью $\sigma=\sigma_1$. В начальный момент времени $t=0$ появляется внешнее магнитное поле $\vec{H}$. Предполагается, что индуцированным магнитным полем $\vec{h}$ можно пренебречь ($h \ll H$), то-есть, магнитное число Рейнольдса мало

$$Re_m = \frac{4\pi\sigma_1 u_1 d}{c^2} \ll 1 \qquad (2.1)$$

здесь c - скорость света в вакууме.

В этом случае магнитное поле H можно считать известной и заданной функцией пространственных переменных. Будем считать, что вектор $\vec{H}$ имеет единственную компоненту H_z , причем, либо

$$H = \begin{cases} H_1 & \bar{x} > 0 \\ H_1 e^{\alpha \bar{x}} & \bar{x} < 0 \end{cases}$$

либо

$$H = \begin{cases} H_1 & \bar{x} < 0 \\ H_1 e^{-\alpha \bar{x}} & x > 0 , \quad \bar{x} = x/d \end{cases}$$

В первом случае (фиг. 2.I а) будем говорить о "входе" сверхзвукового потока электропроводного газа в магнитное поле, а во втором (фиг. 2.I б) - о "выходе" из магнитного поля.

2.2. Относительно свойств среды предполагается, что она является невязкой, нетеплопроводной, сжимаемой жидкостью, для которой справедливо уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho R T , \quad \varepsilon = c_v T \qquad (2.4)$$

Здесь p - давление, ρ - плотность, T - температура, ε - внутренняя энергия, R - газовая постоянная, C_v - удельная теплоемкость. Что касается электропроводности среды, то рассмотрим два случая. Либо она не зависит от температуры и плотности

$$\sigma = \sigma_1 \tag{2.5}$$

Либо будем считать, что в газе присутствует легкоионизируемая добавка с потенциалом ионизации I ; ее степень ионизации мала и свободные электроны находятся в равновесии с газом. Тогда концентрация электронов связана с температурой и плотностью формулой Саха, а для проводимости имеет место выражение

$$\sigma = \sigma_1 \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/4} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{-1/2} e^{-\frac{I}{2}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)} \tag{2.6}$$

Предположим также, что частота соударений электрона с тяжелыми частицами гораздо больше ларморовской частоты, т.е. эффект Холла отсутствует.

2.3. Уравнения нестационарной магнитной гидродинамики использовались в безразмерной форме. Сформулируем их в случае двух независимых переменных. Электродинамика задачи описывается уравнением сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \tag{2.7}$$

уравнения потенциальности электрического поля

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

и законом Ома

$$j_x = \sigma\left(E_x - \frac{1}{c} v H\right)$$
$$j_y = \sigma\left(E_y + \frac{1}{c} u v\right) \qquad (2.9)$$

Газодинамическую часть описывают уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \qquad (2.10)$$

закон сохранения импульса в проекции на ось x

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{1}{c} j_y H \qquad (2.11)$$

и на ось y

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho v^2) = -\frac{1}{c} j_x H \qquad (2.12)$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{u^2+v^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right)\right] = j_x E_x + j_y E_y \quad (2.1$$

Систему уравнений (2.7)-(2.13) замыкают уравнения состояния (2.4 и закон проводимости (2.5) или (2.6).

2.4. При постановке краевых условий по газодинамике будем исходить из предположения, что течение во входном сечении кана-

ла Γ_1 на всем протяжении времени $t \geq 0$ является сверхзвуковым. Поэтому в сечении Γ_1 будем задавать ρ_1, T_1, u_1 и $v_1 = 0$. В выходном сечении канала Γ_3 краевого условия не требуется, если поток остается сверхзвуковым ($M > 1$). Если же в процессе магнитогазодинамического взаимодействия в некоторый момент времени $t = t_0$ в сечении Γ_3 появляются участки, на которых $M = 1$, то будем считать, что это же значение $M = 1$ остается там и при любом $t \geq t_0$. На стенках канала используем условия непротекания жидкости $v = 0$. Краевым условием в электродинамической части задачи является требование непротекания электрического тока $j_y = 0$ на горизонтальных диэлектрических стенках. На входном и выходном сечениях предполагается, что компонента $j_x = 0$ настолько мала, что можно считать выполненным условие .

2.5. Как уже отмечалось выше, стационарное решение задачи было получено путем интегрирования по времени нестационарных уравнений до установления. В качестве начальных данных, как для "входа" в магнитное поле, так и для "выхода", использовались одни и те же начальные данные, а именно, однородный во всей области поток со значениями параметров, заданными во входном сечении: $\rho_1 = 0.1$, $T_1 = 2.4$, $p_1 = 5.06$ $u_1 = 22$, $v_1 = 0$, $\sigma_1 = 10^{-3}$, $d = 1$. Для измерения параметров выбраны следующие масштабы: $\rho_0 = 10^{-3}$ г/см^3, $T_0 = 10^3$ °K, $p_0 = 0.1$ атм; $u_0 = 10^2$ м/сек, $\sigma_0 = 10^5$ мо/м, $L_0 = 1$ м, $j_0 = 3.16 \cdot 10^5$ а/м^2. Число Маха во входном сечении в данной работе постоянно и имеет значение = 2.92. Значение параметра магнитогидродинамического взаимодействия определяется параметрами во входном сечении $R_M = \frac{\sigma_1 u_1 d H_1^2}{2c^2(p_1 + \rho u_1^2)}$ и менялось за счет изменения величины магнитного поля H_1 .

§ 3. Вход сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле.

Рассматривается вход сверхзвукового потока проводящего газа в магнитное поле, изменяющееся по закону (2.2). Изучается влияние величины R_M, параметра α и закона проводимости $\sigma(\rho, T)$ на взимодействие потока с токовым вихрем, образующимся в неоднородном магнитном поле.

3.I. Обратимся сначала к случаю постоянной проводимости. Пусть магнитное поле резко нарастает при $x=0$ до величины H_1 то-есть $\alpha = \infty$. Выясним влияние на течение величины R_{M1}. Для значений R_M = I, 2, 3 на фиг. 3.I; 3.4; 3.7 показаны пространственные распределения безразмерных величин M, T, ρ, p и j Величины T, ρ, p отнесены к своим значениям на входе, а плотность тока j отнесена к характерной размерной комбинации $j_0^* = \frac{\sqrt{R_M}}{10} \sigma_c u_c H_0 / c$. На фиг. 3.2; 3.5; 3.9 – изменение вдоль оси канала безразмерной плотности тока j, а также изменение M и p вдоль оси и стенки канала. Показателем неоднородности потока по сечению будем считать отношение значений и на стенках канала к их значениям на оси. Отношение этих величин также показано на фиг. 3.2; 3.5; 3.8.

На фиг. 3.3; 3.6; 3.9 представлено изменение M и ρ в характерных сечениях Γ_2 ($x=0$), Γ_{OM}, $\Gamma_{O\rho}$ (Γ_{OM}, $\Gamma_{O\rho}$ – сечения, в которых достигаются экстремальные значения M и ρ), а также в сечении Γ_3 ($x=1.5$).

Известно, что в процессе взаимодействия потока электропроводного газа с неоднородным магнитным полем возникает токовый

вихрь, тормозящий поток. Градиент скорости вызывает появление второго вихря, направление токов в котором на входе в магнитное поле обратно направлению тока основного вихря. Суперпорция этих вихрей приводит к сокращению эффективной глубины его проникновения δ вниз по потоку. С повышением R_M торможение потока основным вихрем усиливается, что приводит к еще большему сокращению эффективной величины δ. При этом центр токового вихря ($x = x_ц$) при $\alpha = \infty$ остается в сечении Γ_2 ($x = 0$). Следовательно при $x > 0$ имеет место контракция электрического тока к сечению Γ_2 ($x = 0$). Из фиг. 3.3; 3.6; 3.9 видно также, что плотность тока на оси, а также полный ток, убывают при увеличении R_M.

Наличие электрического тока в газе приводит к силовому (сила Лоренца) и энергетическому (джоулев нагрев) воздействию на поток. Рассмотрим результат, к которому приводят эти воздействия отдельно, сначала при $x < 0$, а затем при $x > 0$. Предварительно заметим, что в силу симметрии токового вихря продольная компонента тока на оси канала исчезает ($j_x = 0$), а на диэлектрической стенке, наоборот, $j_y = 0$. Следовательно сила Лоренца на оси имеет только продольную компоненту $f_x = \frac{1}{c} j_y H$, а на стенке только поперечную $f_y = \frac{1}{c} j_x H$. При $\alpha = \infty$ электрический ток в области $x < 0$, где магнитное поле отсутствует, оказывает на газ только энергетическое воздействие посредством джоулева нагрева и, как следствие, вызывает его торможение. У стенок интенсивность джоулева нагрева оказывается несколько выше и процесс торможения и разогрева газа происходит там более заметно, чем в ядре. В зоне постоянного магнитного поля ($x \geq 0$) наряду с энергети-

ческим появляется также и силовое воздействие. В результате силового воздействия поперечной составляющей силы Лоренца f_y линии тока газа отходят от стенок канала и сгущаются у оси. Кроме того, у оси поток тормозится продольной компонентой f_x силы Лоренца. Джоулево тепло выделяется во всей области, но максимальное тепловыделение опять имеет место у стенок канала, так как плотность тока здесь максимальна. При $x \geq 0$ в ядре потока газ испытывает торможение лоренцовой силой, сжатие за счет сгущения линий тока к оси, а также нагрев и торможение в результате джоулева тепловыделения. У стенок происходит расширение газа в результате отжатия потока и наряду с этим – нагрев и торможение джоулевым теплом. В результате число Маха в ядре оказывается существенно меньше, чем на стенках; напротив ρ, T, p в ядре больше, чем на стенках. Далее вниз по потоку неоднородность параметров продолжает возрастать, достигая экстремальных значений соответственно в сечениях $\Gamma_{ом} \approx \Gamma_{op} \approx \Gamma_{от} \approx \Gamma_{op}$. При этом величина плотности тока в сечении $\Gamma_{ом}$ становится настолько малой, что лоренцова сила перестает оказывать воздействие на поток. Следовательно за сечением $\Gamma_{ом}$ линии тока расходятся от оси и сжатое ядро, расширяясь, ускоряется, а давление выравнивается по сечению, достигая вблизи выхода из канала некоторого постоянного значения. Наряду с давлением происходит заметное выравнивание неоднородности температуры и плотности.

Увеличение параметра R_M не приводит к качественной перестройке течения. При этом экстремумы параметров M, T, ρ, p становятся более резкими. Следует отметить, что основное изменение параметров газа происходит в окрестности сечения Γ_2 в стацио-

ударной волне сжатия, фронт которой достаточно крутой. Однако нет оснований утверждать, что это скачок уплотнения, так как не выполняется одно из основных условий на скачке : $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ где λ_1 и λ_2 – приведенные скорости потока ($\lambda = u/c_*$, c_* – критическая скорость) перед и за скачком соответственно. При $R_M = 3$ поток за волной сжатия становится дозвуковым, но затем, расширяясь, снова ускоряется до сверхзвуковой скорости.

3.2. Влияние крутизны нарастания магнитного поля при постоянной проводимости и $R_M = 2$ показывают фиг. 3.10-3.12 для $\alpha = 3$ и фиг. 3.13-3.15 для $\alpha = 1$. При плавном нарастании магнитного поля токовый вихрь перемещается вверх по потоку. Его центр лежит в зоне нарастающего поля ($x_ц < 0$). Вниз по потоку, как и при $\alpha = \infty$, токовый вихрь проникает на незначительную глубину. Отрицательный поперечный ток при $x < x_ц$ приводит к ускорению потока на оси, в результате чего, несмотря на торможение газа вследствие джоулева нагрева и более интенсивного, чем при $\alpha = \infty$, поджатия потока к оси из-за поперечной силы Лоренца f_y, значение числа M в ядре несколько превосходит значение M_1 во входном сечении. Напротив, вблизи стенок, где $f_x \simeq 0$, воздействие джоулева нагрева превосходит воздействие расширения потока из-за отжатия от стенок; поэтому число M падает. При $x > x_ц$ отличие течения от рассмотренного в 3.1 состоит в том, что отношение плотности тока вблизи стенки к току на оси выше, чем при $\alpha = \infty$. Это приводит, во-первых, к тому, что при $\alpha = 1$ вблизи стенок газ тормозится сильнее, чем на оси. Во-вторых, волна сжатия, локализованная при $\alpha = \infty$ в окрестности сечения Γ_2 при плавном возрастании магнитного поля "размазывается" вверх и

вниз по потоку. В-третьих, в результате отклонения линий тока газа к оси канала около стенок появляются зоны разрежения, в которых плотность ниже значения ρ_1 во входном сечении Γ_1. В силу инерциальности газовых частиц эти зоны разрежения смещаются вниз по потоку относительно сечения наиболее интенсивного силового воздействия.

3.3. Влияние параметра взаимодействия R_M на течение с переменной проводимостью, определяемой (2.6) рассмотрено при $\alpha = 3$.

Га фиг. 3.16-3.18; 3.19-3.21; 3.22-3.24 представлены соответственно случаи $R_M = 0{,}5$; 1; 1,5. Существенно новых качественных особенностей в стационарное течение зависимость (2.6) не вносит. Отметим, что с увеличением R_M, в отличие от постоянной проводимости, плотность тока в вихре растет. Фактическое взаимодействие токового вихря с газом по сравнению с постоянной проводимостью также усиливается за счет роста проводимости с увеличением температуры. Так, при $\alpha = 3$ и проводимости, определяемой выражением (2.6), поток при $R_M = 1$ тормозится сильнее, чем при $R_M = 2$, но $\sigma = \sigma_1$.

3.4. На фиг. 3.25-3.27; 3.28-3.30; 3.31-3.33 представлены течения при $R_M = 0{,}5$, переменной проводимости (2.6) и $\alpha = 5$; 10, 15. Они показывают влияние крутизны нарастания магнитного поля на течение при переменной проводимости. С увеличением α отметим еще раз увеличение плотности тока в вихре и его контракцию к сечению Γ_2. Амплитуда газодинамической волны сжатия резко возрастает (усиливается взаимодействие токового вихря и газа), а глубина ее проникновения вниз и вверх по потоку убывает. Так

торможение потока при $R_M = 0.5$ $\alpha = 15$, оказывается сравнимым с торможением при $R_M = 1.5$ и $\alpha = 3$.

§ 4. Выход сверхзвукового потока проводящего газа из магнитного поля

Рассматривается течение в неоднородном магнитном поле (2.3). Также, как и в предыдущем параграфе определяющими параграфами являются R_M, α и зависимость $\sigma(\rho, T)$. В приближении $R_M \ll 1$ воздействие токового вихря на поток пренебрежимо мало и поэтому распределение векторов плотности электрического тока на входе в магнитное поле и на выходе из него при одном и том же характере изменения повторяют друг друга с точностью до направления полного тока. В случае $R_M \neq 0$ воздействие электрического тока на поток становится существенным и можно ожидать, что вход потока в магнитное поле будет существенно отличаться от выхода из него.

4.1. Обратимся сначала к течению с постоянной проводимостью $\sigma = \sigma_0$. Распределение газодинамических параметров в течении и плотности электрического тока для значений $R_M = 0{,}5;\ 1{,}0;\ 2.0$ при $\alpha = 3$ показано на фиг. 4.1–4.3 (параметры T, ρ, p отнесены к своим значениям во входном сечении). Распределение плотности электрических токов на фиг. 4.1–4.3 показывает, что при всех значениях R_M токи образуют вихрь, близкий к круговому. Глубина проникновения тока δ в однородное магнитное поле в отличие от течения на входе в магнитное поле имеет порядок одного калибра канала. Это объясняется тем, что токовый вихрь, возникающий в

процессе взаимодействия потока электропроводного газа с убывающим магнитным полем тормозит поток, создавая отрицательный градиент скорости. В свою очередь, этот градиент создает вторичный токовый вихрь, который складывается с основным, "размывая" его вверх по потоку. Полный ток в вихре растет с увеличением R_H.

Протекание электрического тока по движущемуся газу во внешнем магнитном поле приводит к силовому (Лоренцова сила) и энергетическому (джоулево тепло) воздействиям. Эти воздействия создают возмущения однородных по пространству поля скорости $\vec{v}$ и термодинамических параметров T, p, ρ, а как следствие числа M.

Рассмотрим отдельно течение в зоне однородного магнитного поля при $x < 0$ и в зоне спадающего магнитного поля при $x \geq 0$. Обратимся к области $x < 0$. В силу вихревой структуры тока на оси продольная компонента вектора плотности электрического тока $j_x = 0$, а на стенках $j_y = 0$. Соответственно этому сила Лоренца на оси имеет только продольную компоненту $f_x = \frac{1}{c} j_y H$, направленную навстречу потоку, а на стенках канала только поперечную компоненту $f_y = -\frac{1}{c} j_x \cdot H$, направленную к стенке. Следовательно силовое воздействие электрического тока на поток приводит к торможению газа на оси, отжатию линий тока от оси и их сгущению у стенок. Джоулево тепло выделяется во всей области течения, но максимально оно у стенок, так как здесь максимальна плотность тока $\vec{j}$. Отметим еще, что из приосевой области потока происходит отбор энергии и снижение температуры торможения. Отобранная энергия выделяется в виде джоулева тепла частично у стенок канала, а частично передается потоку за пределами однородного магнитного поля. Таким образом, в ядре поток подвержен следующим воздействиям

торможению силой Лоренца, расширению за счет отжатия линий тока к стенкам и торможению за счет выделения джоулева тепла. У стенок газ тормозится в сходящемся потоке и за счет джоулева тепловыделения. В результате плотность, температура и давление растут во всем потоке, причем на стенках рост происходит интенсивнее. Наоборот, число Маха уменьшается более интенсивно по оси канала.

Обратимся к области спадающего магнитного поля. Рассмотрим поток при $x > x_ц$. ($x_ц$ - координата центра вихря токов). При $x > x_ц$ продольная компонента силы Лоренца меняет знак, то-есть оказывается направленной по потоку и ускоряет его. Вдоль стенки канала поперечная составляющая тока падает, к тому же убывает величина H. Это приводит к резкому уменьшению поперечной составляющей силы Лоренца у стенок канала. Но поскольку давление у стенок больше, чем на оси, то газ здесь, расширяясь, ускоряется, а линии тока отходят от стенок. В свою очередь, в ядре происходит ускорение газа силой Лоренца и торможение в сходящемся потоке. Джоулево тепловыделение вызывает дополнительное торможение всего потока. Фиг. 4.4, на которой изображено изменение M и p по средней линии тока и у стенки канала, а также их отношение, показывает, что в окрестности $x_ц$ в ядре потока основную роль играет ускорение силой Лоренца. За счет этого число M здесь имеет минимум. Затем, в силу поджатия потока к оси из-за отражения от стенок значение M несколько убывает. У стенок канала в окрестности $x = x_ц$ торможение за счет джоулева нагрева приводит к уменьшению M, но затем газ ускоряется в расширяющемся потоке, что приводит к некоторому возрастанию M. Из фиг. 4.1-4.4 видно также, что с увеличением R_M неоднородность потока как вдоль канала, так и поперек

него растет.

4.2. Рассмотрим выход из магнитного поля потока с теми же параметрами во входном сечении и той же конфигурацией магнитного поля ($\alpha = -3$), но при зависимости $\sigma(\rho, T)$ по формуле (2.6). Пространственное распределение газодинамических параметров потока и векторов плотности тока показано на фиг. 4.5–4.8 соответственно для R_M = 0,25; 0,5; 1,0; 1,45. На фиг. 4.9 дано изменение M и p по оси канала и стенке, а также их отношение. Качественная картина течения в этом случае при $R_M \leq 0.5$ мало отличается от рассмотренных выше течений при $\sigma = const$. Однако фактический параметр взаимодействия при переменной проводимости оказывается значительно выше (пространственное распределение газодинамических величин при $\sigma = const$ и $R_M = 1$ (фиг. 4.2) близко к распределениям при переменной проводимости, но $R_M = 0.5$ (фиг. 4.6)). Для $R_M \geq 1$ появляются некоторые новые моменты в течении, обусловленные переменной проводимостью. При $R_M = 1$ (фиг. 4.7) токовый вихрь сильно вытянут вдоль по потоку. Это связано с тем, что у стенок из-за нагрева газа увеличивается проводимость, что приводит к дальнейшему возрастанию плотности тока и увеличению нагрева. В результате токовый вихрь получает возможность вытягиваться вдоль стенок. Сравнение этого течения с течением при $R_M = 2$ и $\sigma = const$ (фиг. 4.3) показывает, что фактический параметр взаимодействия R_M больше двух. При $\sigma = const$ и $R_M = 2$, $M_{min} = 1.8$, а при переменной проводимости и $R_M = 1$ в течении появляется дозвуковая зона, в которой M_{min} = 0,85. При R_M = 1.45 имеется два токовых вихря (фиг. 4.8). Один связан с уменьшением магнитного поля, а второй (левый) находится в зоне постоянного магнитного поля и по-

рождается градиентом скорости. В течении также существует дозвуковая область с M_{min} = 0.45. Характер распределения числа M по пространству (фиг. 4.9) позволяет сделать вывод о непрерывном переходе газа из сверхзвуковой части потока в дозвуковую, то-есть без ударной волны.

4.3. Влияние интенсивности спадания магнитного поля показывает сравнение течений при α =-3 (фиг. 4.5-4.8) и α =-10 (фиг. 4.10-4.13) для R_M = 0,25; 0,5; 1,0; 1,45. Сравнение показывает, что с увеличением $|\alpha|$ резко возрастает взаимодействие токового вихря с потоком, но характер этого взаимодействия остается прежним. При α =-10 и R_M = 0.25 (фиг. 4.10) токовый вихрь вытянут поперек потока. С увеличением R_M он вытягивается вдоль оси канала. При $R_M \geq 1$ он распадается на два вихря. На фиг. 4.14 показано изменение параметров для α =-10 вдоль оси канала и стенки, а также как показатель неоднородности их отношения. На фиг. 4.15 показано пространственное распределение компонент скорости $\vec{v}$. Из характера поля скоростей видно, как отмечалось выше, в зоне постоянного магнитного поля происходит отжатие потока к стенкам и торможение в ядре. В зоне спадающего магнитного поля линии тока отходят от стенок, и поток, сжимаясь в ядре, ускоряется. Отличным от течения при α =-3 является то, что на оси канала газ тормозится значительно интенсивнее. Распределение термодинамических параметров ρ, T, p по области течения носят тот же характер, что и при α =-3, однако здесь их значения, как видно из фиг. 4.10-4.13, имеют более резкую зависимость от величины R_M. На фиг. 4.16 представлено изменение числа M поперек канала в сечении минимального значения M (пунктирная кривая) и выходном сечении (сплошная кривая). Отсюда еще раз видно, что с увеличением R_M и

$|\alpha|$ степень неоднородности потока возрастает.

§ 5. Обсуждение результатов. Выводы.

5.I. Обратимся сначала к обсуждению входа сверхзвукового проводящего потока в магнитное поле. В § 3 было отмечено, что при резком нарастании магнитного поля в ядре течения образуется волна сжатия, узкая по сравнению с поперечной шириной канала. Неоднородность потока по ширине канала вблизи оси симметрии оказывается относительно слабой (см. фиг. 3.2; 3.5; 3.8). Такое распределение по пространству газодинамических параметров позволяет приближенно рассмотреть вход сверхзвукового потока газа в резко нарастающее магнитное поле.

Решим следующую модельную задачу. Будем считать, что в ядре потока течение одномерно. Тепловым воздействием на ядро потока при $x < 0$ пренебрегаем, считая, что основной вклад джоулева нагрева происходит около стенок. Тогда торможение и разогрев газа фактически происходит в некотором слое $0 < x < \delta$ (см. фиг.5.I) где эффективно сосредоточен полный ток I, индуцируемый потоком проводящего газа при $x > 0$ (см. фиг. 3.I; 3.4; 3.7). Обозначим индексом "1" параметры потока при входе в волну сжатия ($x \simeq 0$) и индексом "2" параметры при выходе из нее ($x \simeq \delta$). Законы сохранения массы, импульса и энергии в этом слое даются уравнениями

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \mu , \qquad (5.1)$$

где μ - расход газа через единичное сечение

$$\Pi_2 - \Pi_1 = H \int_0^\delta j\, dx, \qquad (5.2)$$

где

$$\Pi = p + \mu u$$

и

$$w_2 - w_1 = \int_0^\delta jE\, dx \qquad (5.3)$$

где

$$w = \mu\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right)$$

Так как мы условились считать, что весь ток протекает в слое δ, то

$$\int_0^\delta j\, dx = I \qquad (5.4)$$

Относительно интеграла в правой части (5.2) сделаем дополнительное предположение

$$\int_0^\delta jE\, dx = E_{eff} \int_0^\delta j\, dx = E_{eff} \cdot I \qquad (5.5)$$

Здесь E_{eff} - эффективное среднее электрическое поле в слое $0<x<\delta$

Рассмотрим сначала случай $\sigma = const$, а затем отдельно обсудим влияние закона проводимости. Если принять допущение, что толщина слоя достаточно мала при $R_M \simeq 1$ (что вполне подтверждается результатами численных расчетов), то величину полного тока I можно определить из решения двумерной задачи [1-3] о течении проводящей среды с постоянной проводимостью и скоростью u_2. При этом полный ток I дается формулой

$$I = \xi \sigma u_2 H \qquad (5.6)$$

где

$$\xi = \frac{2}{\pi^2} G \cong 0.185613 \qquad (5.7)$$

(G - постоянная Каталана [12], $G = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)^2 \cong 0.916$)

Отметим, что так определяемая величина полного тока I правильно отражает его поведение при $H \to 0$, когда $u_2 \to u_1$. Хотя при этом толщина слоя δ уже перестает быть малой.

Для определения E_{eff} воспользуемся следующим соображением. При постоянном значении скорости $u = u_2$, в сечении $x = 0$ напряженность $E\big|_{x=0} = 0.5\, u_2 \cdot H$. С другой стороны, при $x \to \delta$ из условия $j \to 0$,

$$j = -\sigma (u_2 H - E)$$

следует, что $E \to u_2 H$. Принимая линейную интерполяцию E по толщине слоя, получим

$$E_{eff} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2 H}{2} + u_2 H\right) = \frac{3}{4} u_2 H \qquad (5.8)$$

В дальнейшем удобно ввести безразмерную комбинацию

$$a = \xi \frac{6H^2}{\mu} = 2\xi R'_M$$

где $R'_M = \frac{6H^2}{2\mu}$ – параметр магнитогидродинамического взаимодействия.

Подставляя (5.6)-(5.9) в (5.2), (5.3) и исключая ρ с помощью (5.1), получим уравнения

$$p_2 + (1+a)\mu u_2 = \Pi_1$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2 u_2}{\mu} + \frac{3}{4} a u_2^2 = \frac{1}{\mu} w_1$$

решая которые, находим

$$u_2 = u_1 \frac{1+\gamma M_1^2+\sqrt{(1+\gamma M_1^2)-M_1^2\left[\gamma+1+(\gamma+3)\frac{a}{2}\right]\left[(\gamma-1)M_1^2+2\right]}}{M_1^2\left[\gamma+1+(\gamma+3)\frac{a}{2}\right]} \qquad (5.10)$$

$$p_2 = \mu\left[\frac{u_1}{\gamma M_1^2}(1+\gamma M_1^2)-(1+a)u_2\right] \qquad (5.11)$$

$$I = \sqrt{\xi\mu a}\cdot u_2 \qquad (5.12)$$

Соотношения (5.10), (5.11) позволяют найти связь между значениями числа Маха

$$\frac{1}{M_2^2} = \frac{\gamma+1+(\gamma+3)\frac{a}{2}}{1+\sqrt{1-M_1^2\frac{\left[\gamma+1+(\gamma+3)\frac{a}{2}\right]\left[2+(\gamma-1)M_1^2\right]}{(1+\gamma M_1^2)^2}}}-(1+a)\gamma \qquad (5.13)$$

Прежде чем переходить к исследованию модельного решения задачи (5.10)-(5.13), проведем его сопоставление с результатами численных расчетов § 3. В таблице приведены характерные значения, взятые из расчетов и модельного решения для случая γ = I.I2; σ = I; u_1 = 22; M_1 = 2.92; μ = 2.2

	модельное решение			численное решение			
$R_м$	M_2	u_2	I	M_2	u_2	I	$\xi u_2 H$
0.5	2.2I	I7.9	I.56	2.I3	I7.2	I.65	I.60
I.0	I.74	I3.I5	I.7I	I.63	I3.86	2.03	I.80
2.	I.09	8.7	I.62	I.02	9.I6	2.07	I.70

Из таблицы видно удовлетворительное качественное и количественное совпадение численного и модельного решения задачи.

Рассмотрим теперь, основываясь на модельном решении, влияние различных факторов на течение в ядре потока электропроводного газа при входе в однородное магнитное поле с $\alpha = \infty$.

Прежде всего отметим существование критического значения $a = a_{кр}$ (соответственно критического значения $R_н$), при котором стационарный вход сверхзвукового потока в магнитное поле становится невозможным. Формально это следует из перемены знака подкоренного выражения при $a > a_{кр}$

$$a_{кр} = \frac{2}{\gamma+3}\left[\frac{(1+\gamma M_1^2)^2}{M_1^2[(\gamma-1)M_1^2+2} - (\gamma+1)\right] \qquad (5.14)$$

Для параметров во входном сечении, с которыми проводились расчеты ($M_1 = 2.92$, $\gamma = 1.12$) $a_{кр} = 1.07$ (согласно (5.14)). В численном расчете с $a > a_{кр}$ наблюдается формирование ударной волны, которая отходит от магнитного поля вверх по потоку, оставляя за собой дозвуковое течение. Значение $a_{кр}$ монотонно растет от нуля при $M = 1$ до $2/(\gamma+1)(\gamma+3)$ при $M_1 \to \infty$. При этом соответствующее значение $M_2 = M_{2кр}$

$$M_{2кр} = \left[1 + \frac{3-\gamma}{3+\gamma}\left[\frac{(1+\gamma M_1^2)^2}{M_1^2[(\gamma-1)M_1^2+2]} - (\gamma+1)\right]\right]^{-1/2}$$

падает от $M_{2кр} = 1$ при $M_1 = 1$ до $M_{2кр} = \sqrt{\frac{(\gamma+3)(\gamma-1)}{(\gamma+3)(\gamma-1)+3-\gamma}}$ при $M_1 \to \infty$.

Поведение M_2 в зависимости от a и M_1 всегда имеют вид такой же, как на фиг. 5.2 , где положено $\gamma = 1.12$. Для сравнения нанесены точки $M = M_{min}$, полученные в численных расчетах. Все кривые $M_2(a)$ выходят при $a = 0$ из точки $M_2 = M_1$ и обрываются при $a = a_{кр}$ (с вертикальным наклоном касательной), достигая $M_2 = M_{2кр}$. Для того, чтобы оценить влияние γ , построим

след точки A ($M_{2кр}$, $a_{кр}$, при $M_1=\infty$) при изменении γ в диапазоне $1<\gamma<3$ (пунктир на фиг. 5.2). Характерно, что при $\gamma\to 1$ значение $a_{кр}$ стремится к бесконечности, а $M_{2кр}\to 0$. Наоборот, при возрастании γ значение $a_{кр}$ резко убывает, так при $\gamma=1.7$ и $M_1=2.92$, $a_{кр}=0.31$.

5.2. Рассмотрим теперь изменение полного тока I в зависимости от параметра a . Подставляя в (5.6) значение u_2 из (5.10) и $H=\sqrt{\mu a/\xi\sigma}$, получим

$$I=\sigma\sqrt{\xi\mu}\cdot\gamma\Pi_1\sqrt{a}\cdot\frac{1+\sqrt{1-M_1^2\frac{[\gamma+1+(\gamma+3)\frac{a}{2}][(\gamma-1)M_1^2+2]}{(1+\gamma M_1^2)^2}}}{1+\gamma+(\gamma+3)\frac{a}{2}} \qquad (5.15)$$

Анализ этого выражения показывает, что полный ток при некотором $a=a_*$ ($0<a_*<a_{кр}$) достигает максимального значения, а при $a=a_{кр}$ равен

$$I_{кр}=\sigma\sqrt{\mu\xi}\,\gamma\Pi_1\sqrt{\frac{2}{\gamma+3}\frac{(1+\gamma M_1^2)^2}{[(\gamma-1)M_1^2+2]M_1^2}-\gamma-1}\cdot\frac{[(\gamma-1)M_1^2+2]M_1^2}{(1+\gamma M_1^2)^2} \qquad (5.16)$$

На фиг. 5.3 для γ = I.I2 показано изменение полного тока I в зависимости от a при M_1 = 2; 2.92; 5. Заметим, что при $a\to 0$ также $I\sim\sqrt{a}\to 0$, причем наклон кривой стремится к вертикальному, а при $a\to a_{кр}$ полный ток $I\sim\sqrt{(a-a_{кр})}\to 0$ и наклон также имеет своим пределом вертикаль (см. фиг. 5.3).

Найдем величину δ исходя из найденного значения скорости

за волной сжатия. Будем считать, что в слое $0 < x < \delta$ параметры изменяются линейно: скорость убывает от u_1 до u_2, напряженность электрического поля возрастает от $E_1 = \frac{u_1 H}{2}$ до $E_2 = u_2 H$ и плотность электрического тока также возрастает от $-2I/\delta$ до нуля Осредняя поперек волны сжатие энергетическое соотношение

$$\frac{j^2}{\sigma} + juH = jE$$

получаем для толщины δ следующее выражение

$$\delta = \frac{4\xi}{2\frac{u_1}{u_2} - 1} \qquad (5.17)$$

Из (5.17) видно, что при $\alpha \to 0$ толщина слоя $\delta \to 4\xi$, т.е. ток затухает на расстоянии порядка одного калибра от границы изменения магнитного поля. Другим предельным значением является $\delta_{кр} = \delta(\alpha_{кр})$. Из (5.10) и (5.17) следует

$$\delta_{кр} = 4\xi\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]$$

5.3. Влияние закона проводимости $\sigma(\rho, T)$ при резком нарастании магнитного поля также можно проследить на модели, рассмотренной в п. 5.I. Действительно, будем считать, что при $x < 0$ проводимость $\sigma \equiv \sigma_1$, а при $x > 0$: $\sigma = \sigma_2 = \sigma(\rho_2, T_2)$. Тогд величина полного тока в вихре есть

$$I = \xi\sigma_1 \frac{2}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} u_2 H$$

Отсюда видно, что в случае $\sigma_1/\sigma_2 \ll 1$ величина полного тока в вихре удваивается по сравнению с его значением при постоянной

роводимости $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Таким образом, результат воздействия агнитного поля на поток, проводимость которого сильно зависит от ρ и T , оказывается таким же, как и с постоянной проводимостью $\sigma = \sigma_1$, но с удвоенным значением параметра R_H . Этот ывод с хорошей точностью подтверждается примерами расчетов (ср. иг. 3.4 и фиг. 3.31).

5.4. Проведенное выше приближенное рассмотрение не позволяет роанализировать вход потока проводящего газа в плавно нарастающее магнитное поле. Волна сжатия оказывается размытой на расстояние, сравнимое с калибром канала, а у стенок появляются зоны разрежения. На фиг. 5.4 представлено изменение M_{min} от R_H при азличных значениях α , а также при постоянной и переменной роводимости, полученное в результате численных расчетов. тметим, что сильная зависимость проводимости (2.6) от ρ и T при плавном нарастании магнитного поля также приводит к фактическому увеличению параметра взаимодействия R_H .

5.5. Прежде чем переходить к обсуждению течения электропроводного газа на выходе из магнитного поля, сделаем одно общее замечание.

В центральной струйке газа продольная компонента плотности электрического тока j_x и вертикальная составляющая скорости газа v_y близки к нулю. Поэтому можно воспользоваться квазиодномерным приближением, которое дает

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{M_1^2-1}\left[\frac{d\ln \mathcal{F}}{dx} - \frac{6H^2}{\rho u}\left(u-\frac{E}{H}\right)\left(u-\frac{1+\gamma M^2}{2+(\gamma-1)M^2}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{E}{H}\right)\right]$$

где $\mathcal{F}$ - поперечное сечение струйки газа, μ - расход массы

в струйке. В области однородного магнитного поля всегда можно считать выполненным условие $u > E/H$ и второе слагаемое в квадратных скобках всегда положительно. Следовательно, плавный (бескачковый) переход через скорость звука ($M=1$) возможен только при условии $dF/dx > 0$. Как уже отмечалось, линии тока газа в зоне торможения ядра потока на входе в магнитное поле сходятся и, наоборот, расходятся при выходе потока из магнитного поля. Отсюда можно сделать заключение, что только на выходе из магнитного поля возможно торможение сверхзвукового потока с плавным переходом через скорость звука. На входе же в магнитное поле всегда $\frac{dF}{dx} < 0$ и переход через скорость звука возможен только в скачке. Таким образом, если волна сжатия переводит поток в дозвуковой, то ее структура должна содержать прямой скачок.

В работах [13] - [15] показана возможность плавного торможения сверхзвукового потока проводящего газа в магнитном поле и подробно исследованы условия такого перехода. Описанные в § 4 расчеты, основанные на решении нестационарных уравнений, показывают, что при выходе потока из магнитного поля действительно реализуется и устойчив стационарный режим течения с плавным переходом через скорость звука.

5.6. На фиг. 5.5 для выхода из магнитного поля показано изменение минимального значения числа M , характеризующего степень торможения, от параметра взаимодействия R_M . Видно, что при $\sigma = const$ степень торможения потока в волне сжатия наименьшая. Так при $R_M = 1$, $\alpha = 3$ поток с $\sigma = const$ (фиг. 4.4) тормозится до $M_{min} \approx 2.0$ и максимальная неоднородность $M_я / M_c$ равна 0.9, а при законе проводимости (2.6) (фиг. 4.9) соответ-

ственно до $M_{min} \simeq 0.85$ и $M_я / M_c \simeq 0.5$.

При увеличении $|\alpha|$ степень торможения и неоднородности потока также возрастают. При дальнейшем увеличении R_M минимальное значение M снижается более плавно.

На фиг. 5.5 пунктиром показано также минимальное значение числа M в сечении $x=1$. Видно, что при небольших значениях R_M число M в выходном сечении мало отличается от минимального значения. При некотором значении $R_M = R_{Mкр}$ в выходном сечении достигается $M=1$. Дальнейшее увеличение R_M не изменяет значение M на выходе в соответствии с краевым условием, в то время как значение M_{min} продолжает падать. Крутизна фронта торможения потока (фиг. 4.9, фиг. 4.14) с увеличением R_M остается практически неизменной, но сам фронт торможения смещается вверх по потоку, увлекая за собой часть токового вихря (фиг. 4.13).

5.7. Для анализа течения в ядре на выходе из магнитного поля используем следующие соображения. Поскольку на входе в канал параметры потока постоянны, то в любом сечении, в том числе и выходном, выполняется условие

$$\int_0^1 \rho u \, dy = \rho_1 u_1 = const$$

Учитывая, что в принятой постановке задачи происходит перераспределение энергии только внутри течения, полный поток энергии газа во входном и выходном сечениях должен сохраняться

$$c_p \rho_1 u_1 T_1^* = c_p \int_0^1 \rho_2 u_2 T_2^* dy = c_p \overline{\rho_2 u_2} \int_0^1 T_2^* dy$$

где T^* – температура торможения газа, $\overline{\rho_2 u_2}$ – среднее значение

потока массы в ядре в выходном сечении, которое положим равным $\rho_1 u_1$. Если считать, что в ядре в выходном сечении $M=1$ при $R_M > R_{Mкр}$, то скорость и температура также должны быть близки к постоянным значениям, не зависящим от R_M. Это означает, что прирост энтропии практически прекращается. Но при безударном течении этот прирост происходит только за счет выделения джоулева тепла, то-есть

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{g*}}{T} \cong \frac{Q_{g*}}{\bar{T}}$$

Поскольку средняя температура $\bar{T}$ в ядре волны сжатия изменяется мало при $R_M > R_{Mкр}$, то можно сделать вывод, что перестройка течения в этом случае происходит таким образом, чтобы интегральное выделение джоулева тепла оставалось неизменным. Этот вывод подтверждается результатами расчетов. На фиг. 5.6 представлена зависимость интегрального выделения джоулева тепла во всей области течения при $\sigma = const$, $\alpha = -3$ (кривая I), а также при законе проводимости (2.6) $\alpha = -3$ и $\alpha = -10$ (кривые 2 и 3 соответственно). Из графика видно "насыщение" джоулева нагрева с увеличением R_M, которое происходит тем скорее, чем больше $|\alpha|$ (крутизна профиля спадания магнитного поля). Замечательно, что ассимптотическое значение Q_{g*} практически не зависит от α, что согласуется с приведенными выше рассуждениями, где α не фигурировало. С изложенной точки зрения можно также объяснить разделение токового вихря на два и смещение ~~жнфи~~ фронта торможения вверх по потоку. В самом деле, как показывают упрощенные элементарные выкладки, интегральное выделение джоулева тепла при таком разделе-

нии становится меньше, чем в одном вихре. Только при этом условии джоулев нагрев может сохраняться постоянным с увеличением магнитного поля H .

На основании анализа численного и модельного решения задачи можно сделать следующие выводы:

I. При конечных значениях параметра магнитогидродинамического взаимодействия R_M в отличие от предельного случая $R_M \ll 1$, может происходить существенная перестройка сверхзвукового течения и поля электрических токов. Двумерность течения приводит к возникновению неоднородности потока по сечению.

2. Степень торможения и его неоднородность усиливаются с увеличением R_M . Существует критическое значение R_M , превышение которого приводит к качественной перестройке течения на дозвуковое.

На входе в магнитное поле при этом вверх по потоку отходит ударная волна с разрывным переходом через скорость звука.

На выходе из магнитного поля наблюдается разделение токового вихря на два. В отделившемся вихре, который с ростом R_M продвигается вверх по потоку, происходит гладкий переход через скорость звука.

3. Плавный профиль изменения магнитного поля уменьшает степень торможения потока, но не улучшает, вообще говоря, его однородности по сечению.

4. Имеет место значительный градиент давления и скорости вдоль стенки, что может оказывать влияние на течение в пограничном слое.

5. Сильная зависимость $\sigma(\rho, T)$ способствует увеличению фактического параметра R_M течения и, следовательно, приводит к

большему торможению потока. На входе в магнитное поле в предельном случае $\partial \ln \sigma / \partial \ln T \gg 1$, $\alpha = \infty$ фактический параметр R_M увеличивается в два раза.

6. Разделение токового вихря на выходе из магнитного поля сопровождается асимптотическим установлением интегрального джоулева нагрева во всей области течения.

В заключение авторы благодарятТ.А. Горбушину, В.Н. Равинскую А.Е. Петрову за создание программ и проведение расчетов и Т.В.Цвекому, Л.И. Пятибрат за их обработку.

Литература

1. Sutton C.W., Carlson A.W. End Effects in inviscid flow in magnetohydrodinamic cannals J. Fluid. Mech. 1961, v. 11, p. 1.

2. Ватажин А.Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. Ж. прикл. механики и техн. физики, № 2, 1963.

3. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., "Мир", 1965. Дополнение.

4. Ватажин А.Б. О деформации профиля скорости в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.

5. Лобанова Л.Ф. Задача о входе сжимаемого газа в однородное магнитное поле. Ж. прикл.механики и техн.физики, № 6, 1964.

6. Горинов А.С. Движение проводящей жидкости по каналу в неоднородном магнитном поле. Ж. прикл. механики и техн. физики. № 5, 1969.

7. Годунов С.К., Семендяев К.А. Разностные методы численного решения задач газовой динамики. Ж. вычисл.матем и матем. физ., 2, № 1, 1962.

8. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения параболического уравнения в произвольной области. Журн. вычисл.мат. и матем.физ., т. 5, № 3, 1965.

9. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. М., Физ.-мат.гиз. 1962.

10. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. М., ИЛ, 1960.

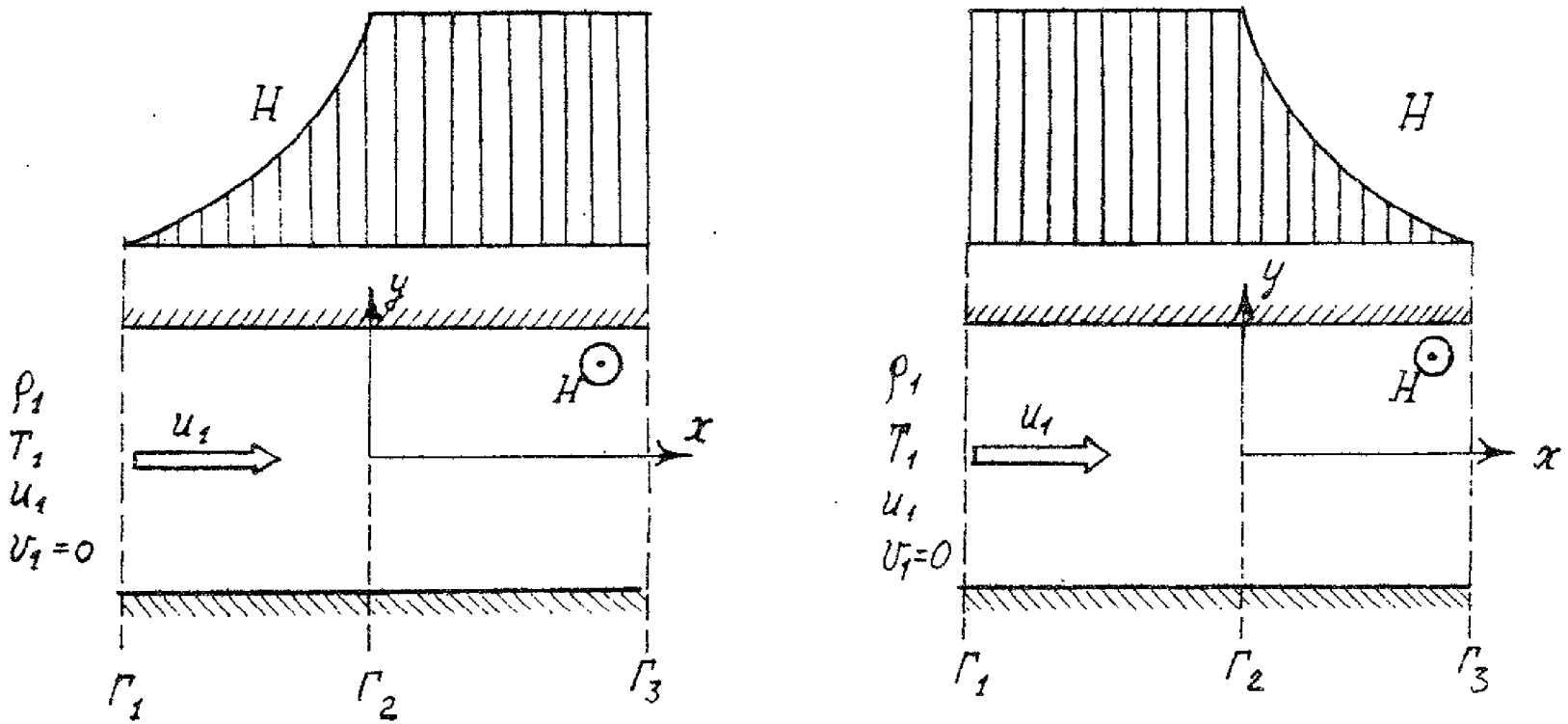
11. Дегтярев Л.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Численное шение внутренних стационарных задач электродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, Москва, 1969.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, ряд и произведений, 1963.

13. Слободкина Ф.А. Качественное исследование уравнения квази одномерного магнитогидродинамического течения в каналах. Ж. прикл.механики и техн.физики, № 3, 1966.

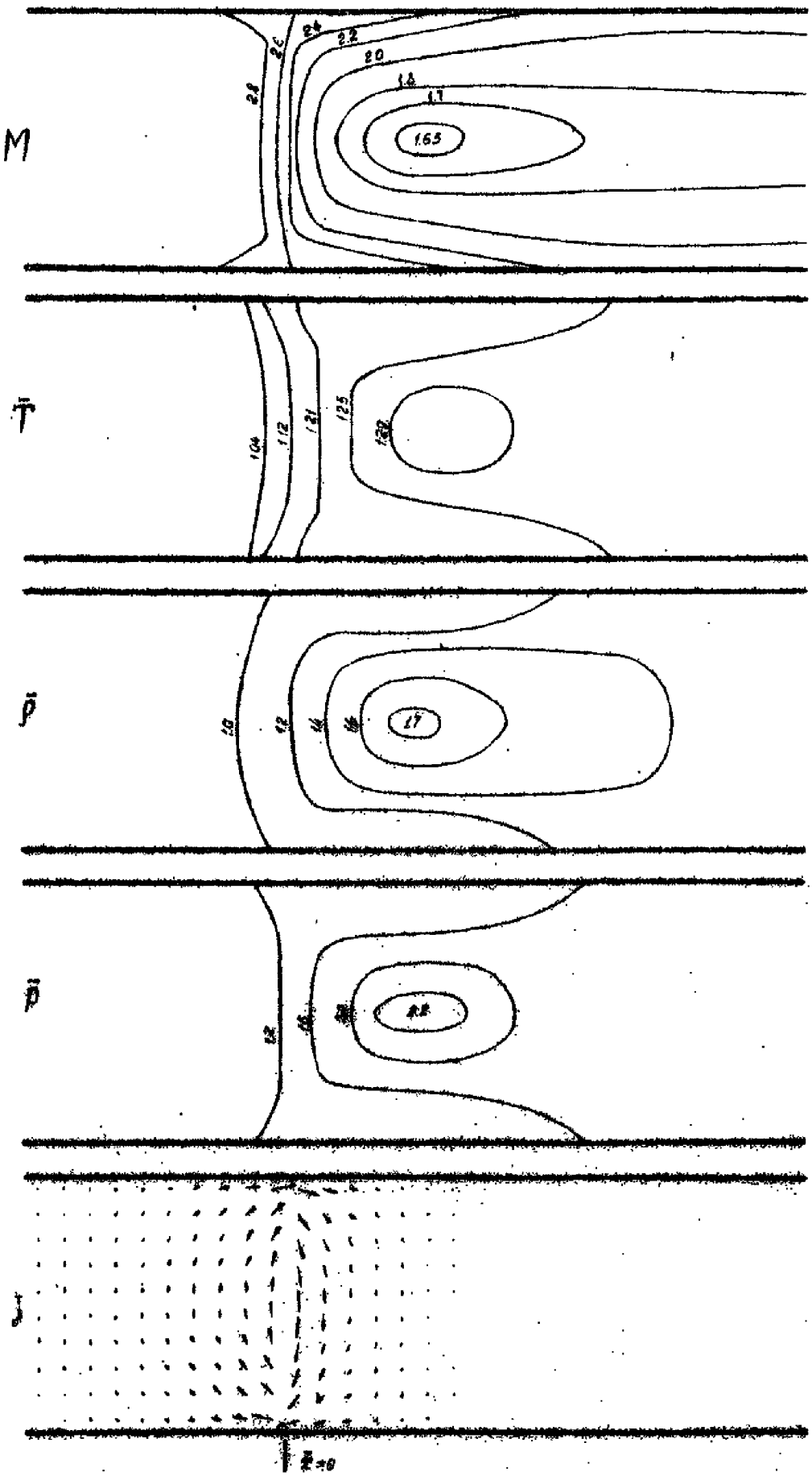
14. Слободкина Ф.А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидро динамических течений. ПММ, т. 31, вып. 3, 1967.

15. Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А. Об устойчивости произво ных стационарных течений в окрестности точек перехода чере скорость звука. ПММ, т. 31, вып. 4, (1967).

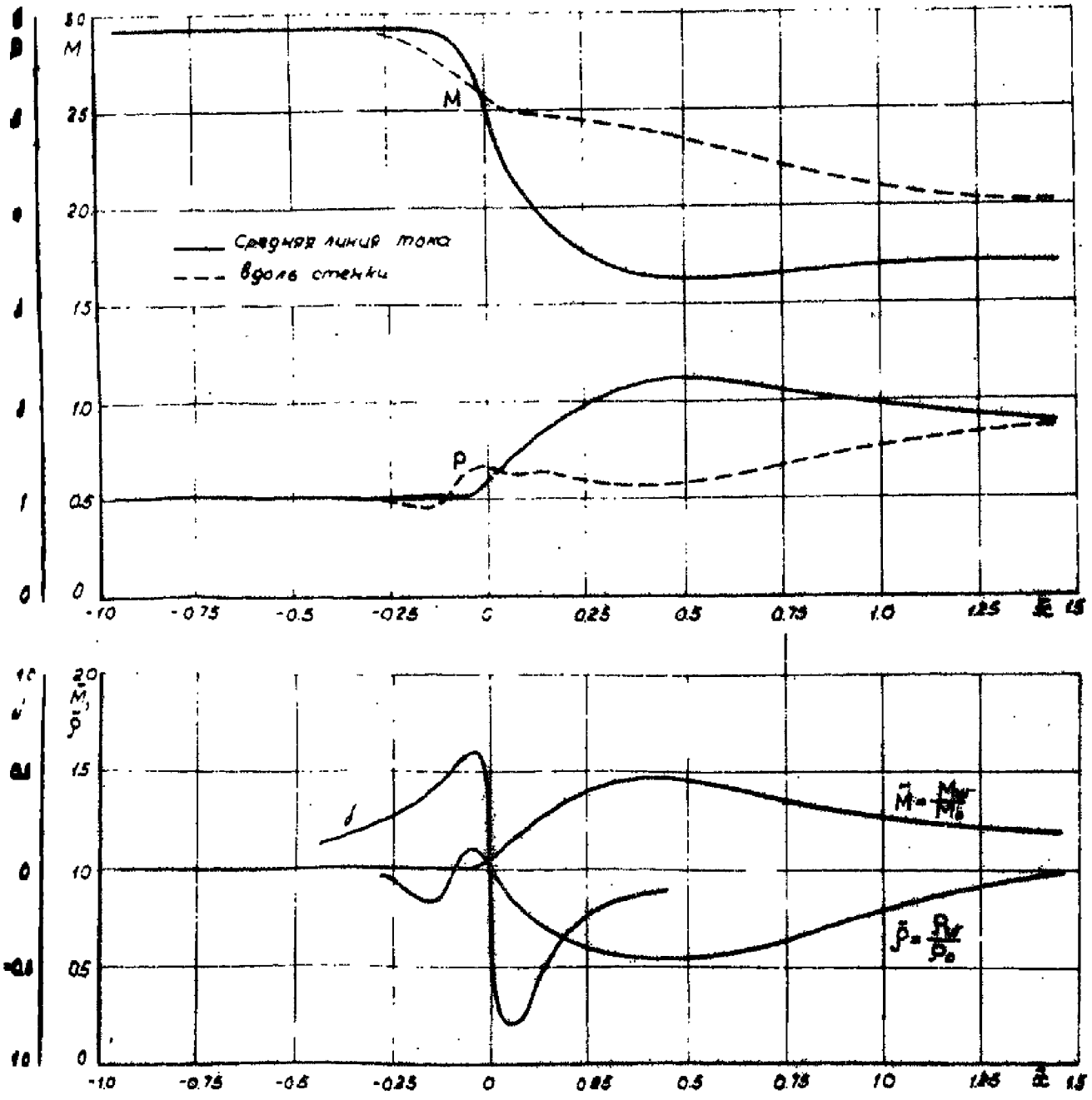

H
y
H
ρ_1
T_1
u_1
$v_1 = 0$
u_1
x
Γ_1
Γ_2
Γ_3
H
y
H
ρ_1
T_1
u_1
$v_1 = 0$
u_1
x
Γ_1
Γ_2
Γ_3

(а) (б)

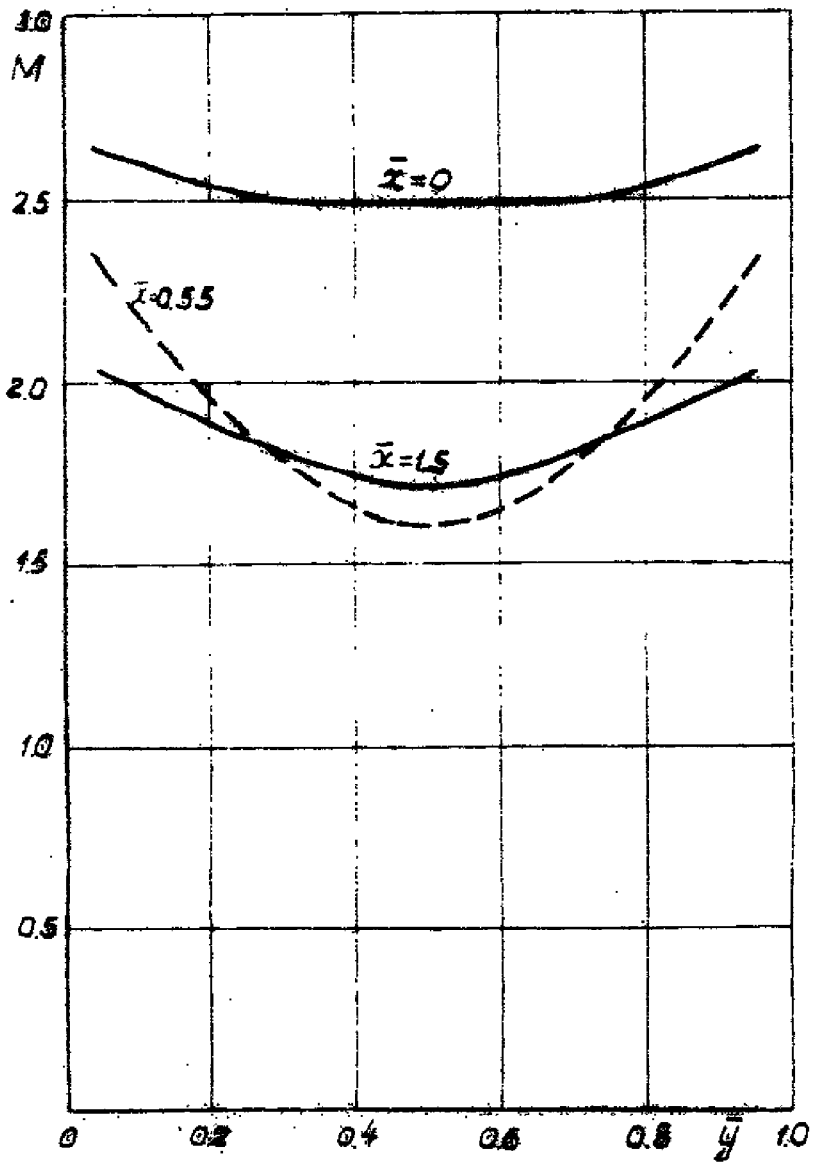
фиг. 2.1

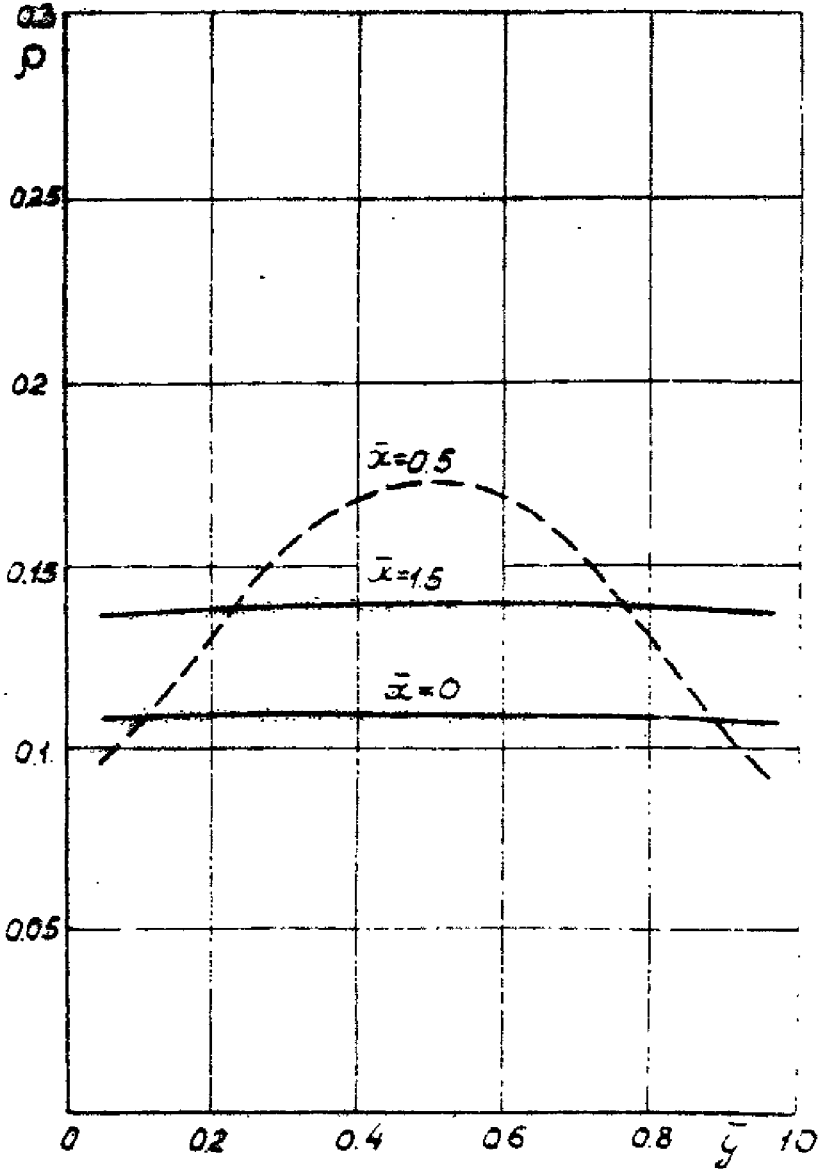


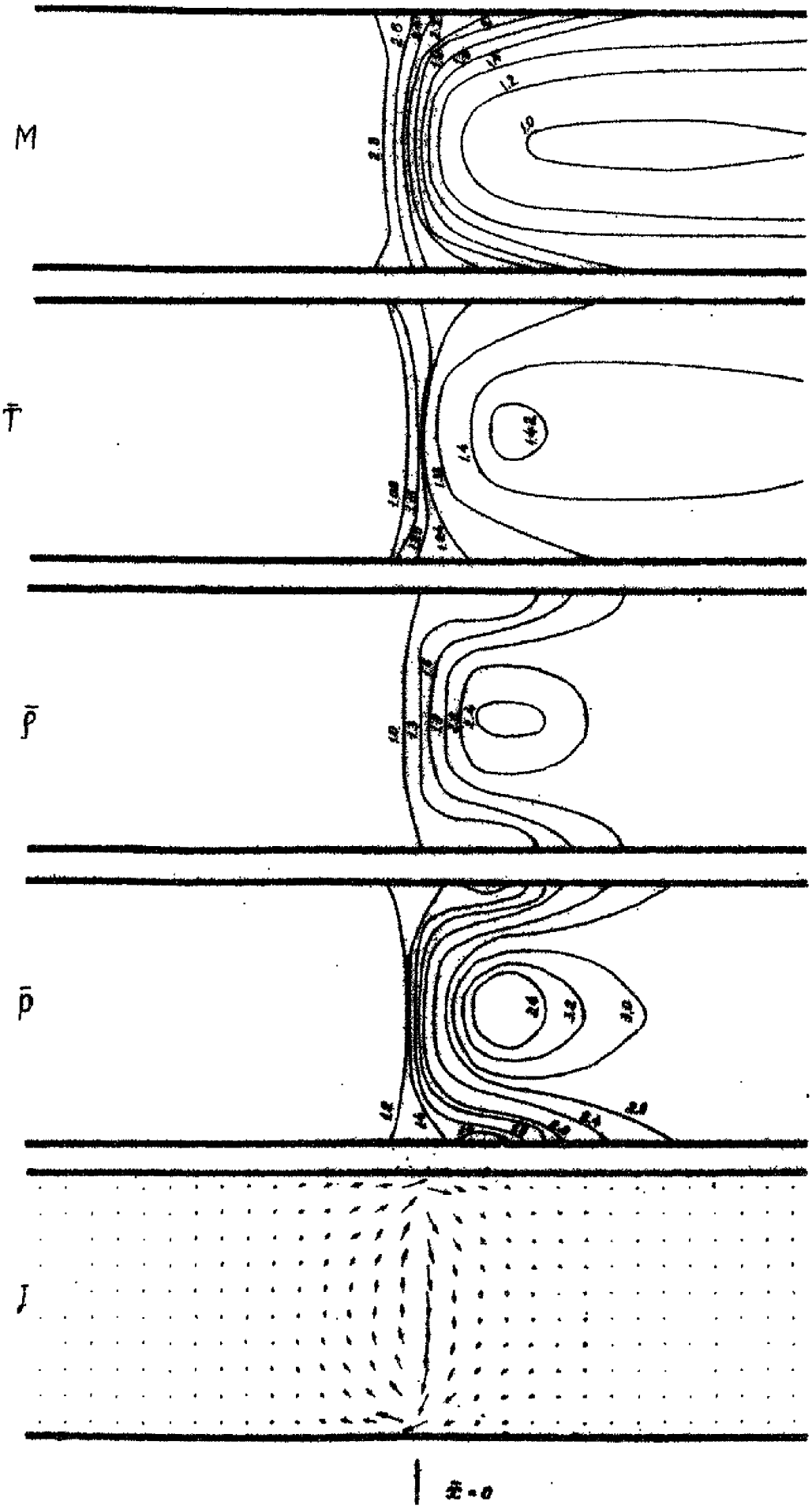
Фиг. 1

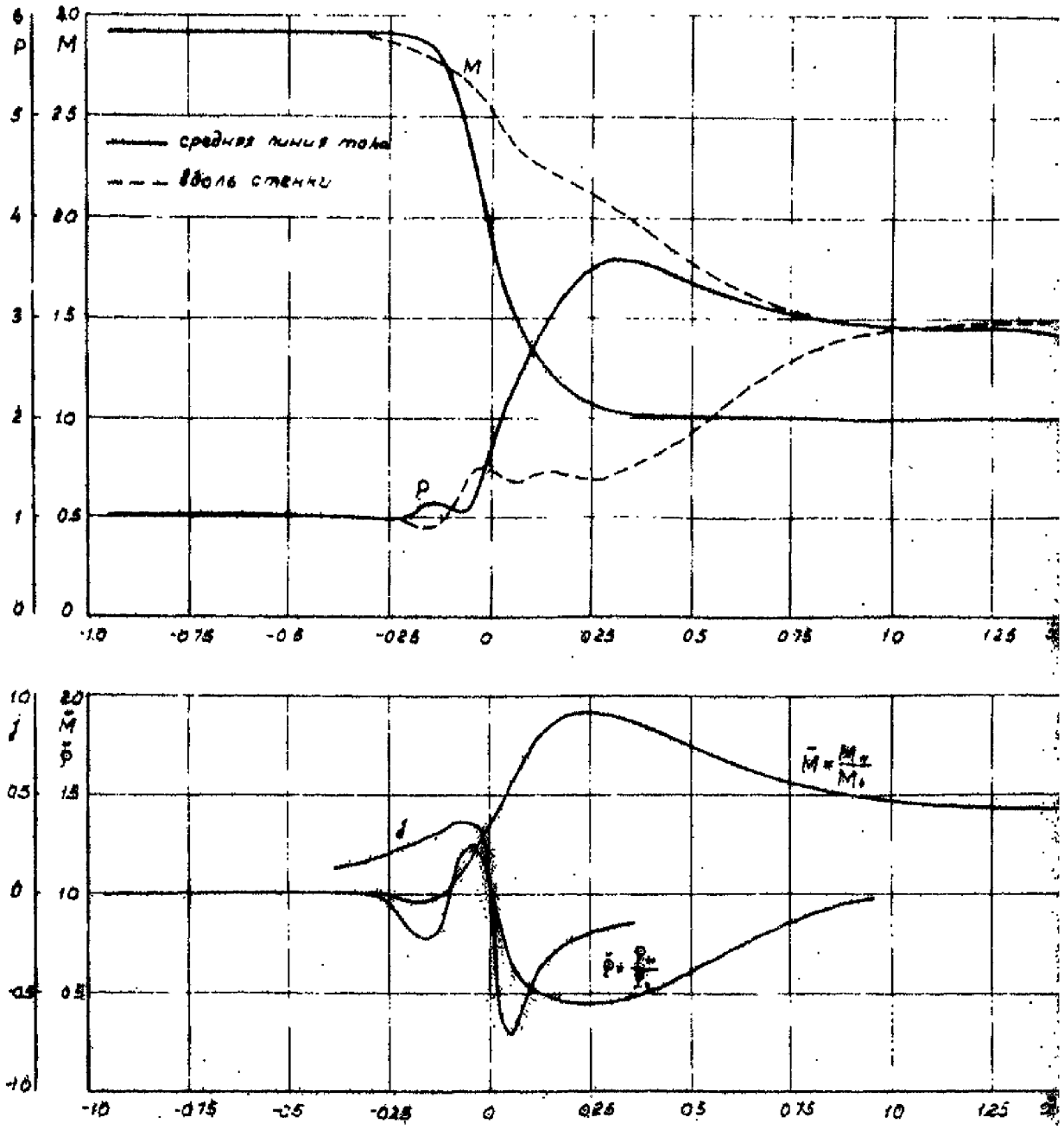

M
P
Средняя линия тока
вдоль стенки
δ
$\bar{M} = \frac{M_{кр}}{M_0}$
$\bar{\rho} = \frac{\rho_{кр}}{\rho_0}$

фиг. 32

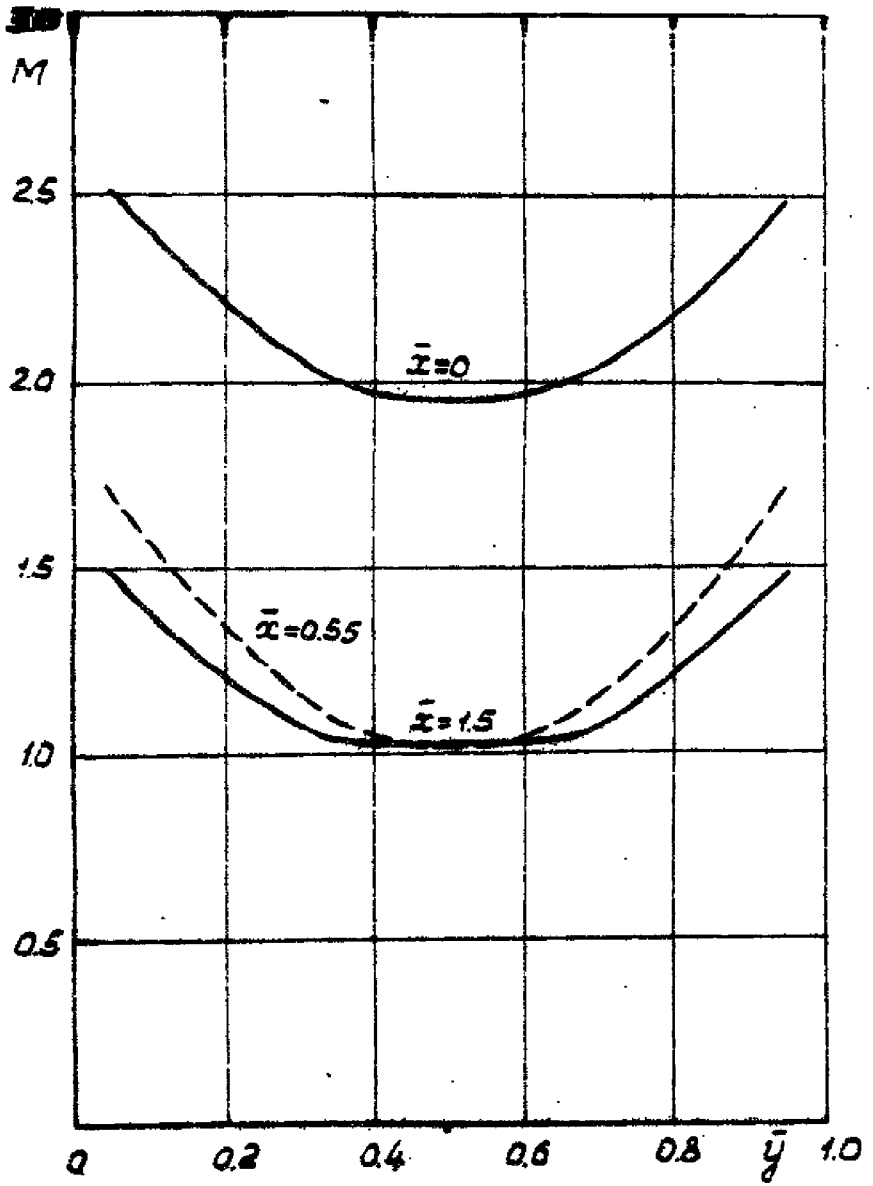

3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\bar{y}$
1.0
$\bar{x}=0$
$\bar{x}=0.55$
$\bar{x}=1.5$

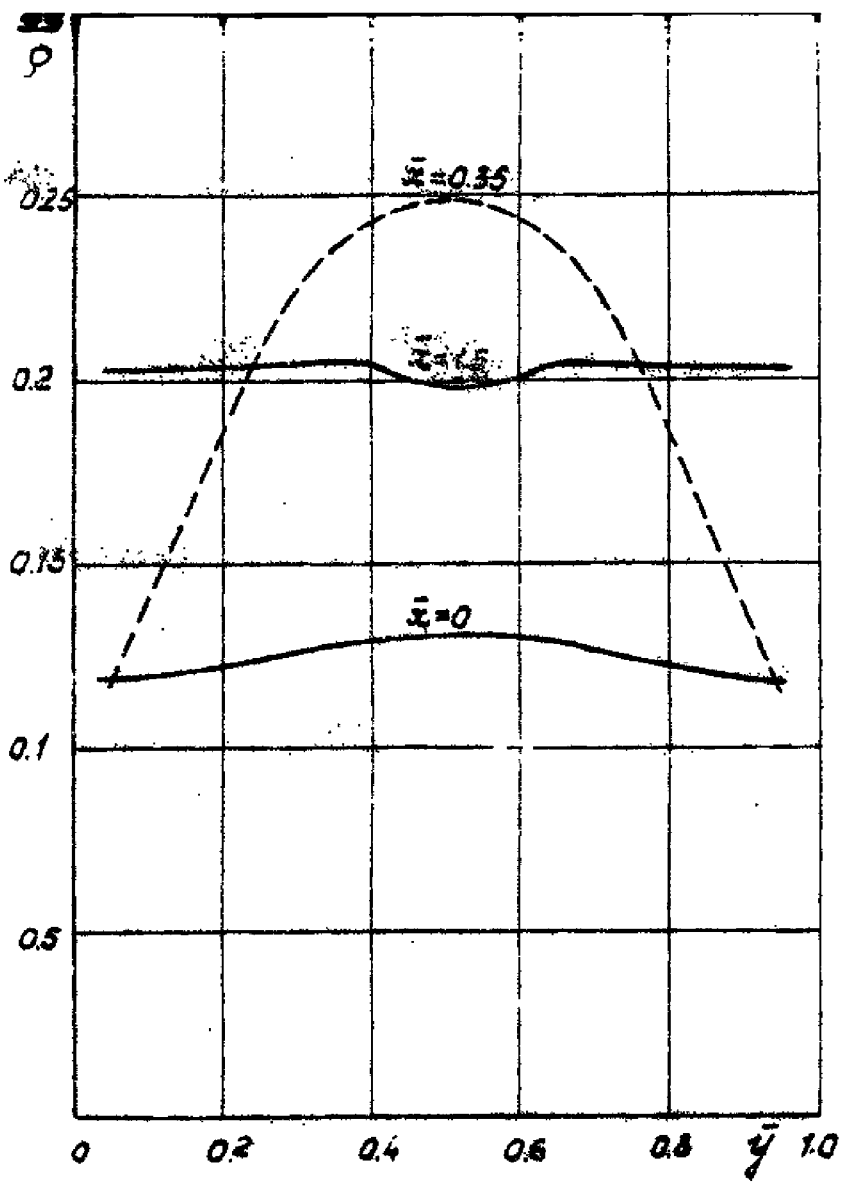

0.3
p
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\bar{y}$
1.0
$\bar{x}=0.5$
$\bar{x}=1.5$
$\bar{x}=0$


M
T
ρ
p
J
x=0

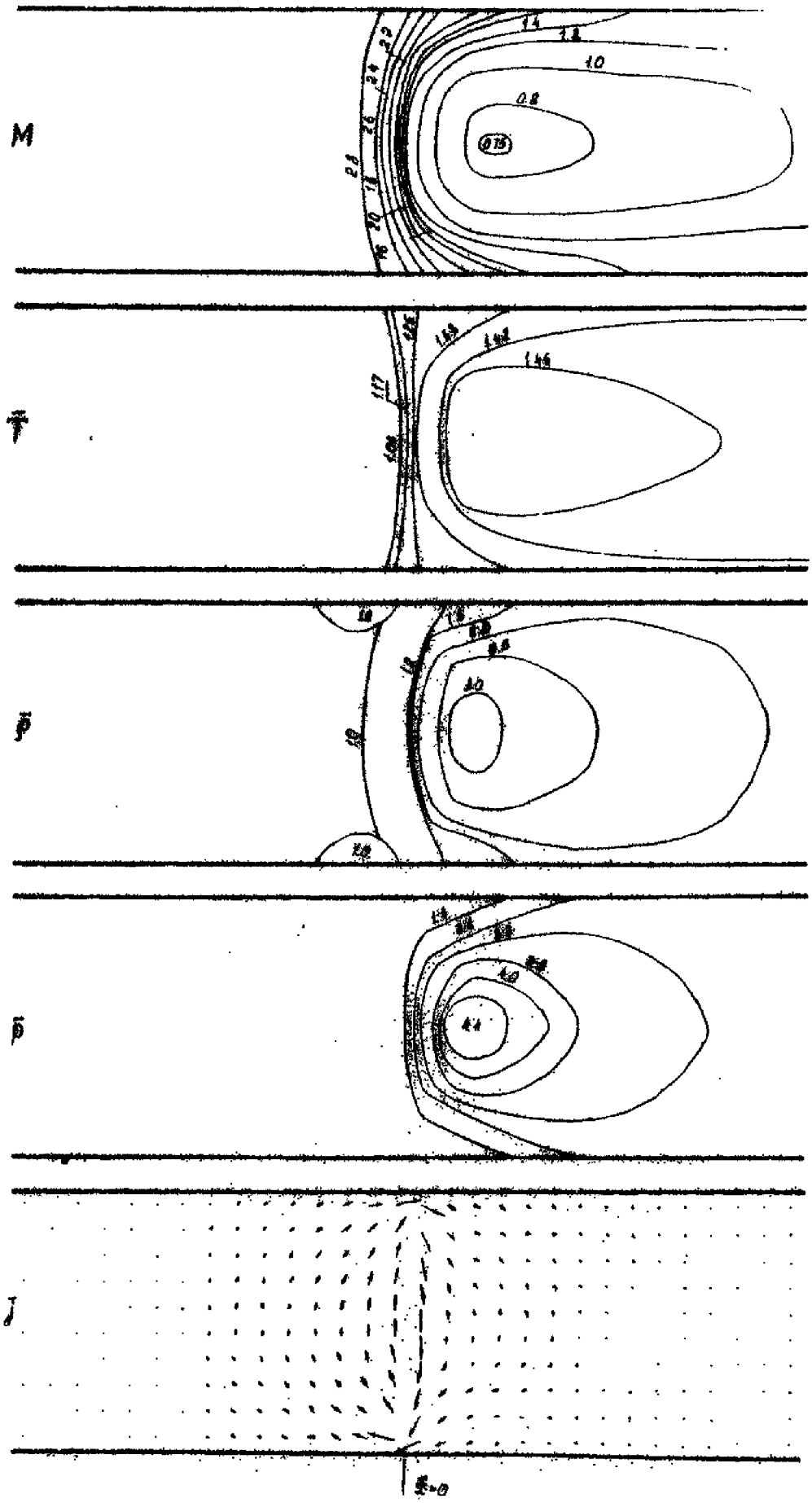

p
M
средняя линия тока
вдоль стенки
M
p
$\bar{M} = \frac{M_x}{M_1}$
$\bar{p} = \frac{p_x}{p_1}$
j

фиг. 3.5

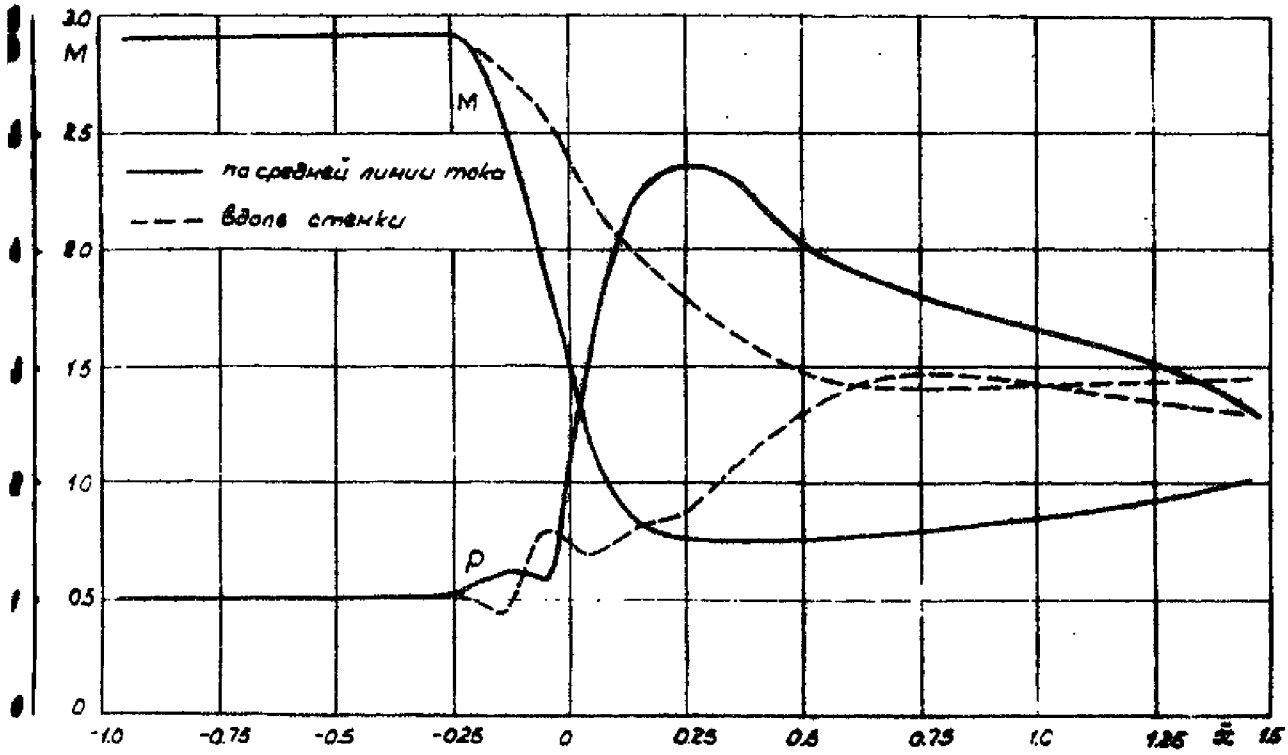

M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\bar{y}$
1.0
$\bar{x}=0$
$\bar{x}=0.55$
$\bar{x}=1.5$

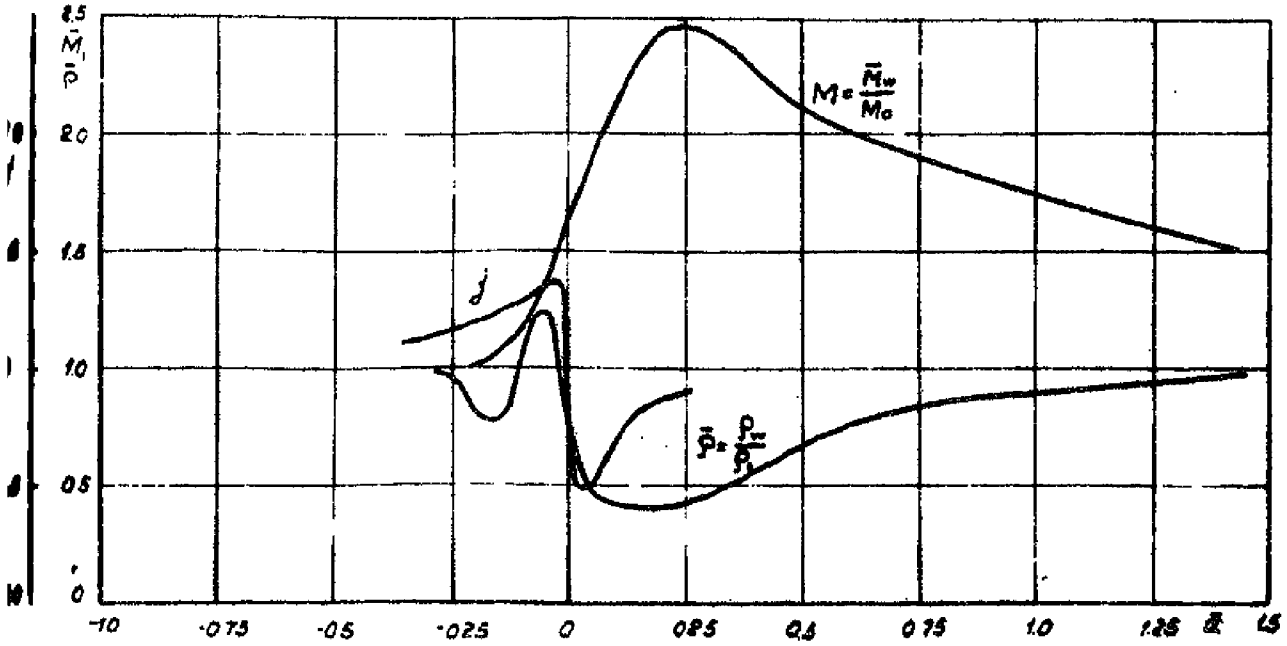

ρ
0.25
0.2
0.15
0.1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
$\bar{y}$
1.0
$\bar{x}=0.55$
$\bar{x}=1.5$
$\bar{x}=0$

фиг. 3.6

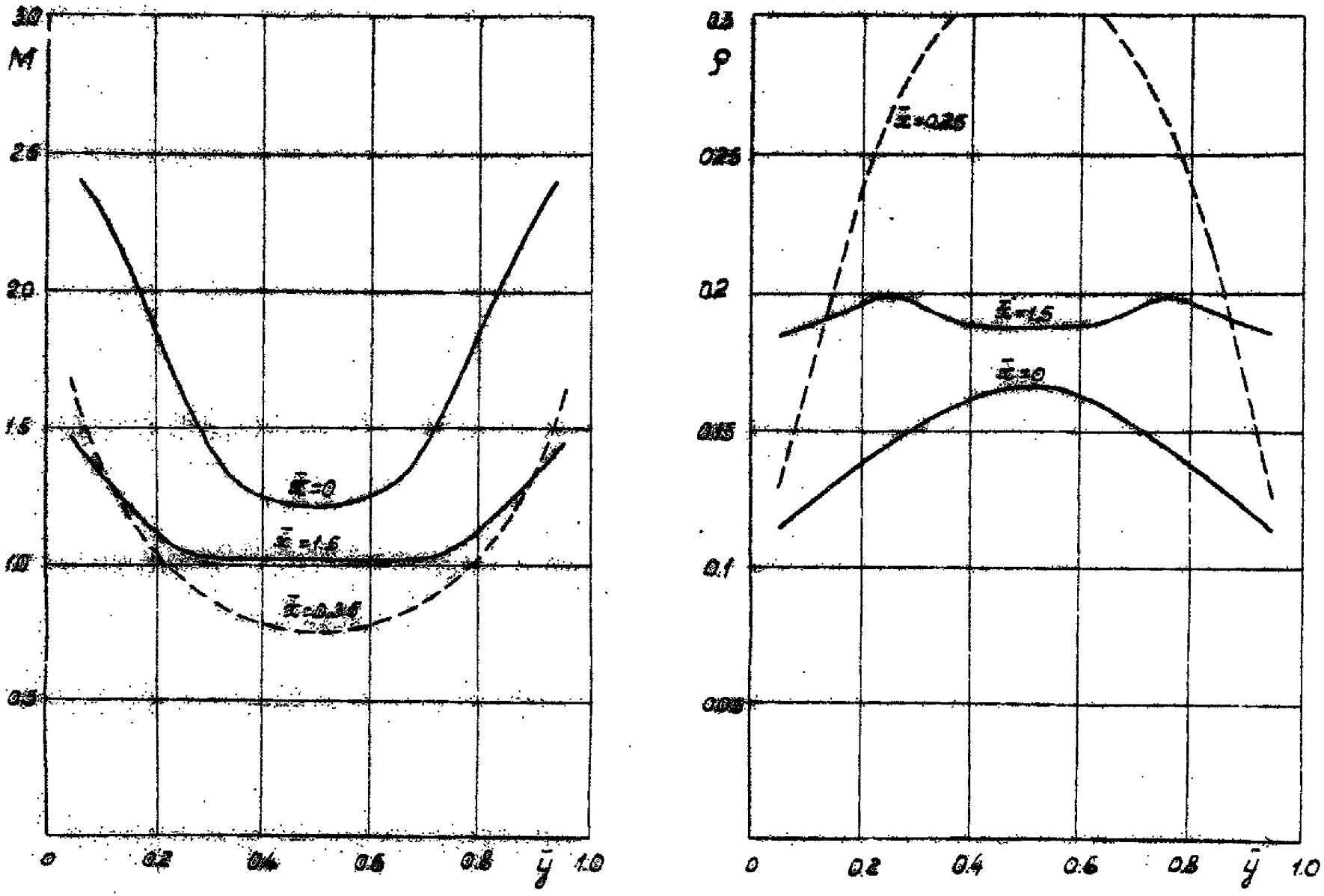


фиг. 3.7

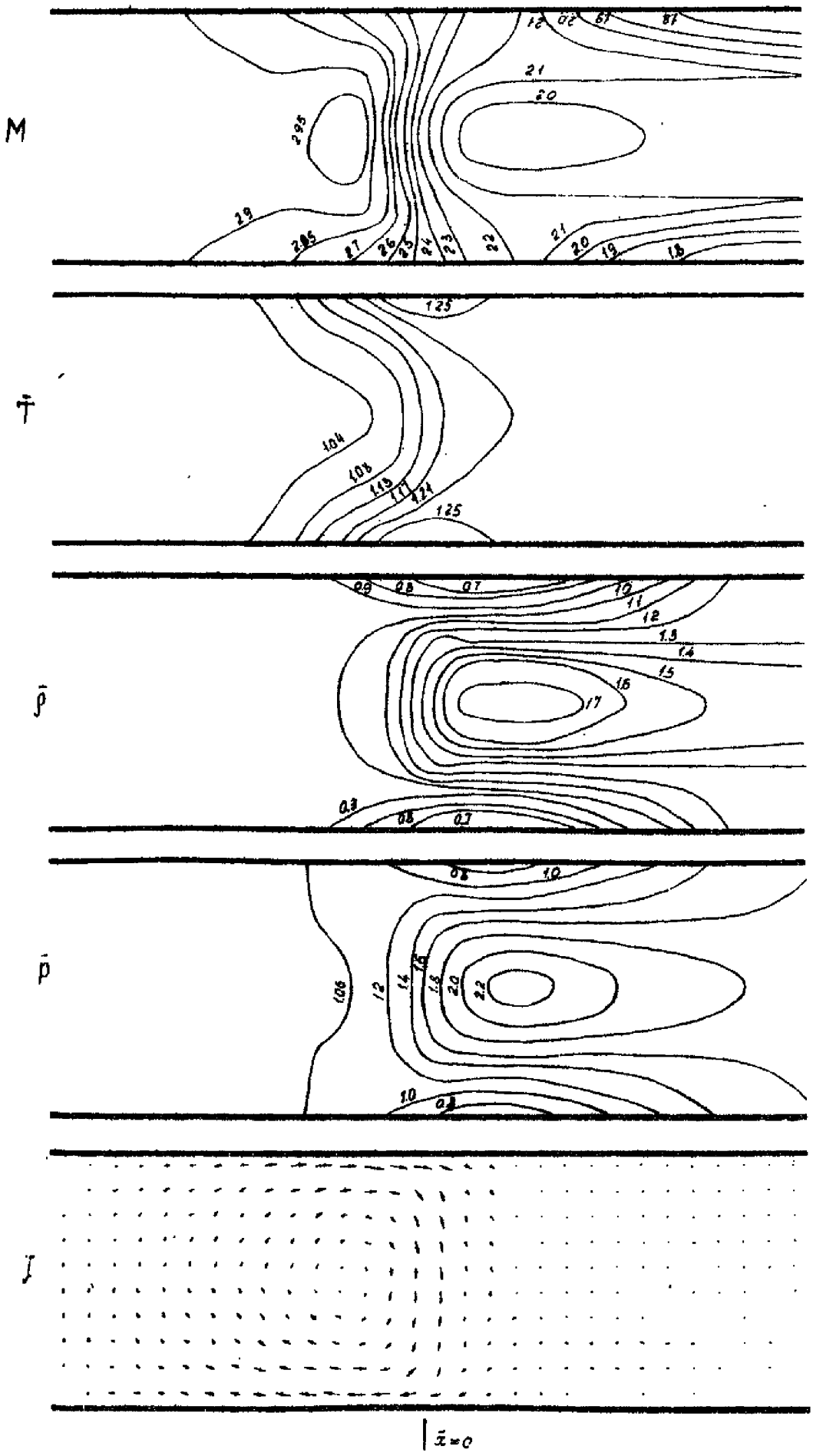

M
по средней линии тока
вдоль стенки
p
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5

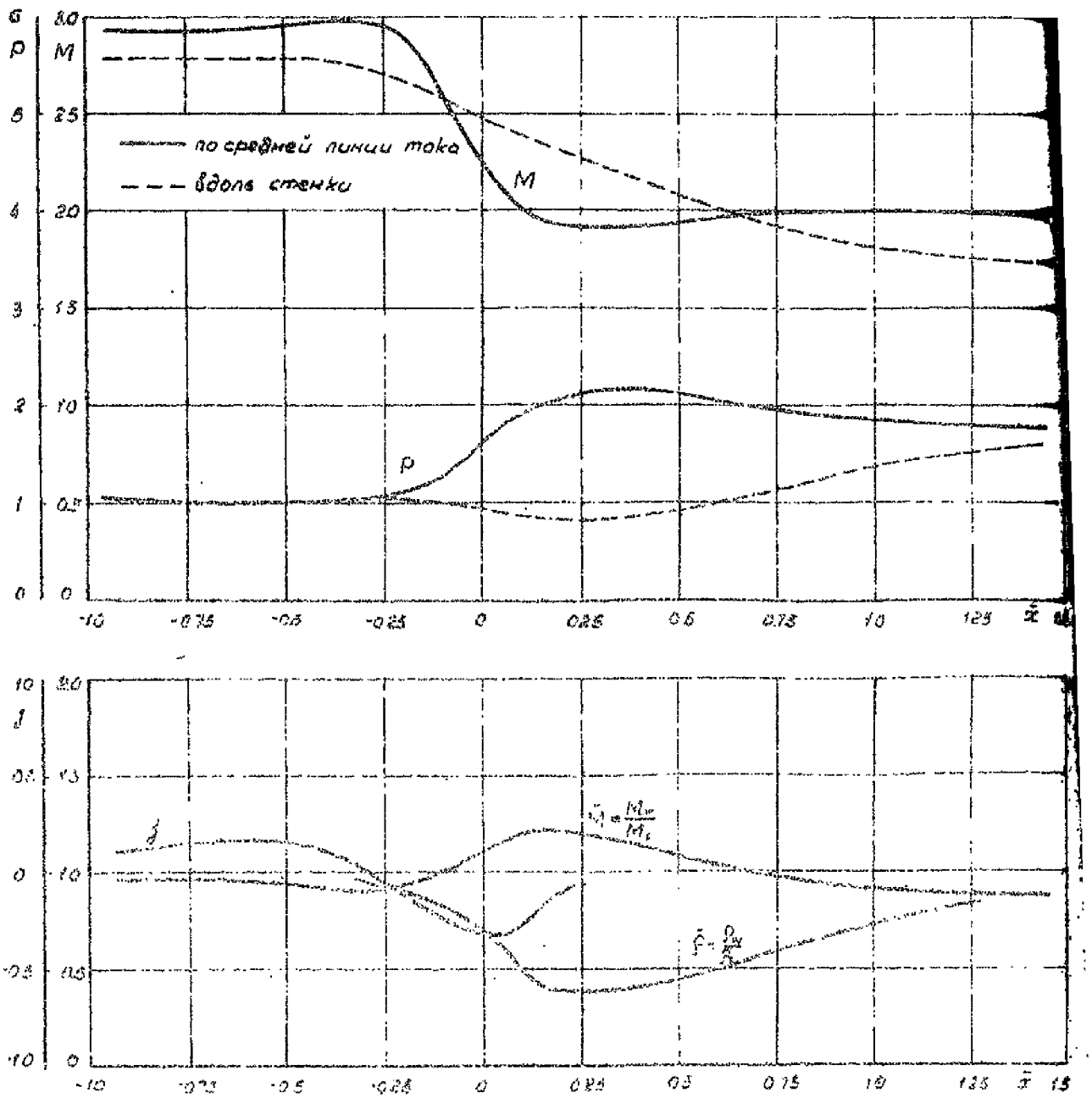

$M = \frac{\bar{M}_w}{M_0}$
$\bar{\rho} = \frac{\rho_w}{\rho_1}$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5

фиг. 3.8

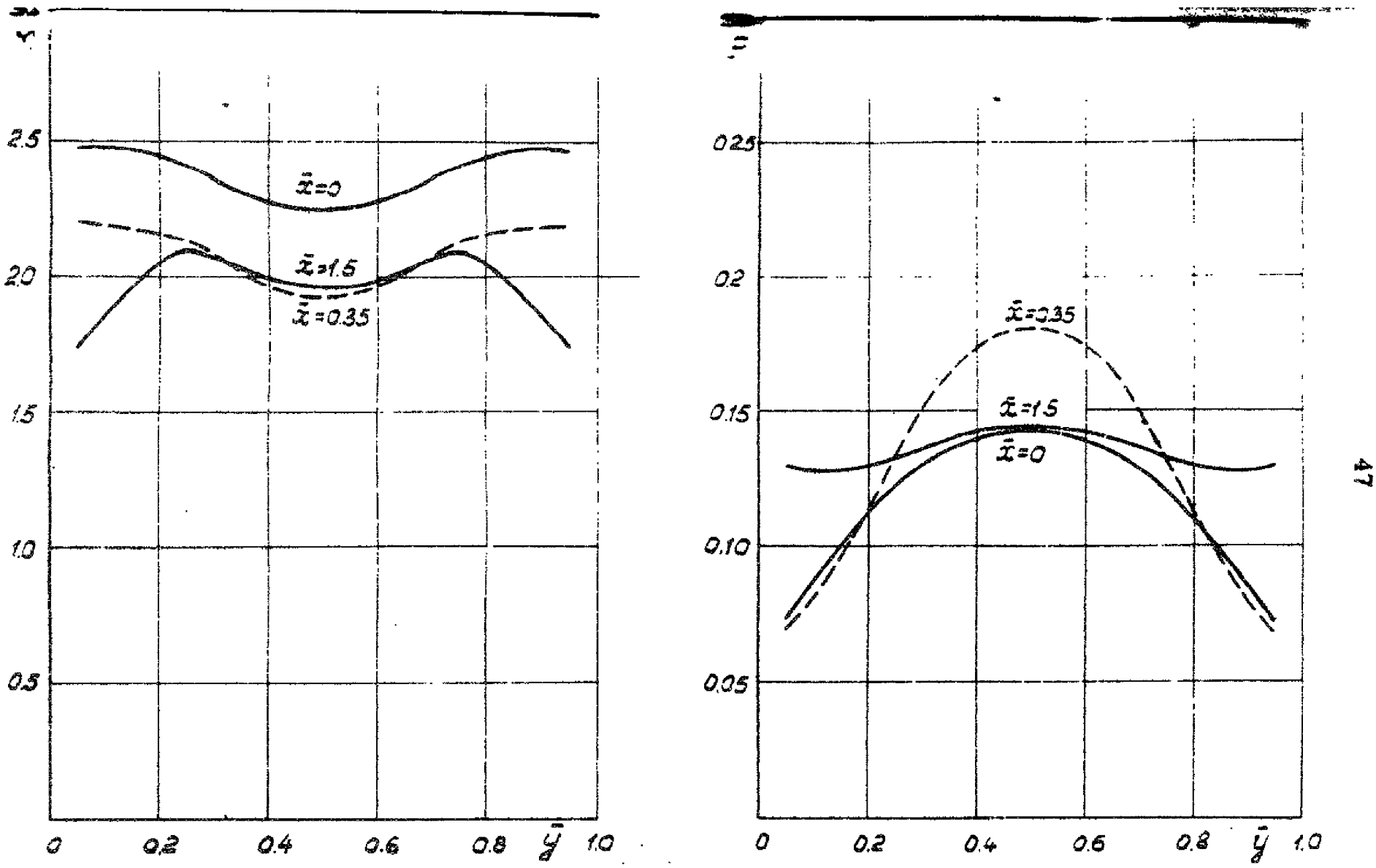

M
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ȳ
x̄=0
x̄=1.6
x̄=0.34
ρ
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
x̄=0.25
x̄=1.5
x̄=0

фиг. 3.9

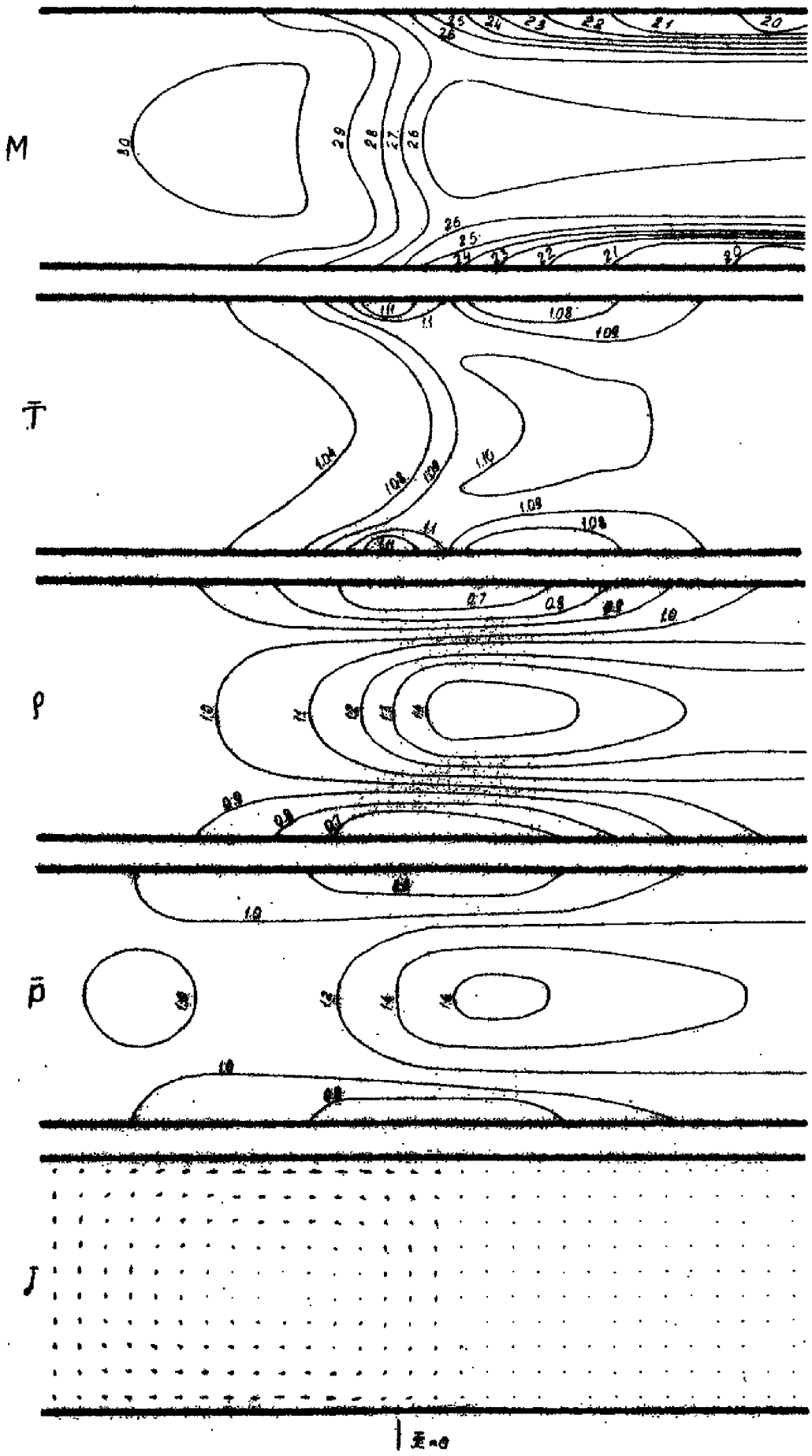

M
T
ρ
p
J
x̄=0


σ
p
M
по средней линии тока
вдоль стенки
M
p
δ
$\bar{\eta} = \frac{M_w}{M_c}$
$\bar{f} = \frac{p_w}{p_c}$
$\bar{x}$

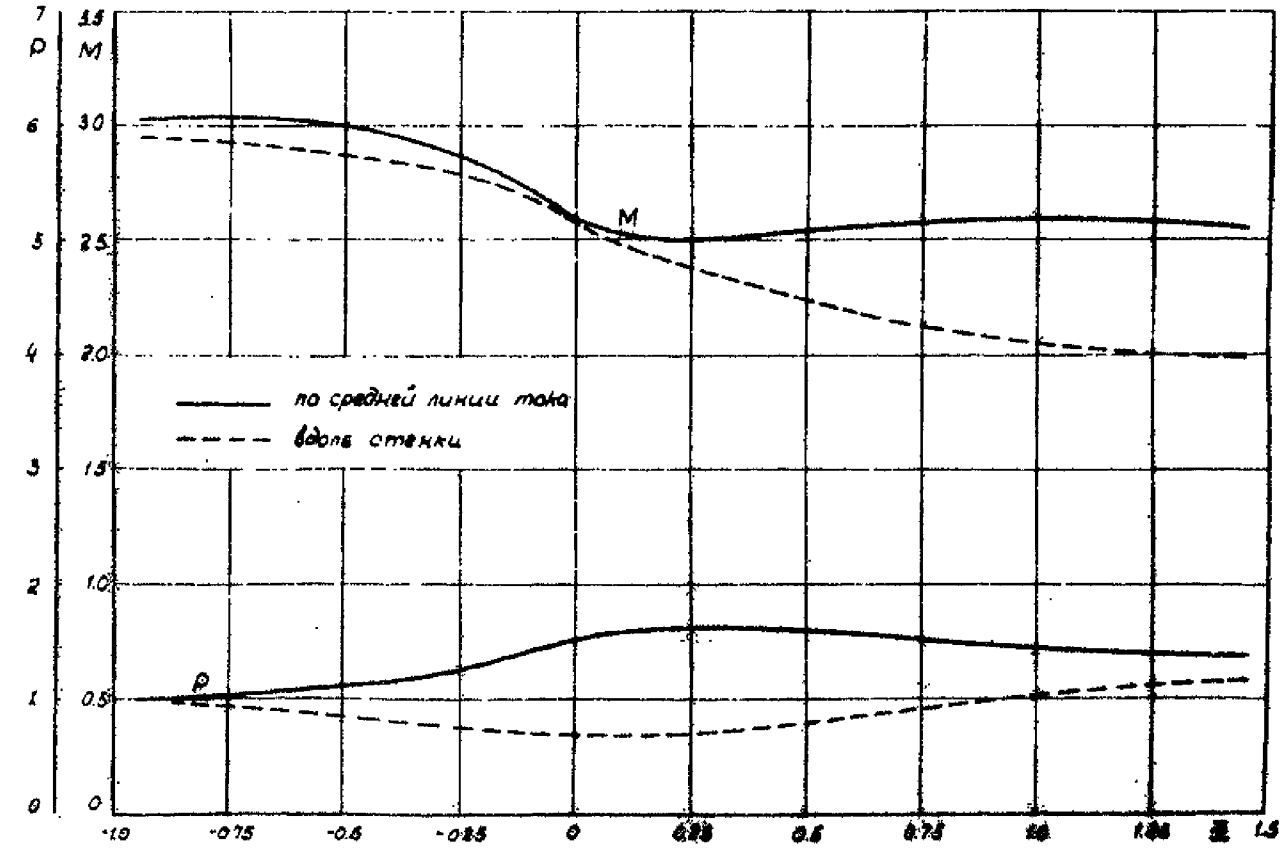
Фиг. 3.11

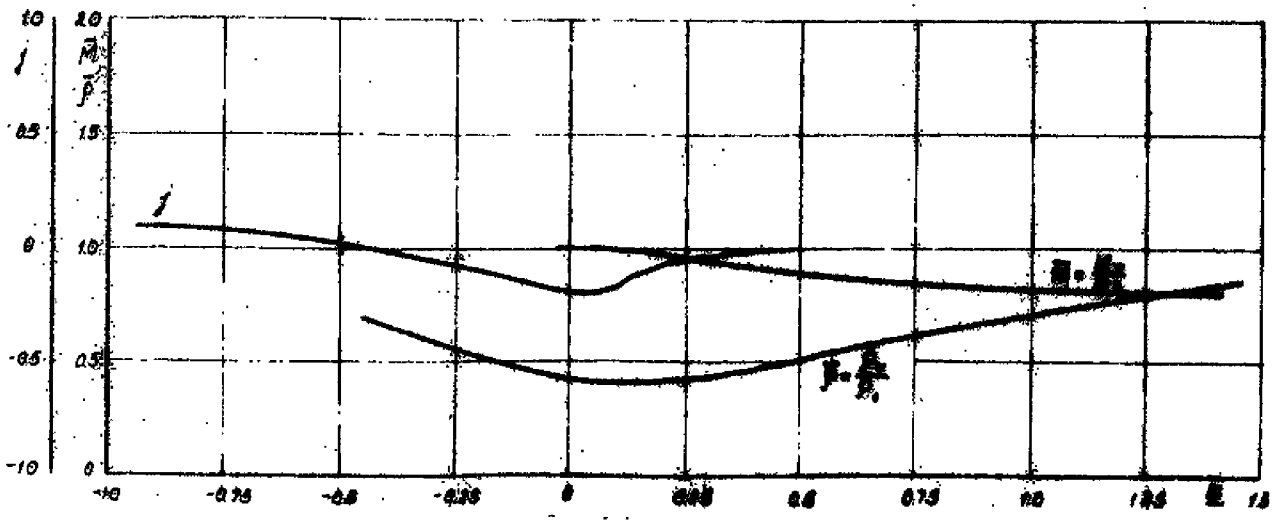

2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$\bar{y}$
$\bar{x}=0$
$\bar{x}=1.5$
$\bar{x}=0.35$
0.25
0.2
0.15
0.10
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$\bar{y}$
$\bar{x}=0.35$
$\bar{x}=1.5$
$\bar{x}=0$

фиг. 3.12

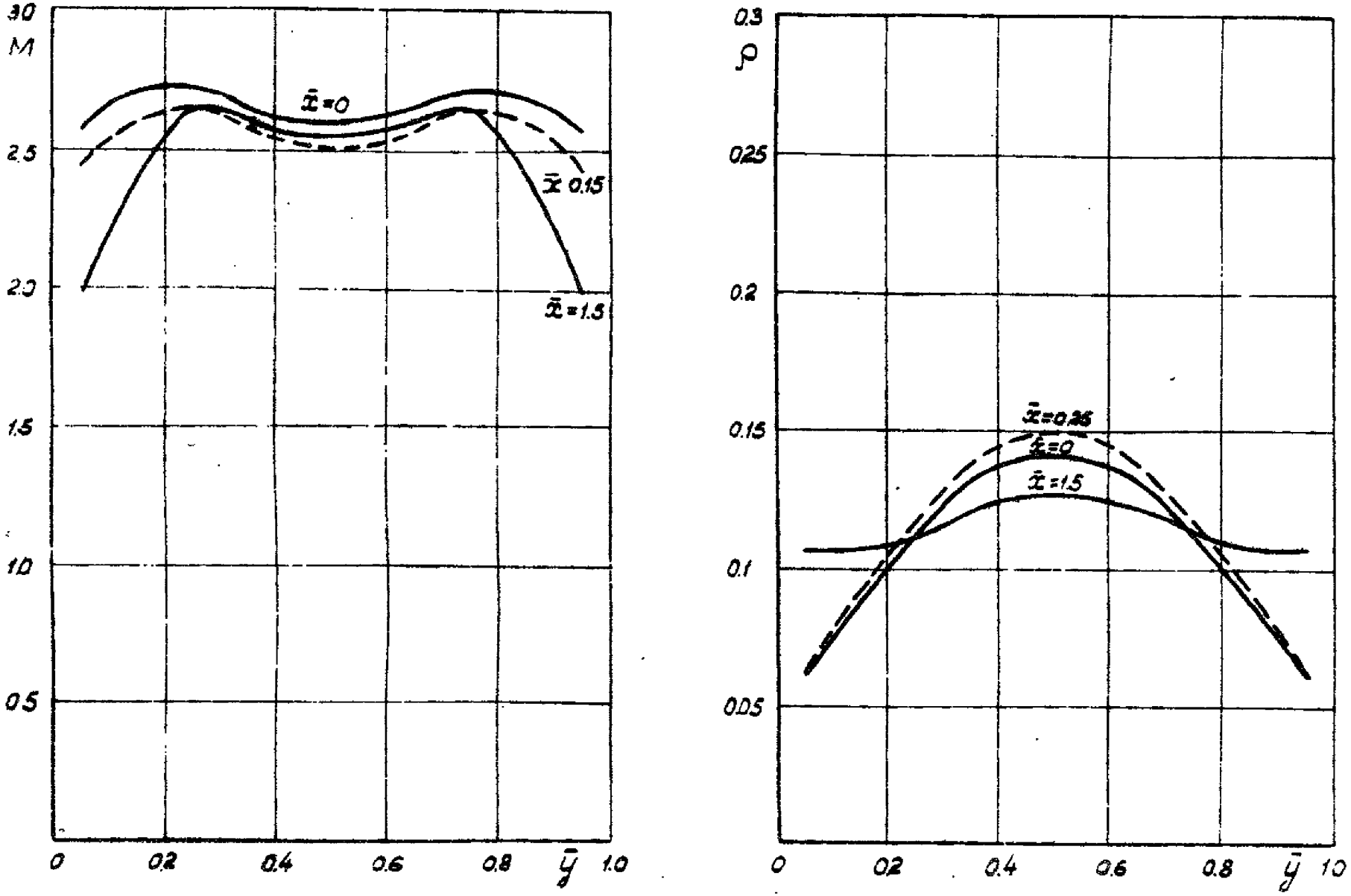


фиг. 3.13

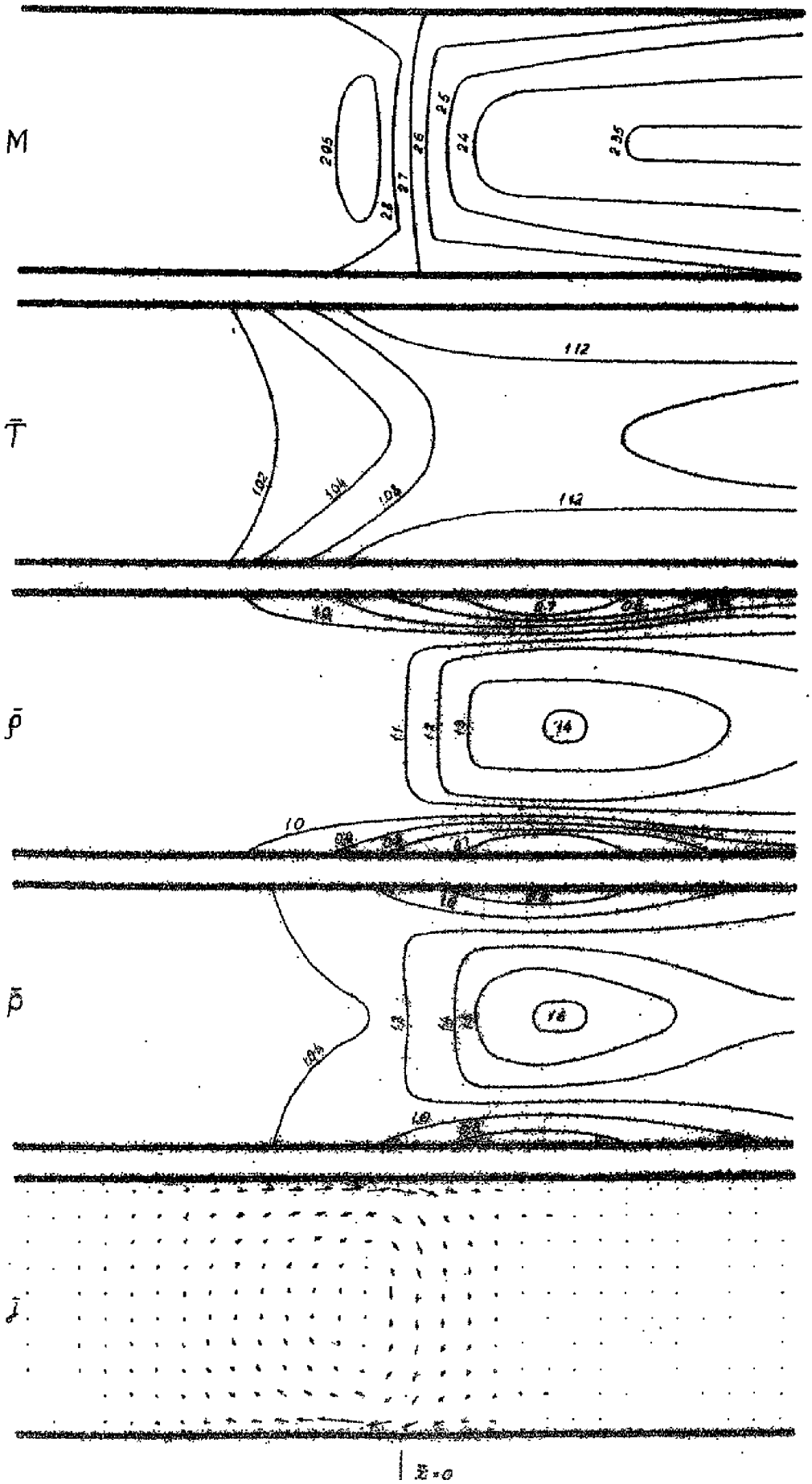




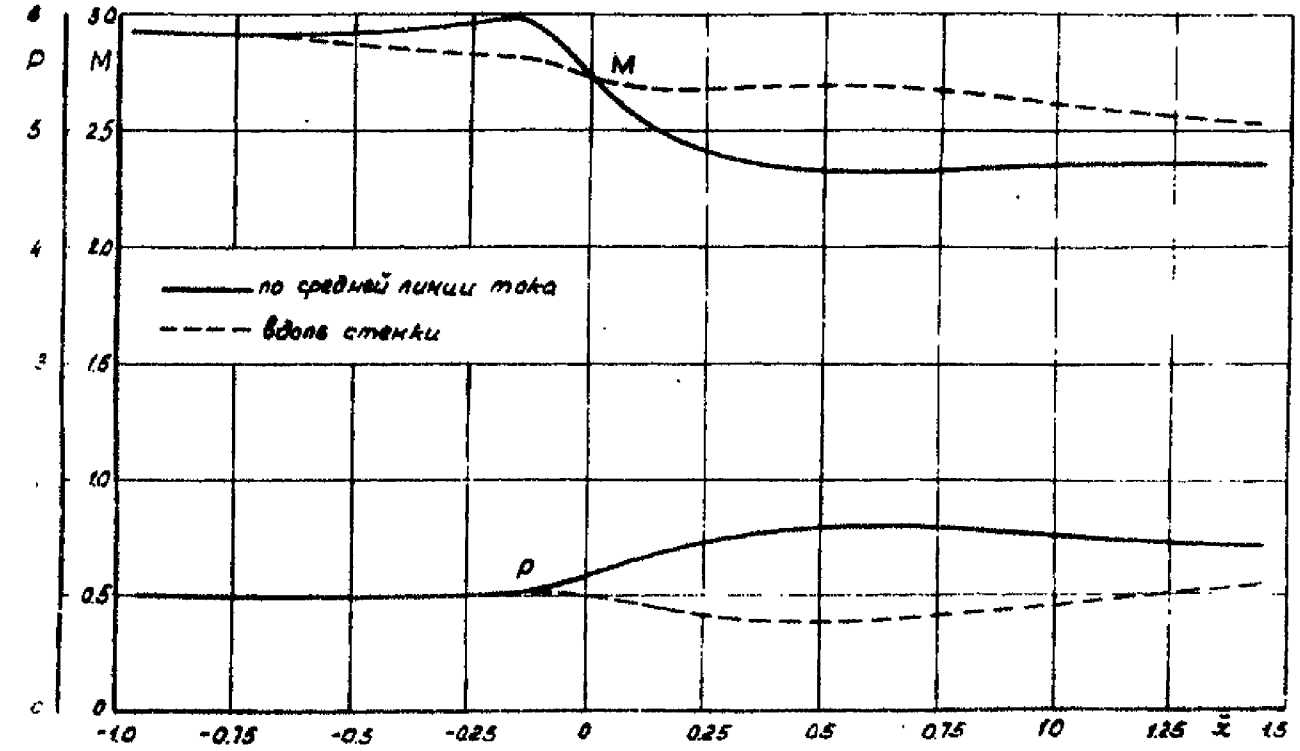
фиг. 3/4

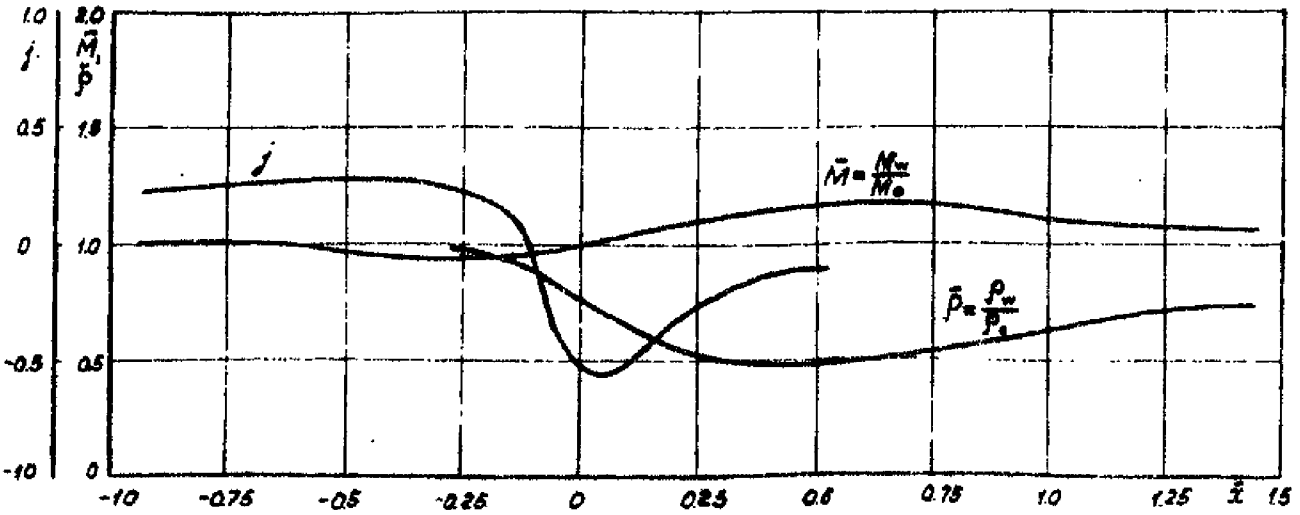

3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$\bar{y}$
$\bar{x}=0$
$\bar{x}$ 0.15
$\bar{x}=1.5$
0.3
ρ
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
$\bar{x}=0.25$
$\bar{x}=0$
$\bar{x}=1.5$

фиг. 3.15

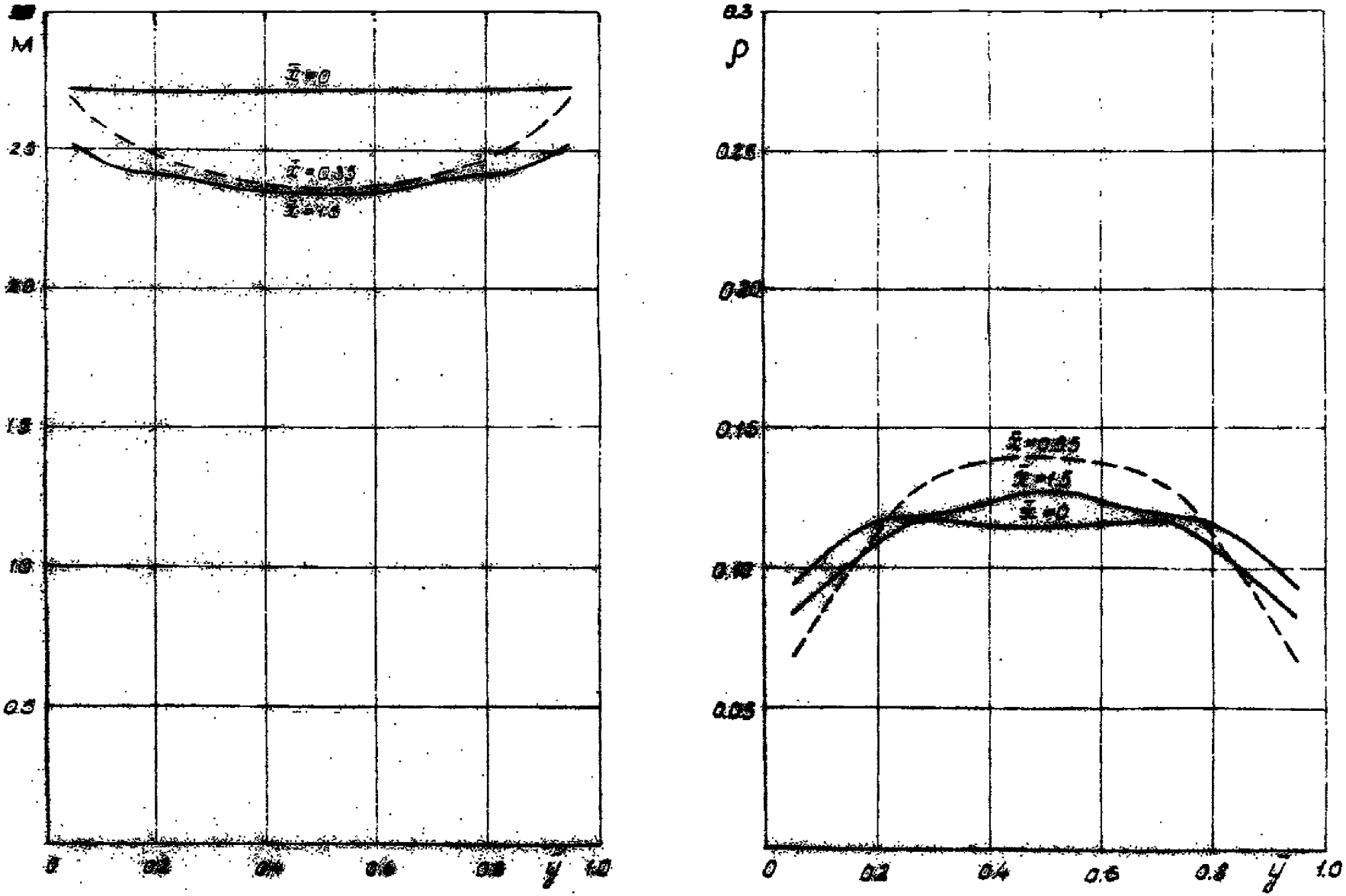


фиг 3.16

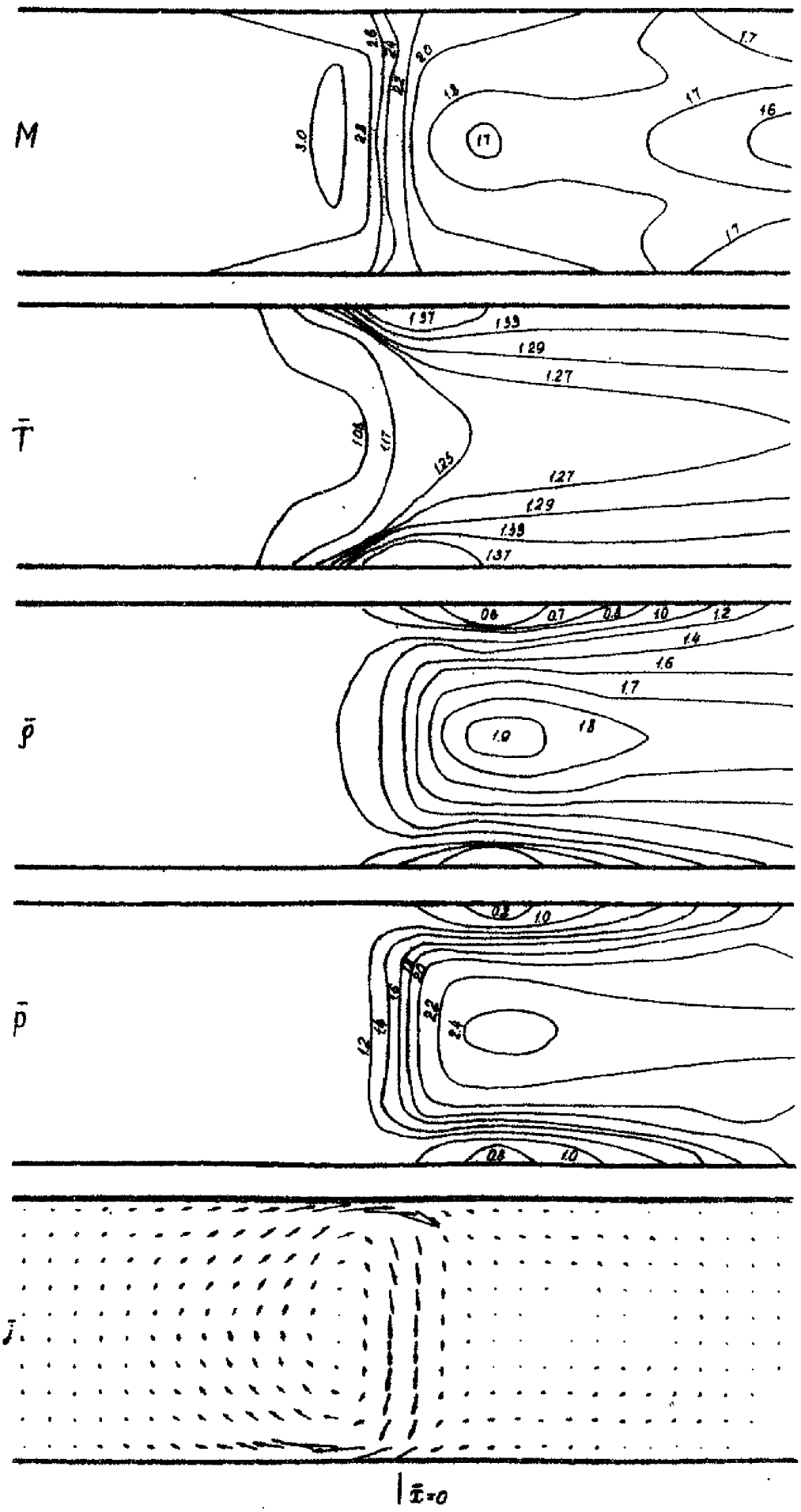

p
M
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
M
p
по средней линии тока
вдоль стенки
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5


j
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
2.0
1.5
1.0
0.5
0
j
$\bar{M} = \frac{M_w}{M_0}$
$\bar{p} = \frac{p_w}{p_0}$
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5

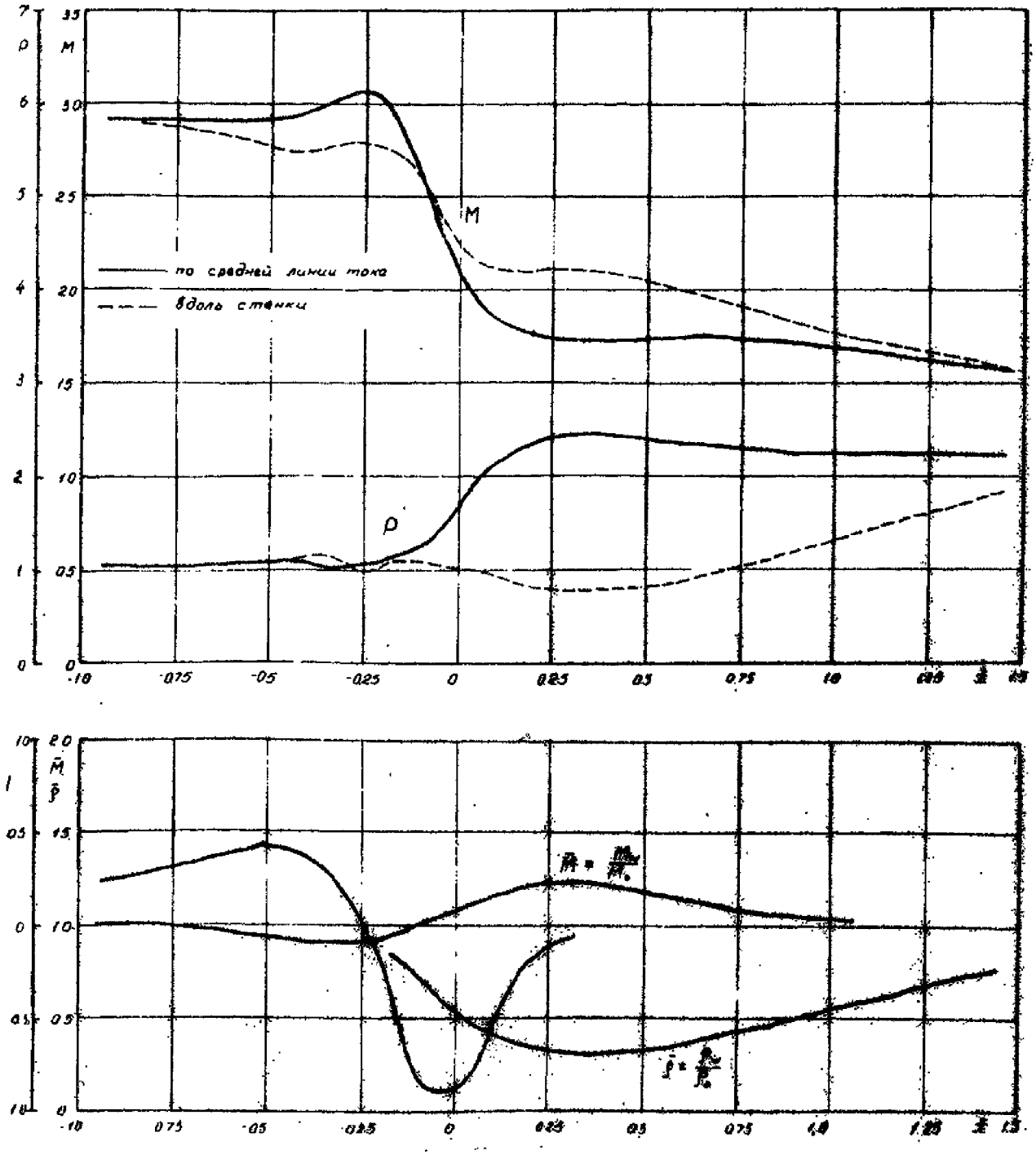
фиг. 317


M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
y
1.0
ρ
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
y
1.0

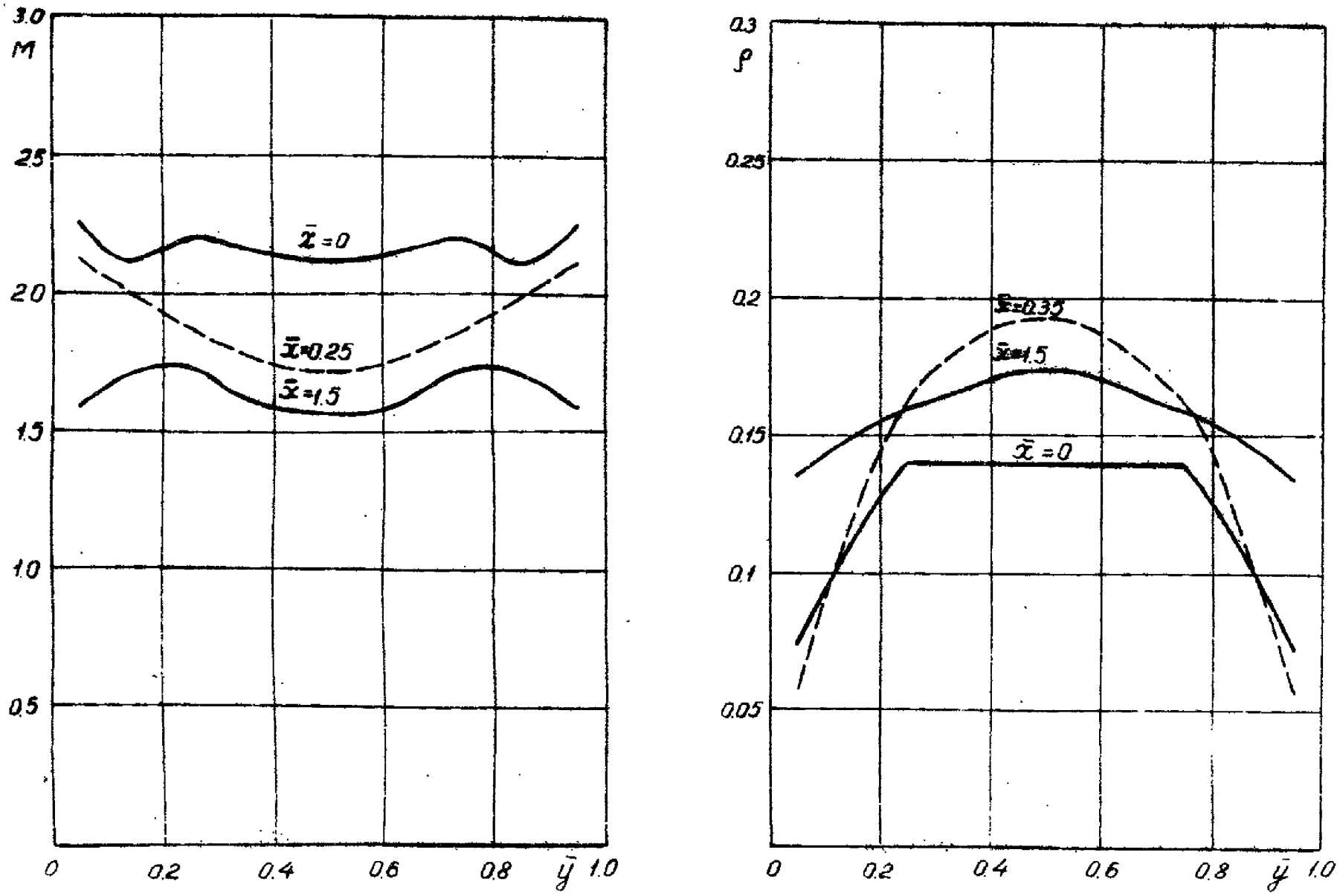
фиг. 3.18



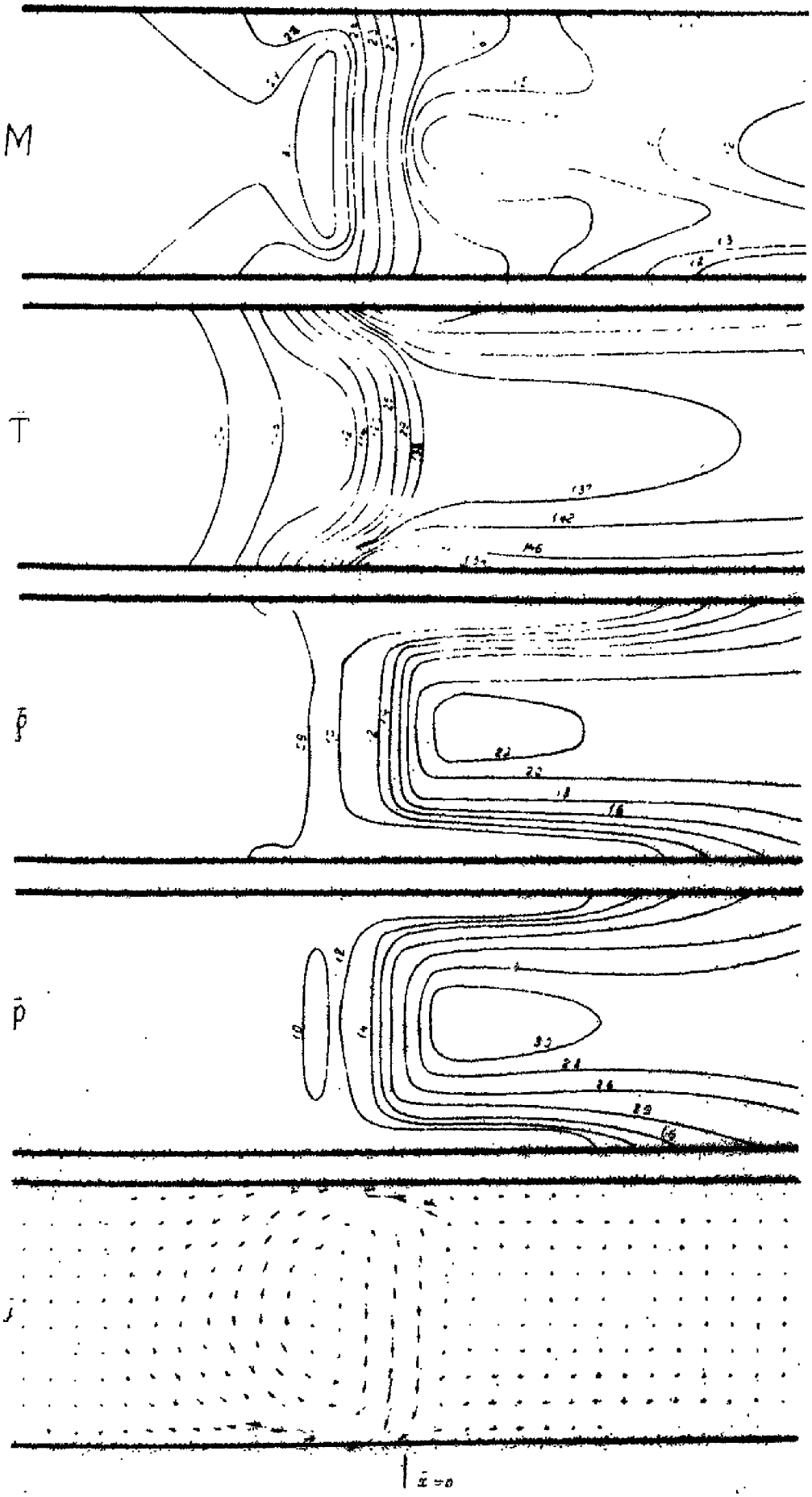
фиг. 319


ρ
M
по средней линии тока
вдоль стенки
M
ρ
$\bar{M} = \frac{M}{M_0}$
$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$

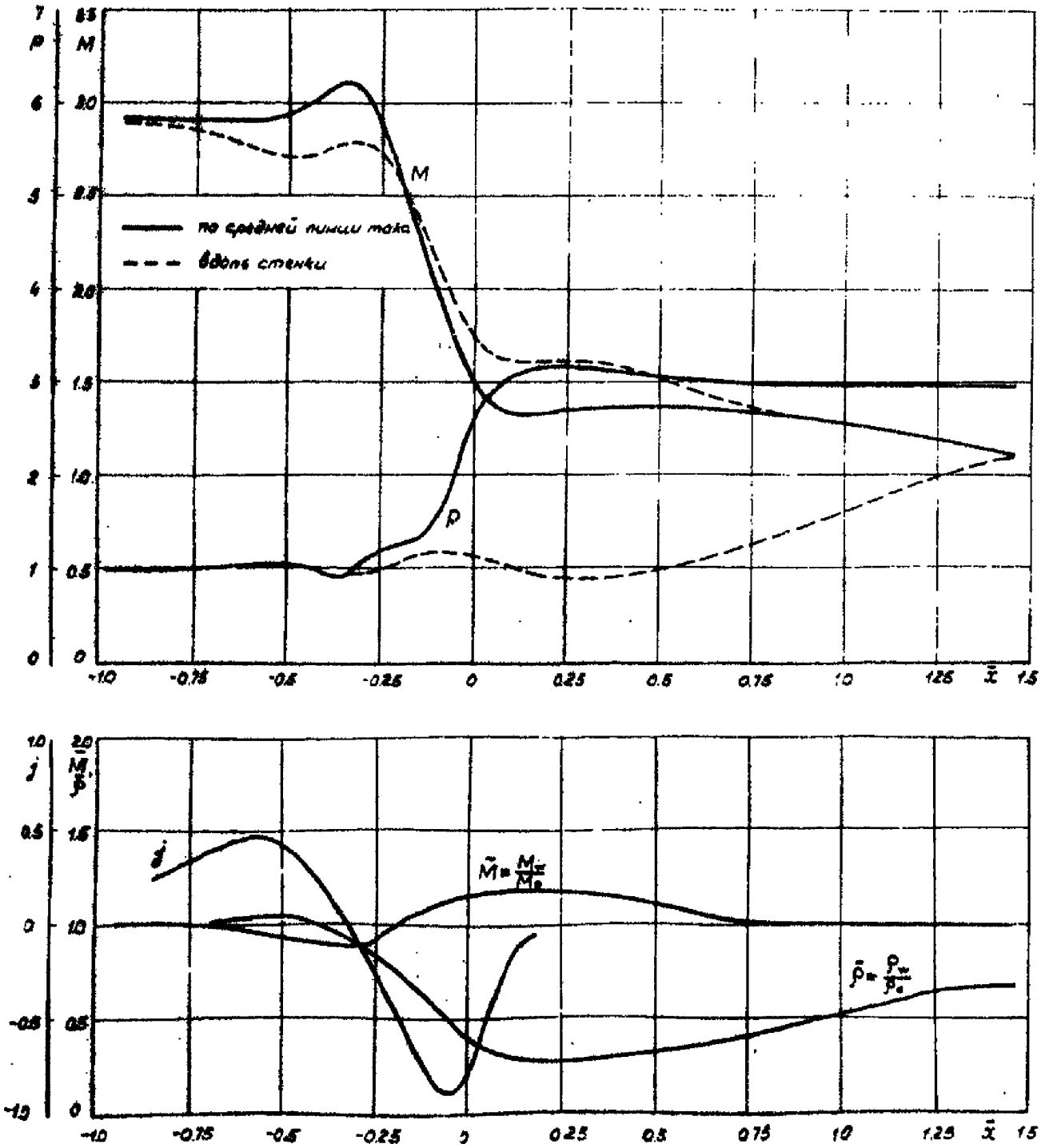
Фиг. 320


3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ 1.0
x̄ = 0
x̄=0.25
x̄=1.5
0.3
ρ
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ 1.0
x̄=0.35
x̄=1.5
x̄ = 0

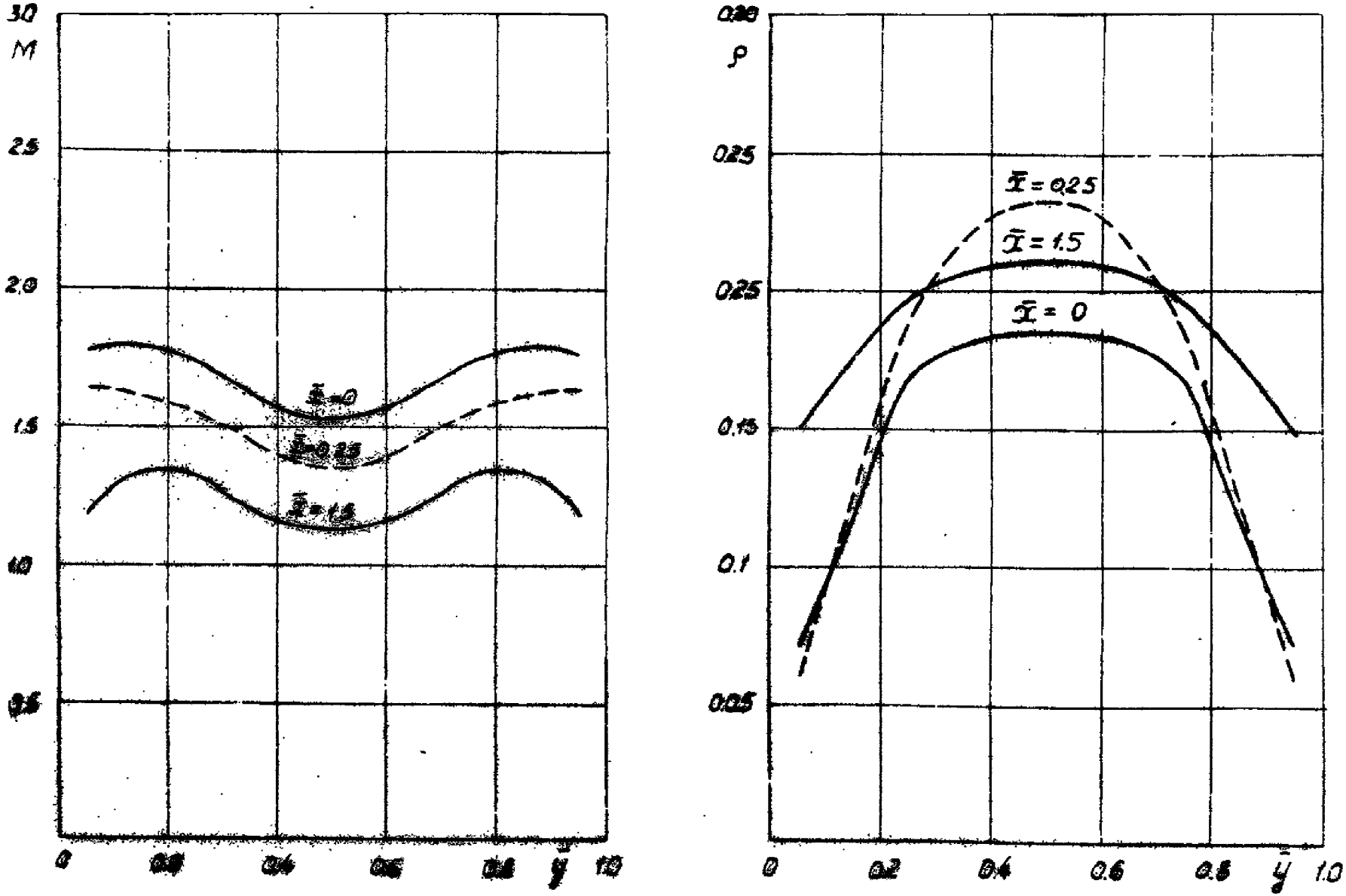
фиг. 3.21



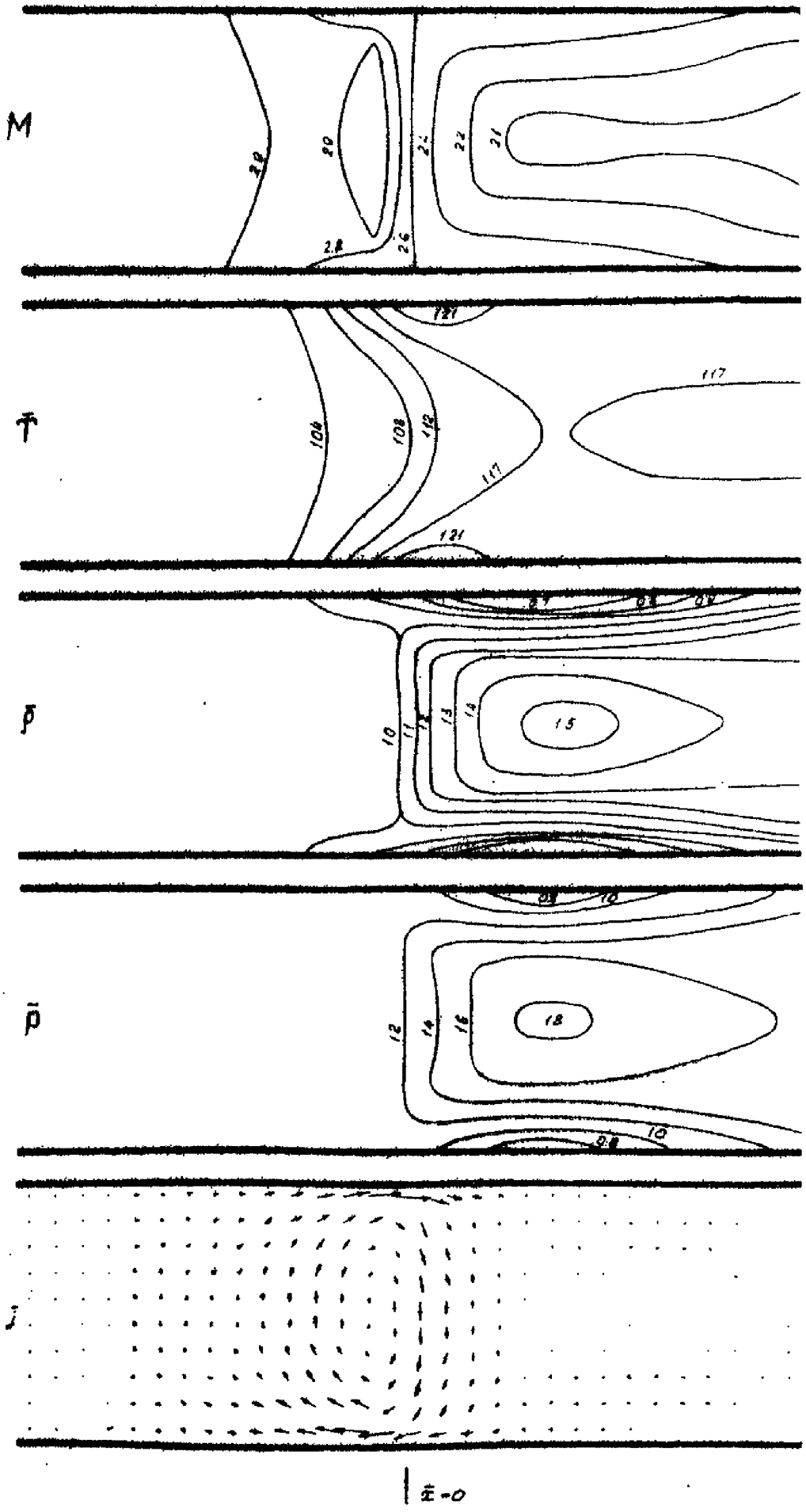
фиг 322


p
M
M
p
по средней линии тока
вдоль стенки
$\bar{x}$
$\bar{M} = \frac{M_{ж}}{M_0}$
$\bar{p} = \frac{p_{ж}}{p_0}$
$\bar{x}$

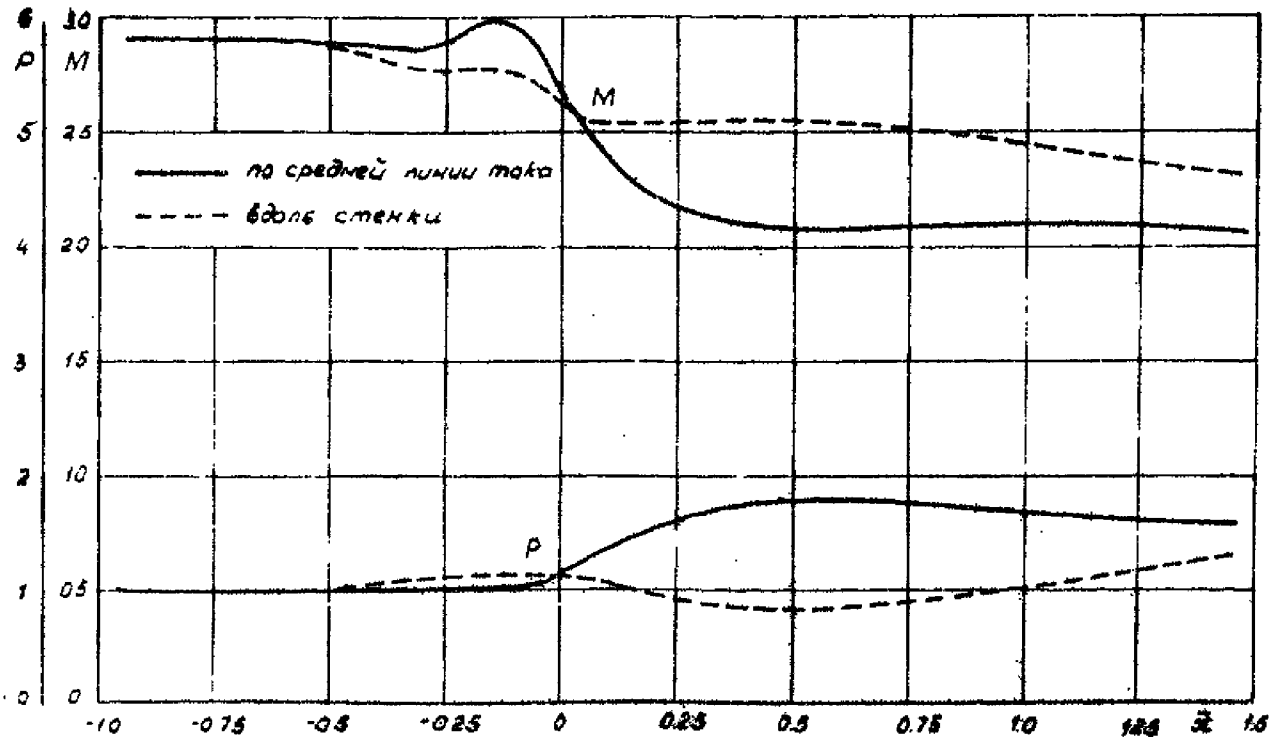
фиг. 323

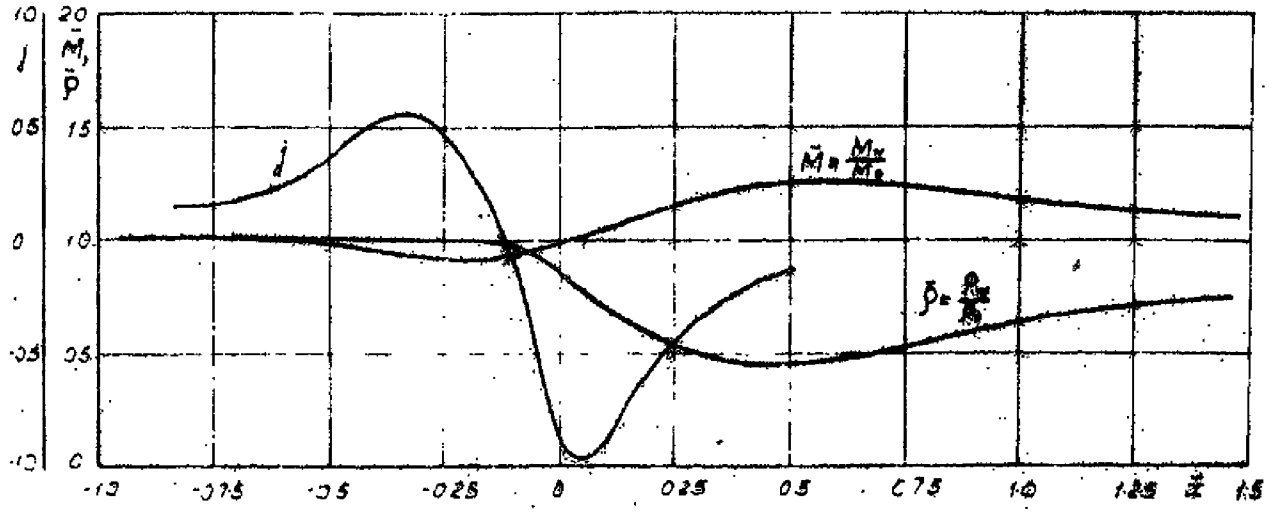

M
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ȳ
ρ
0.30
0.25
0.25
0.15
0.1
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ȳ
X̄ = 0.25
X̄ = 1.5
X̄ = 0

фиг. 3.24

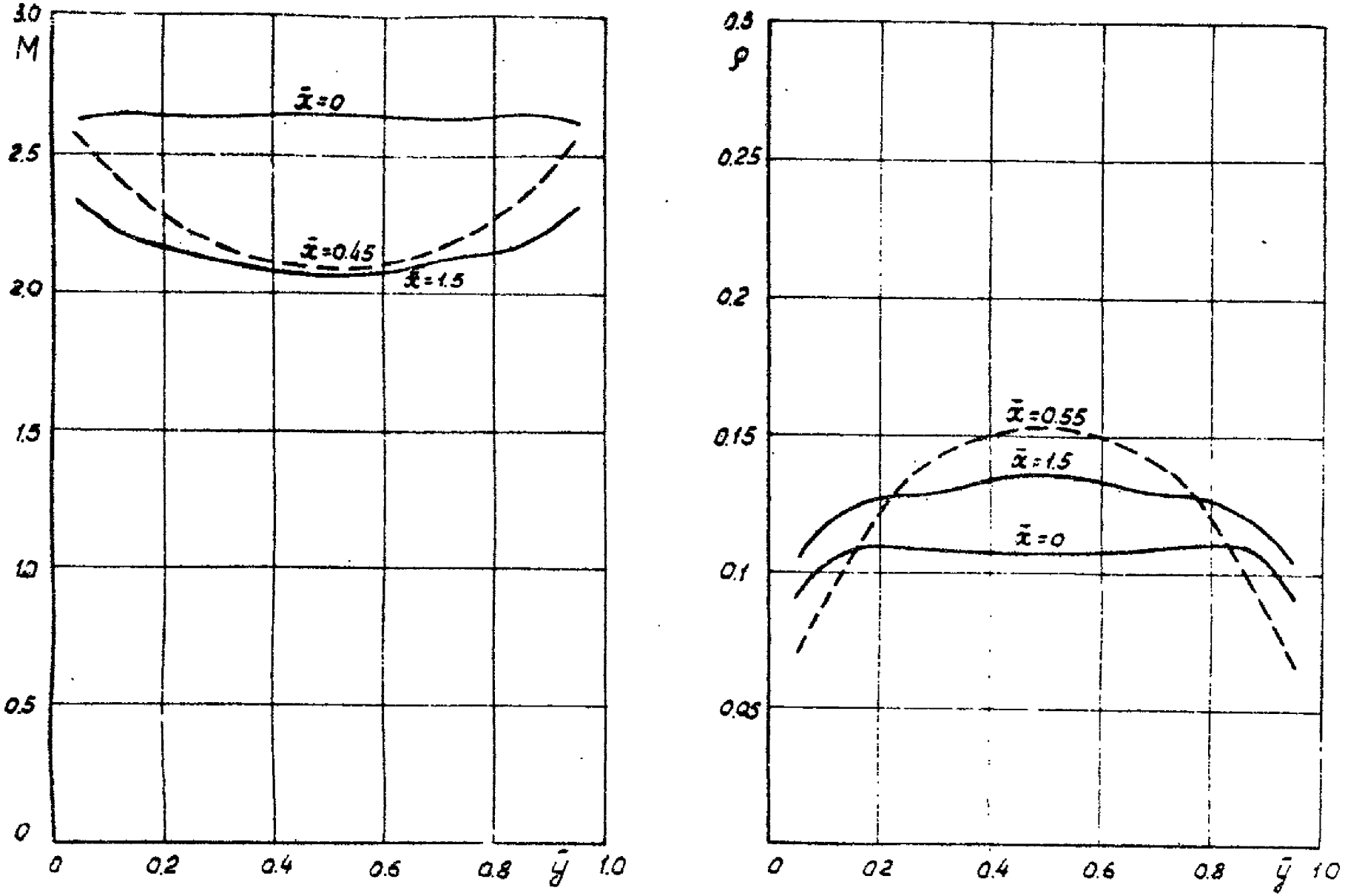


фиг 325

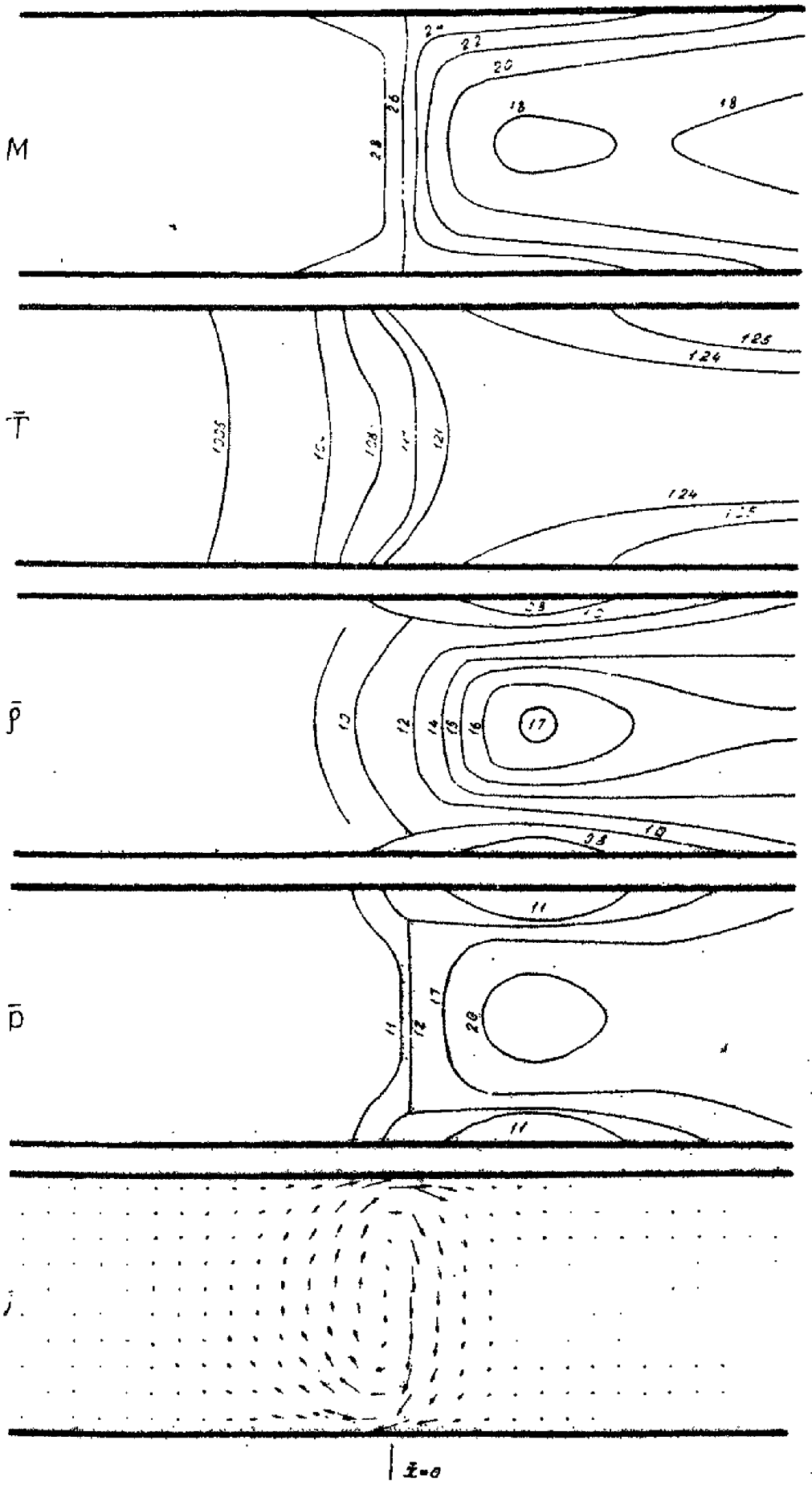

ρ
M
по средней линии тока
вдоль стенки
M
ρ
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5


j
M̄, ρ̄
j
M̄ = Mx/M*
ρ̄ = ρx/ρ*
-1.0
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5

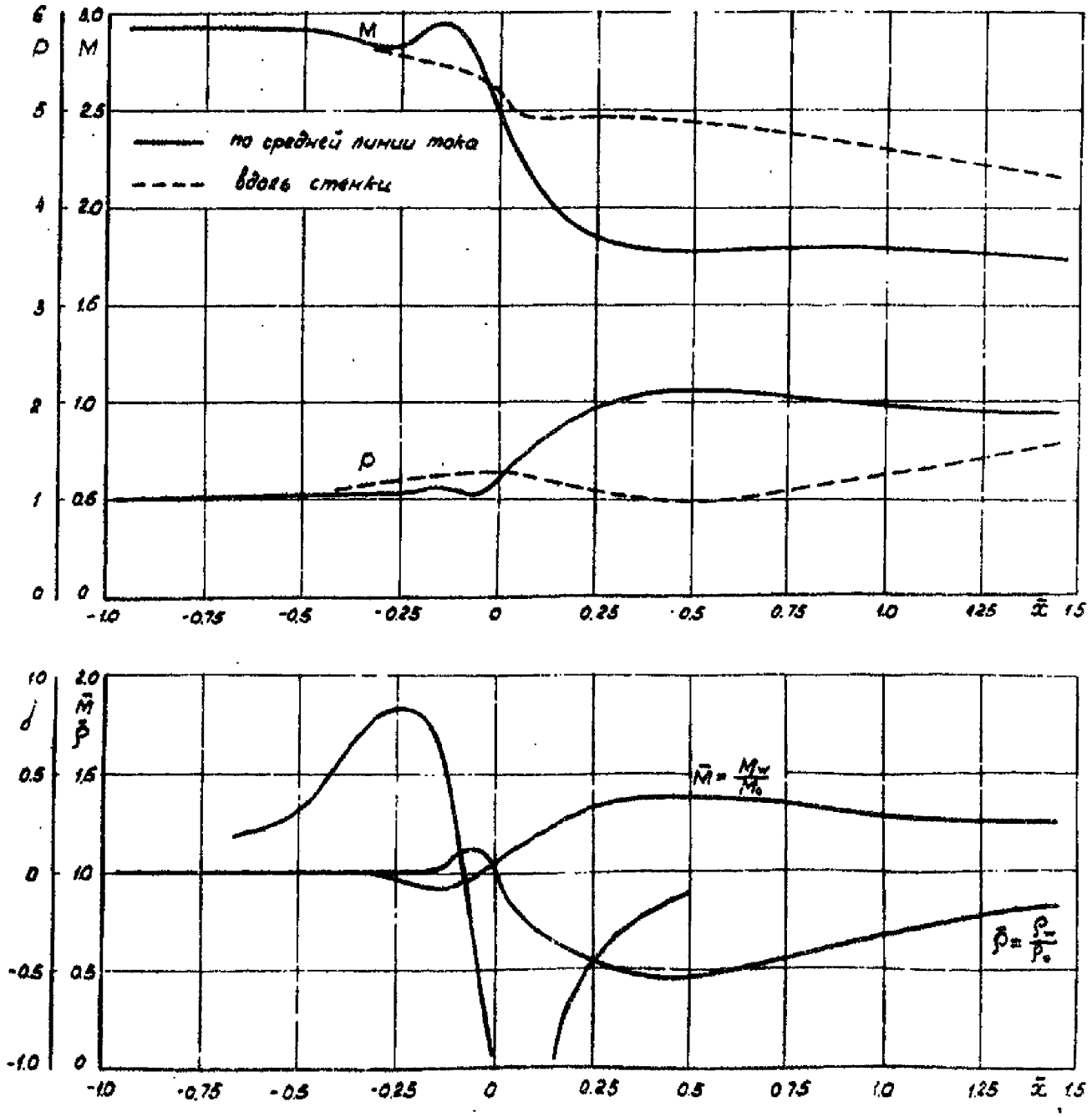
Фиг. 3.26


3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ
1.0
x̄=0
x̄=0.45
x̄=1.5
0.3
ρ
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ
1.0
x̄=0.55
x̄=1.5
x̄=0

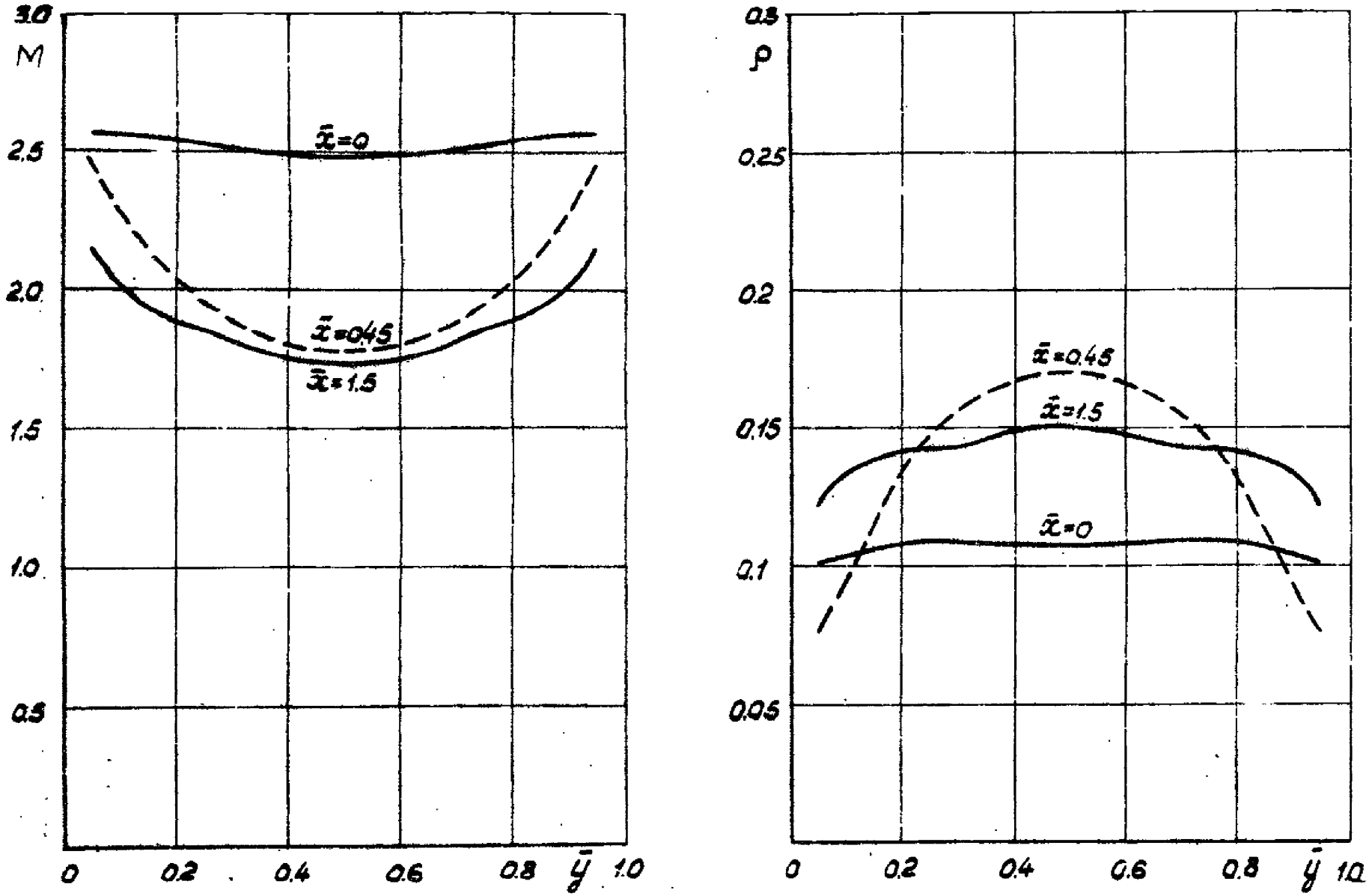
фиг. 327



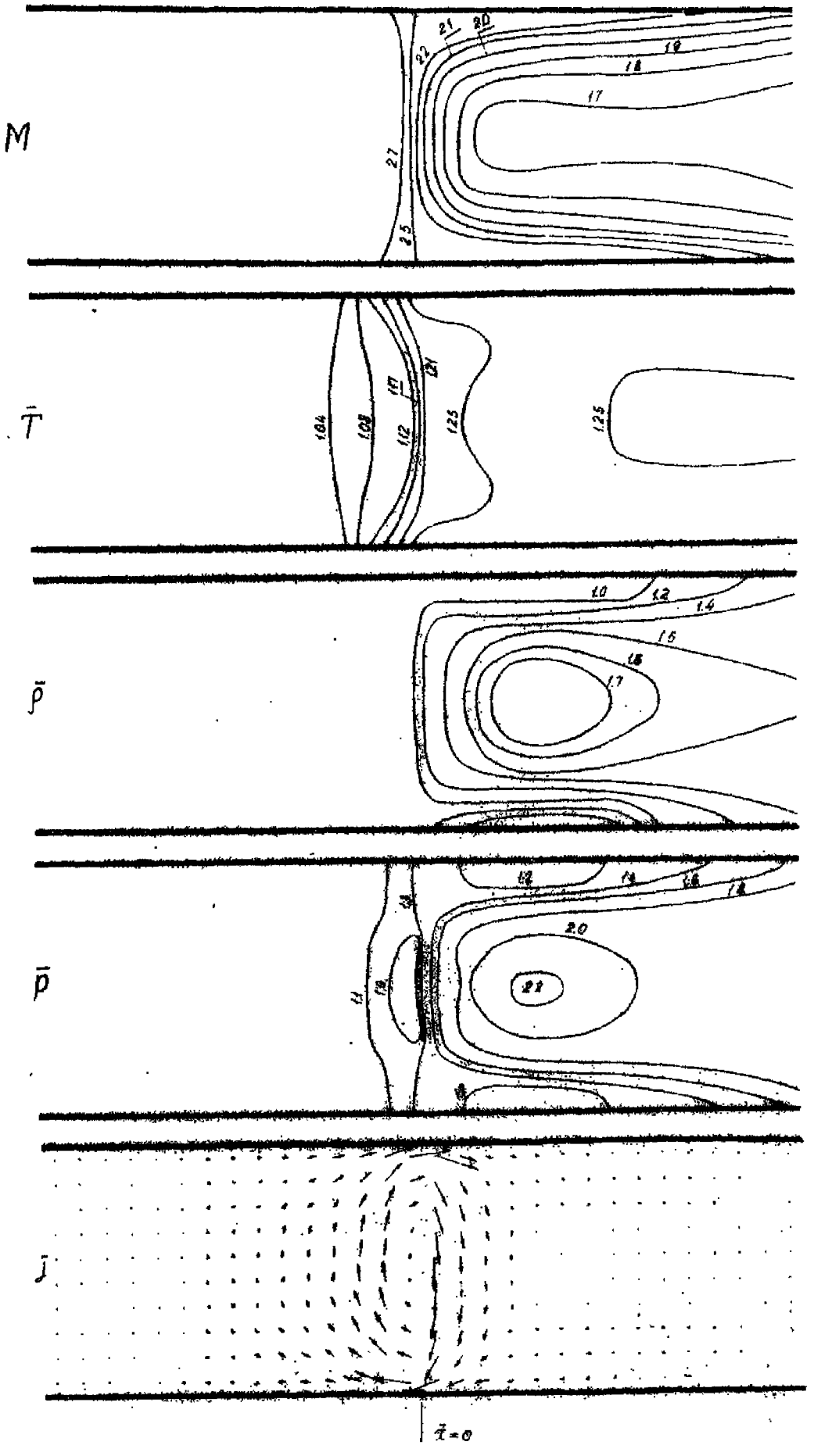
фиг. 3.28


M
p
по средней линии тока
вдоль стенки
$\bar{M} = \frac{M_w}{M_0}$
$\bar{p} = \frac{p_w}{p_0}$
$\bar{x}$

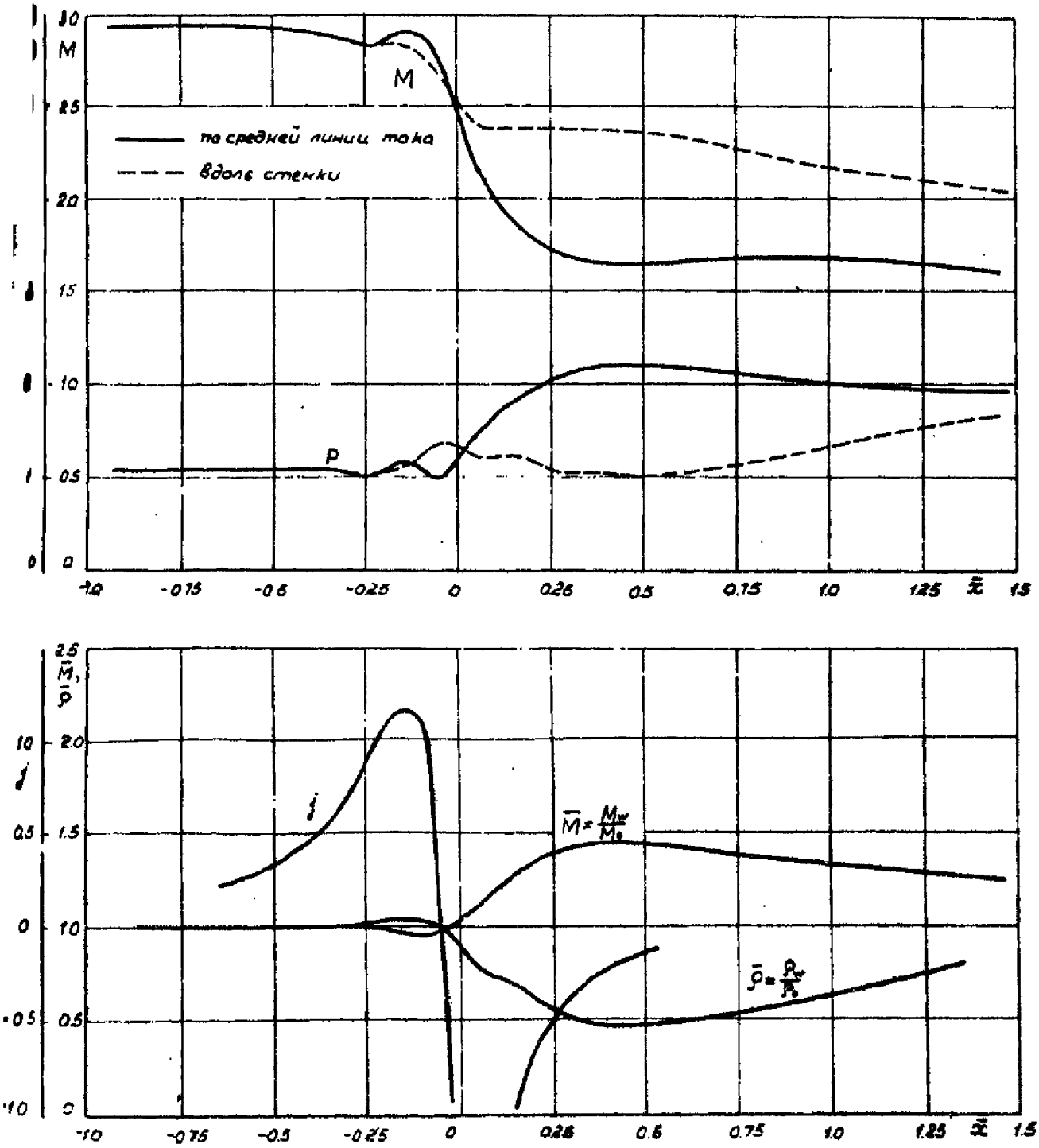
фиг. 329


3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ
1.0
x̄=0
x̄=0.45
x̄=1.5
0.3
ρ
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0.2
0.4
0.6
0.8
ȳ
1.0
x̄=0.45
x̄=1.5
x̄=0

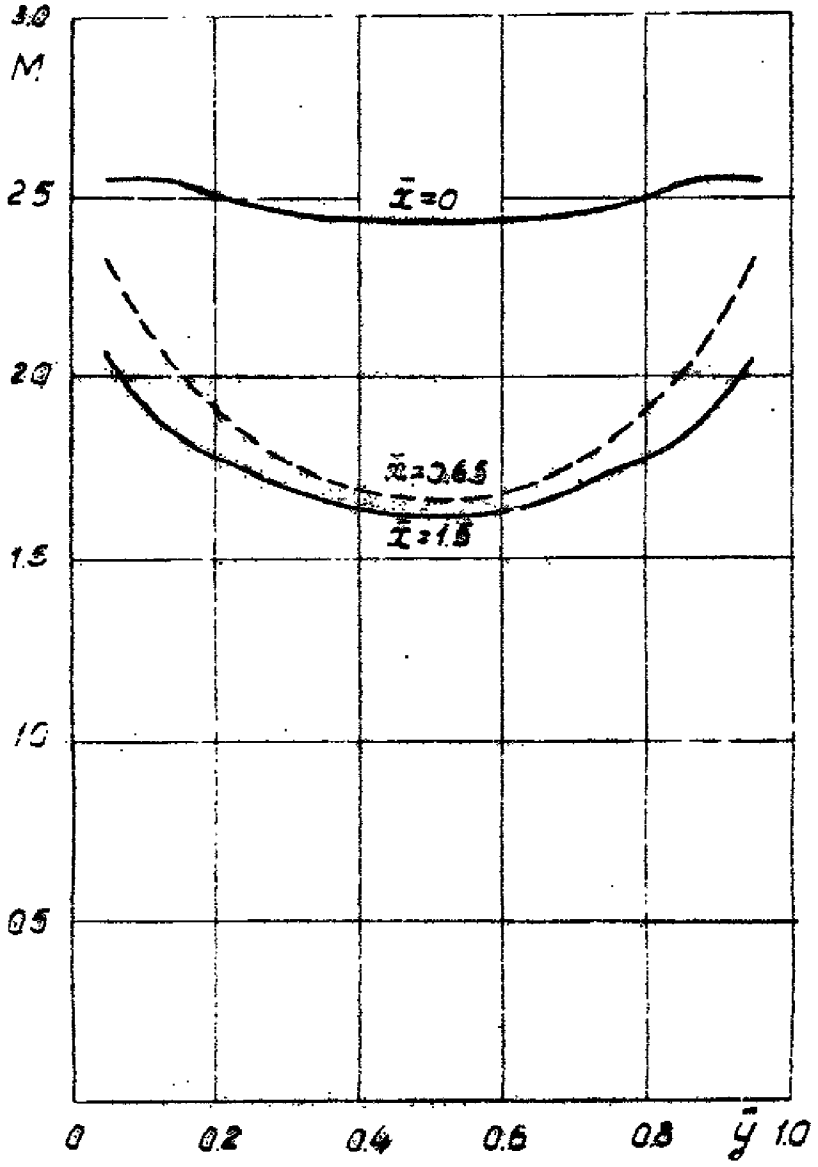
фиг. 330



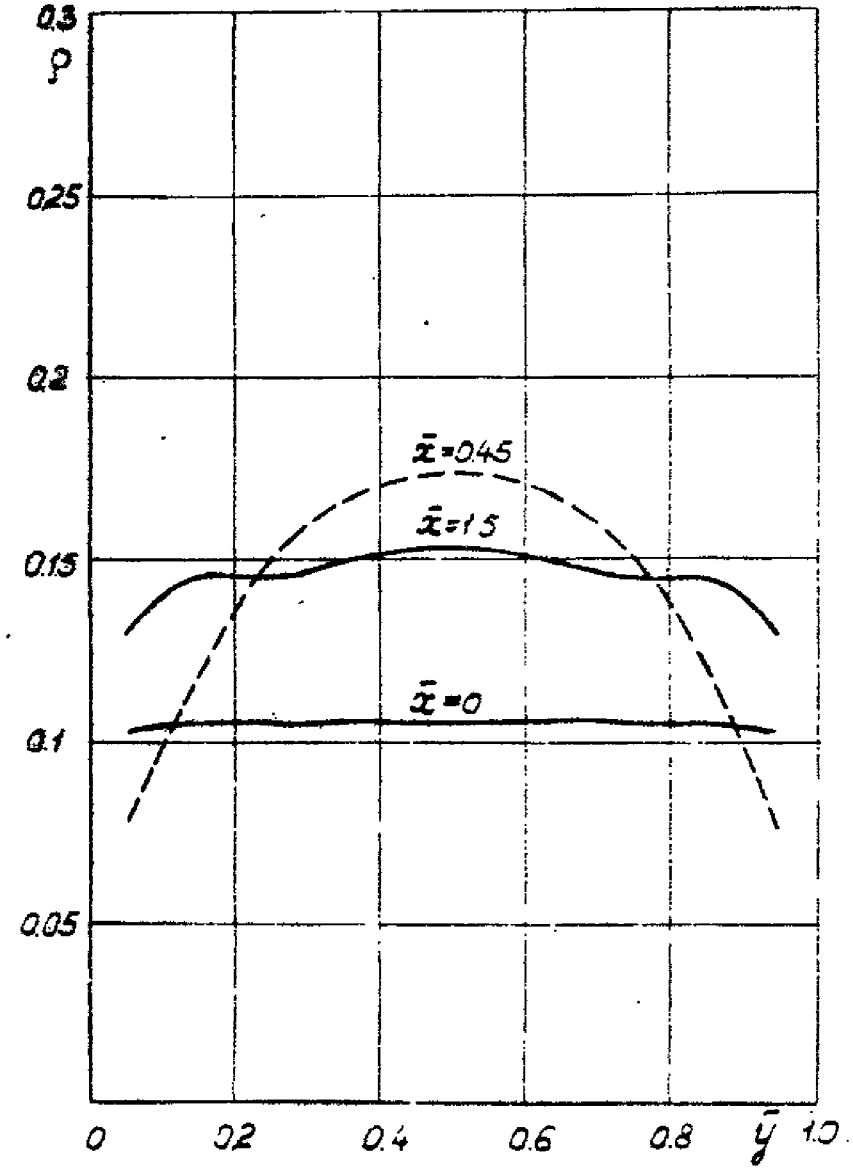
Фиг. 3.31


M
P
по средней линии тока
вдоль стенки
$\bar{M}$, $\bar{\rho}$
j
$\bar{M} = \frac{M_w}{M_0}$
$\bar{\rho} = \frac{\rho_w}{\rho_0}$
$\bar{x}$

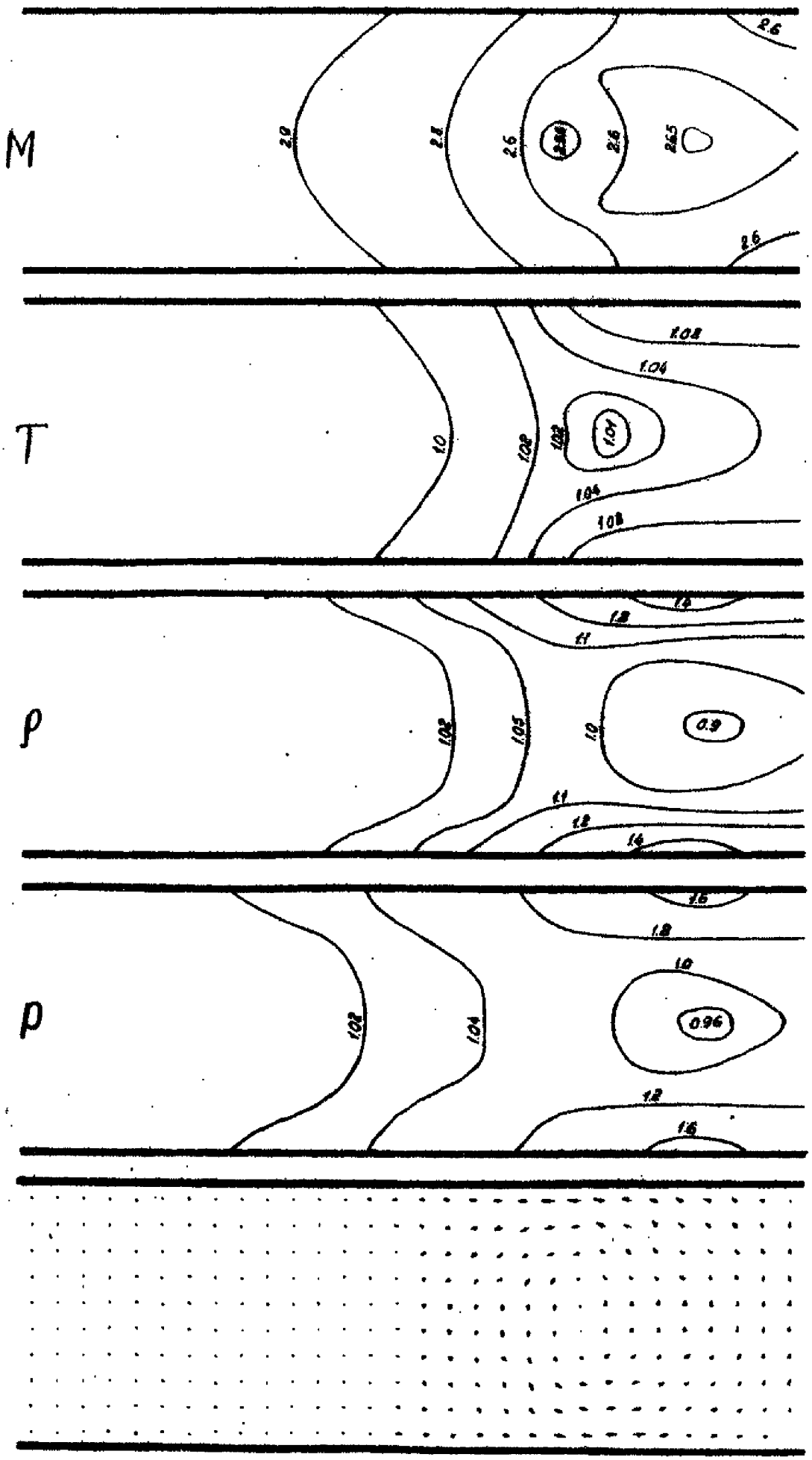
фиг. 332



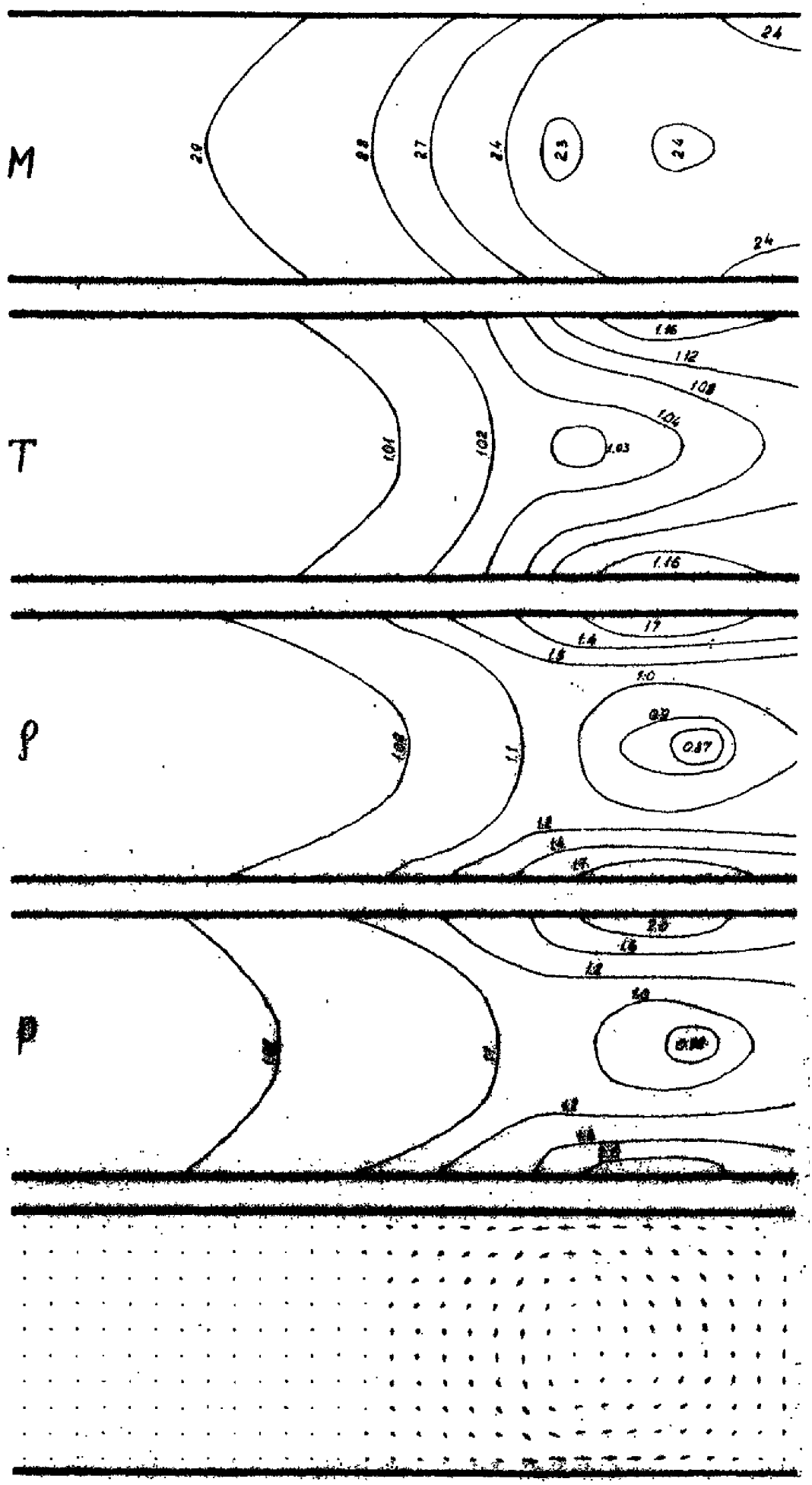
фиг.



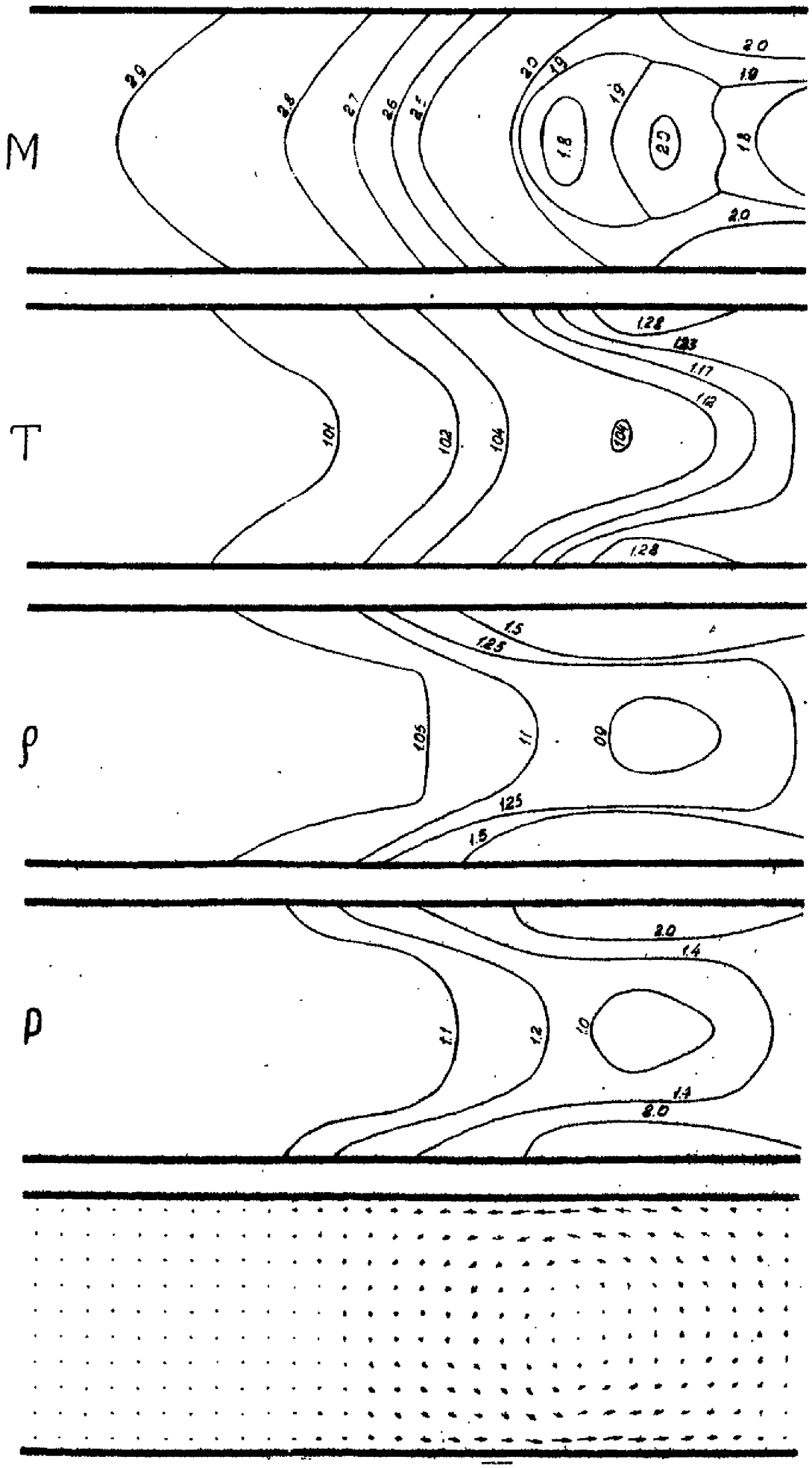
3.33


M
2.0
2.1
2.5
2.6
2.6
2.6
2.6
T
1.0
1.02
1.02
1.04
1.04
1.04
1.08
ρ
1.02
1.05
1.0
0.9
1.1
1.2
1.4
1.6
1.1
p
1.02
1.04
1.0
0.96
1.2
1.6
1.2
1.6

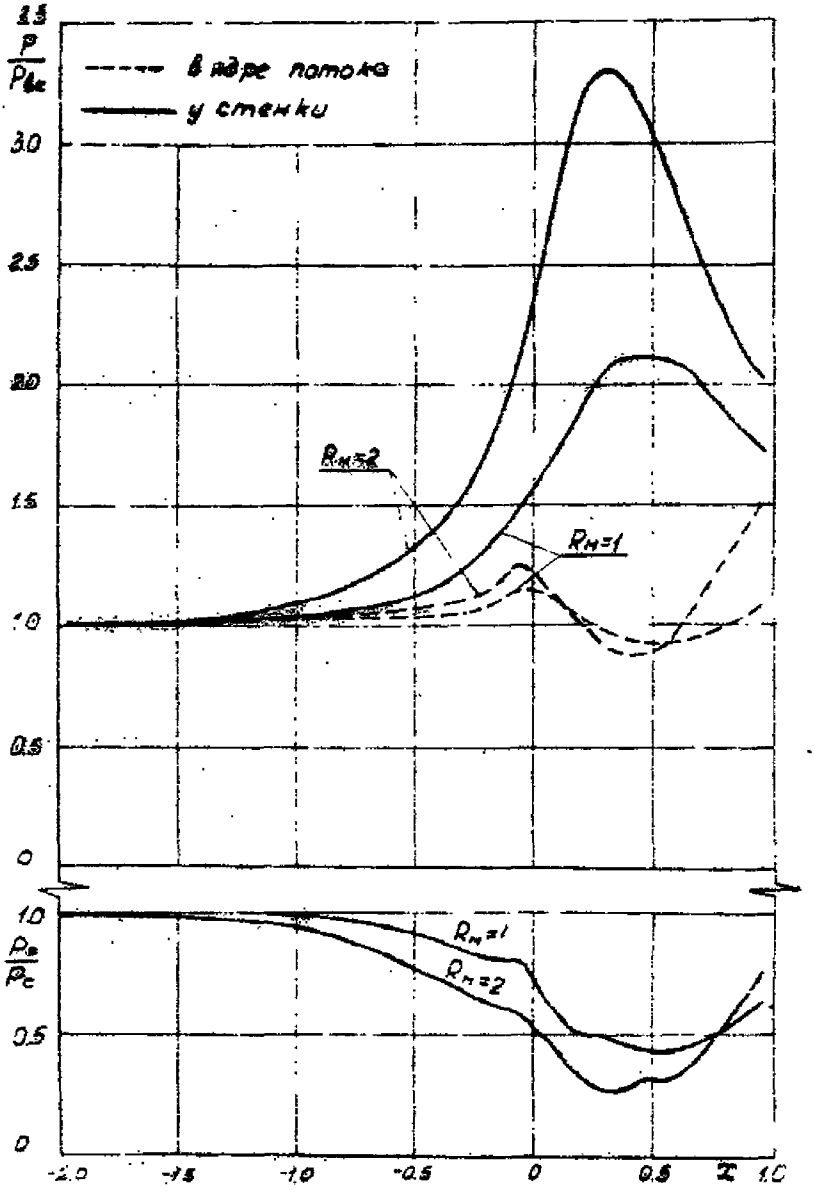
фиг 4 1

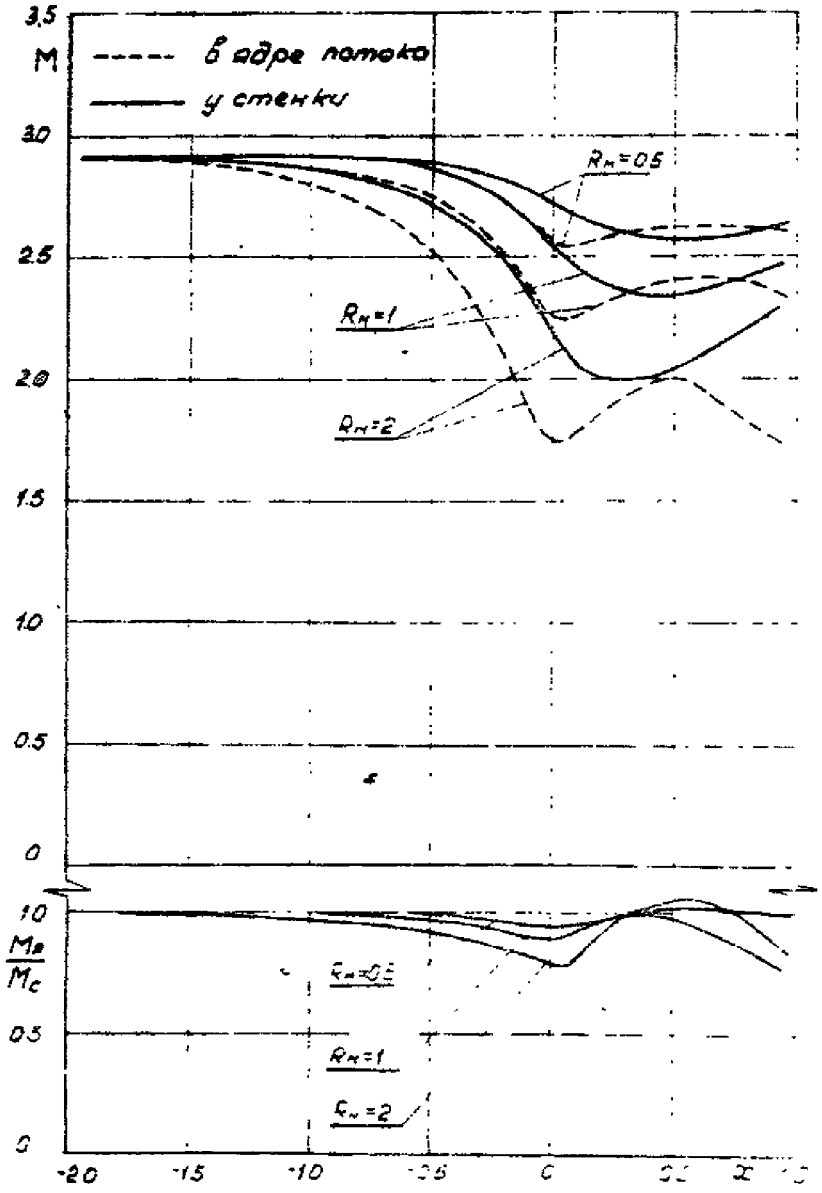

M
2.9
2.8
2.7
2.6
2.3
2.4
2.4
2.4
T
1.01
1.02
1.03
1.04
1.08
1.12
1.16
1.16
ρ
1.08
1.1
1.0
0.87
1.7
1.4
1.8
1.8
1.4
1.6
P
2.0
1.6
1.2
2.0
1.2
1.8

фиг. 42


M
2.9
2.8
2.7
2.6
2.5
2.0
1.9
1.9
1.8
2.0
1.8
2.0
2.0
T
1.28
1.23
1.17
1.12
1.01
1.02
1.04
1.04
1.28
ρ
1.5
1.25
1.05
1.1
0.9
1.25
1.5
P
2.0
1.4
1.1
1.2
1.0
1.4
2.0

фиг. 4.3


3.5
P/P_вх
в ядре потока
у стенки
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
R_н=2
R_н=1
1.0
P_в/P_с
R_н=1
R_н=2
0.5
0
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
x
1.0


M
в ядре потока
у стенки
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
$R_н=0.5$
$R_н=1$
$R_н=2$
$\frac{M_в}{M_c}$
1.0
0.5
0
$R_н=0.5$
$R_н=1$
$R_н=2$
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
x

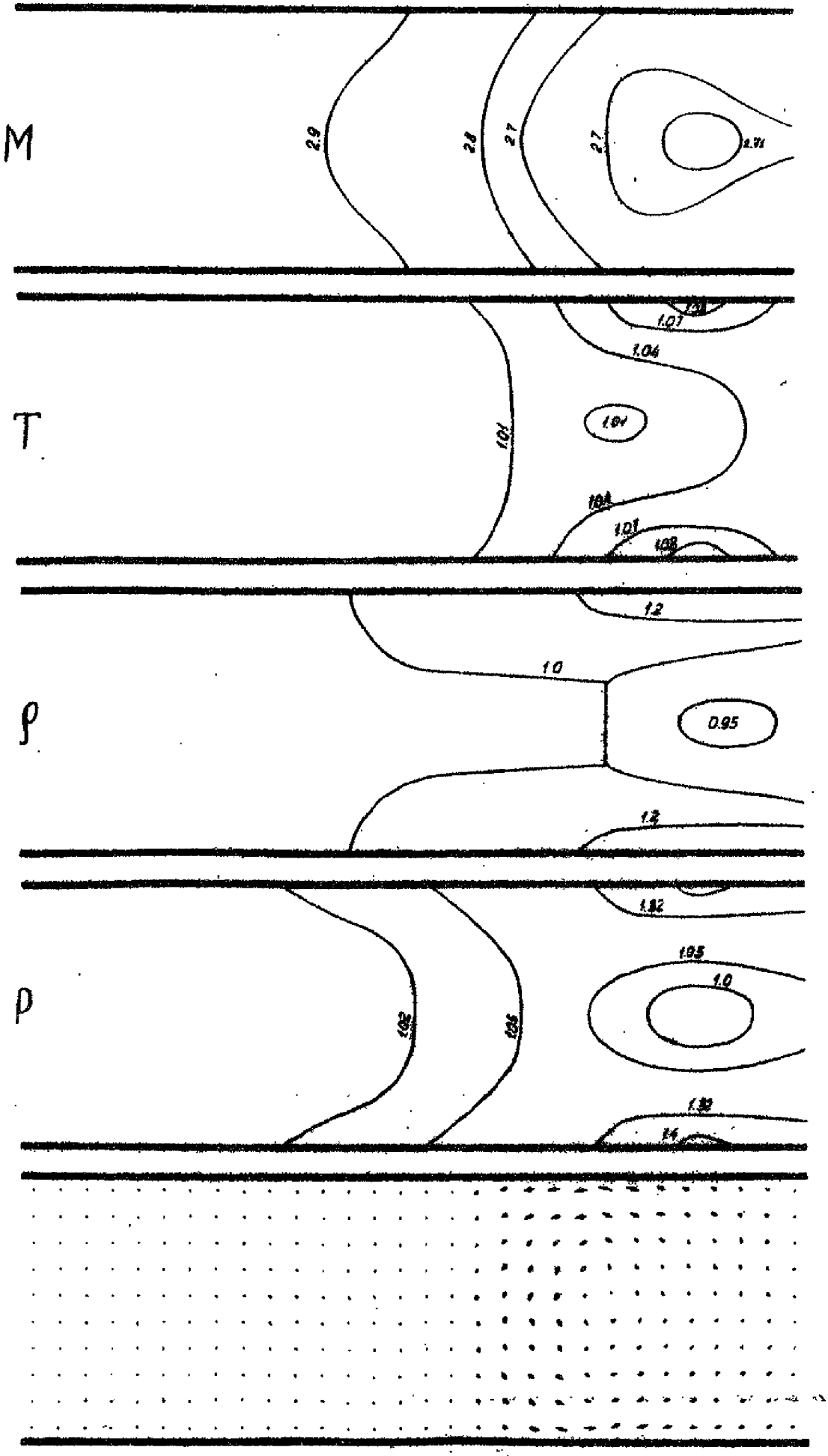
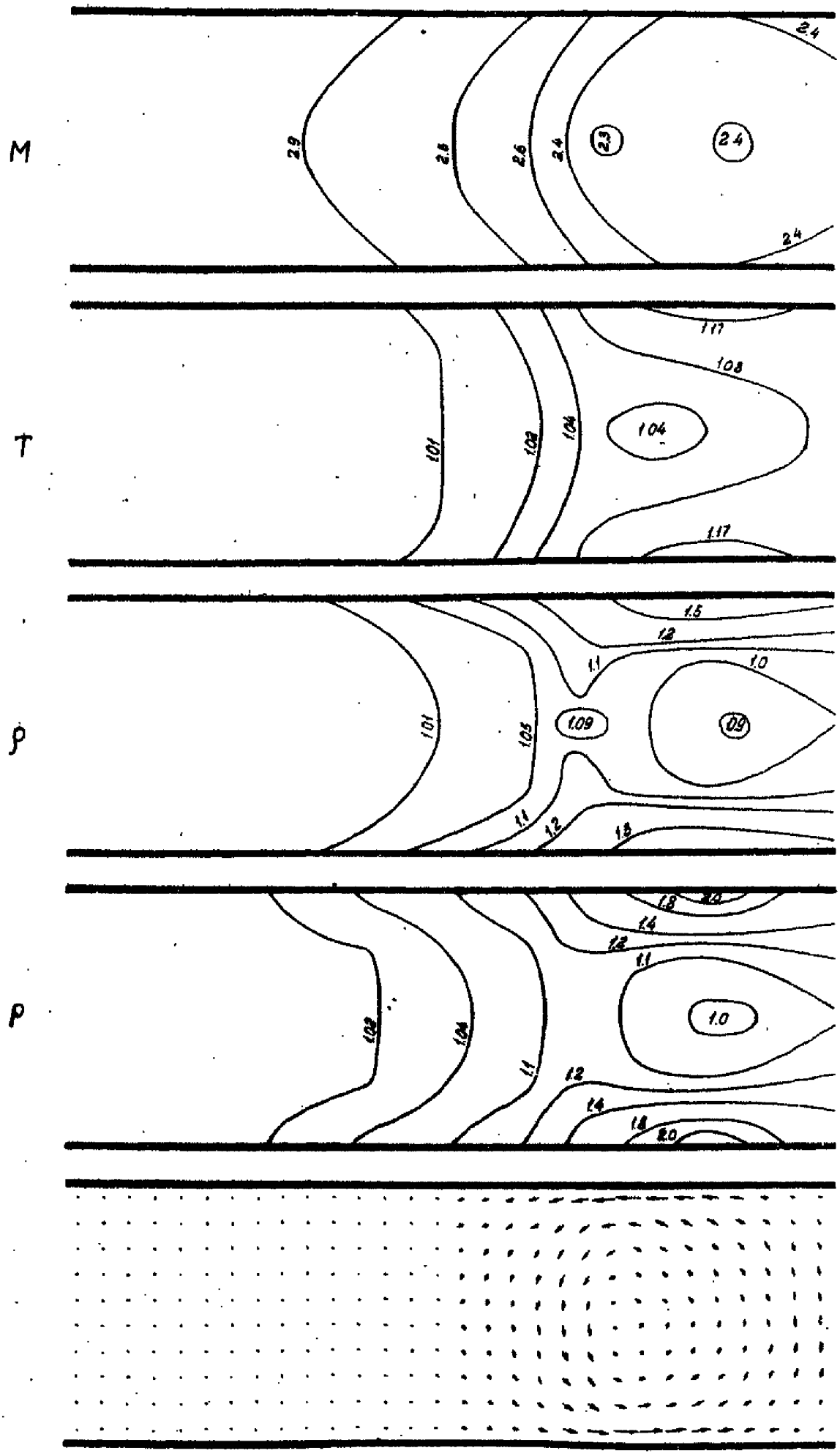
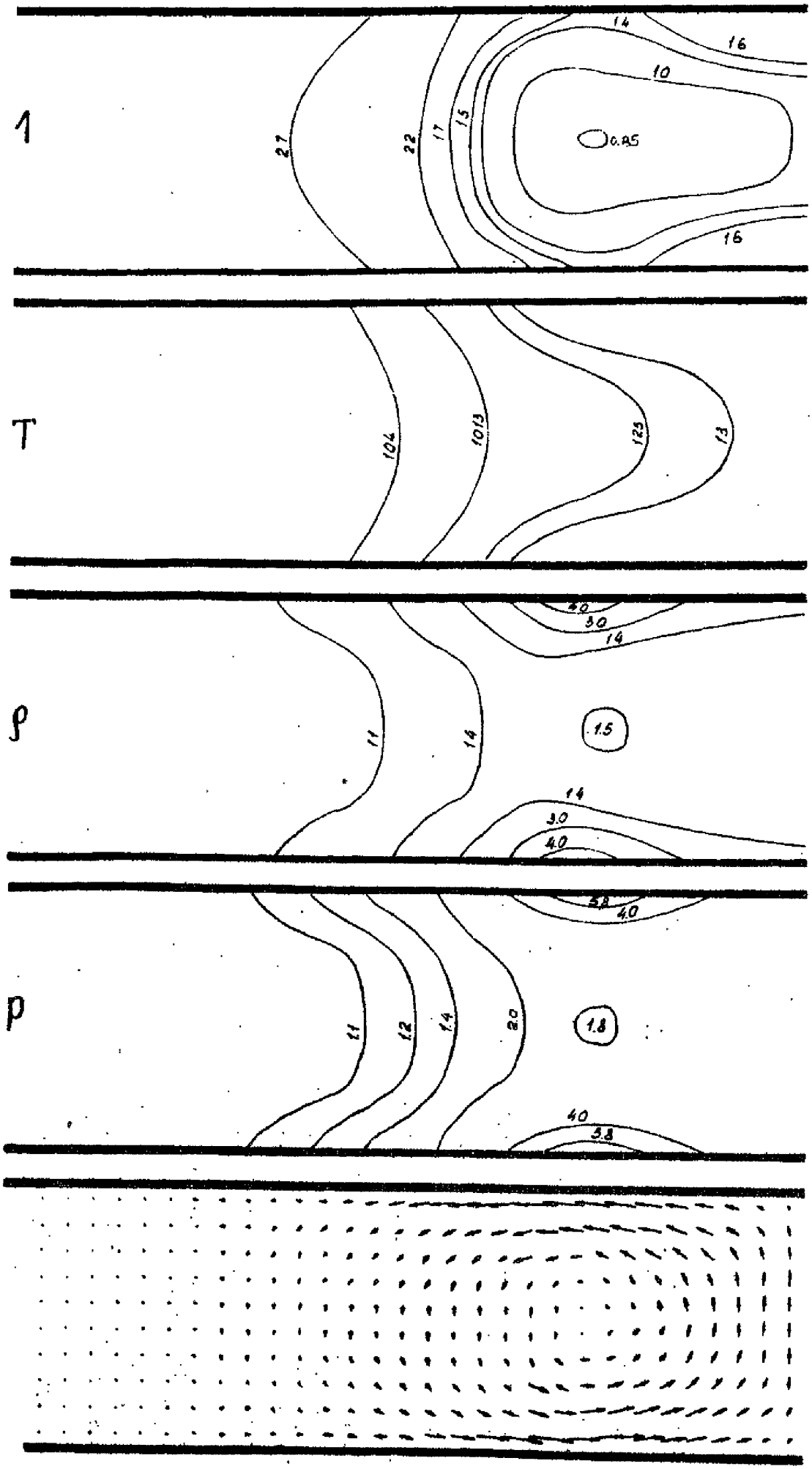

M
2.9
2.8
2.7
2.7
2.71
T
1.07
1.06
1.01
1.04
1.01
1.08
ρ
1.2
1.0
0.95
1.2
p
1.02
1.05
1.0
1.4

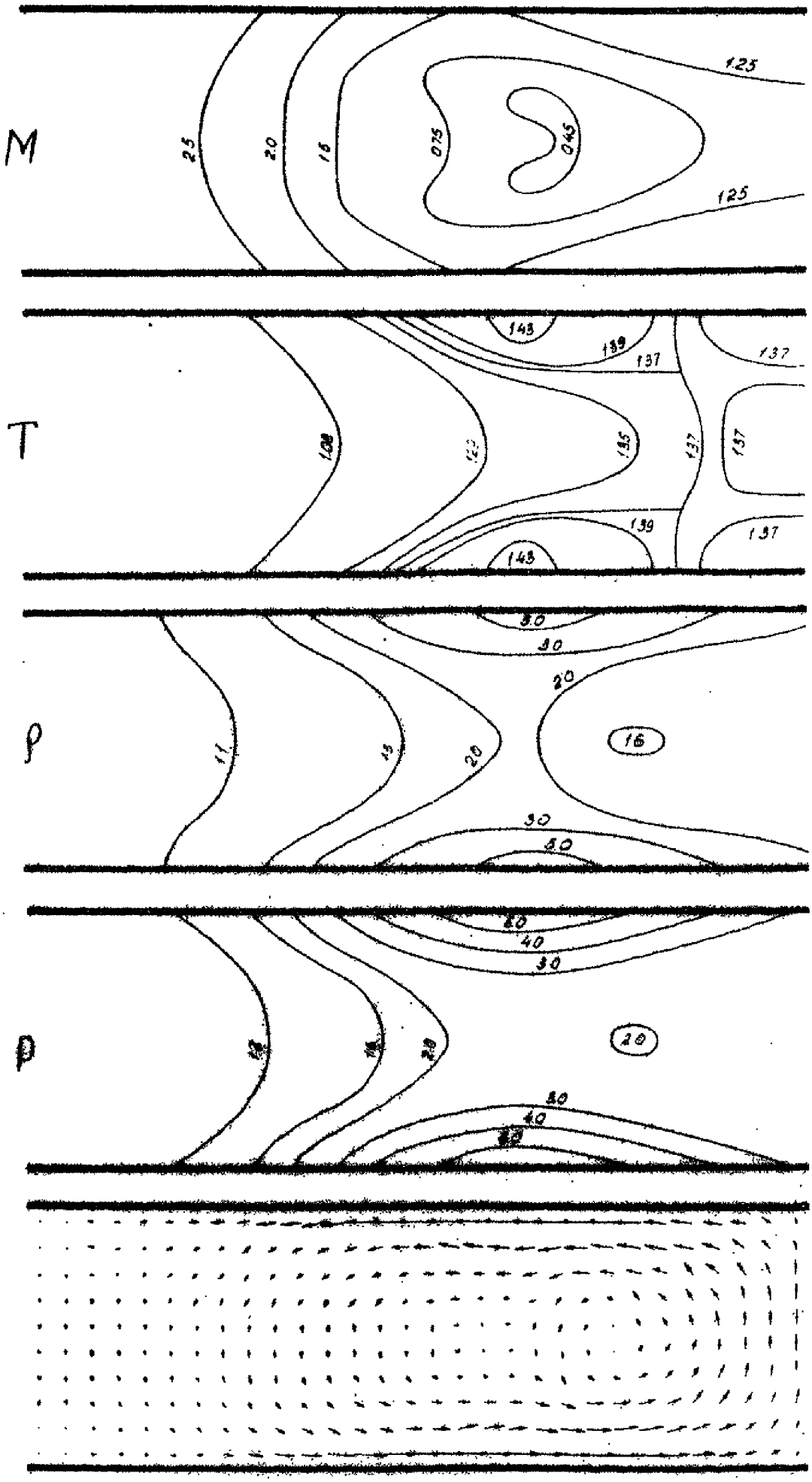
Рисунок 16


M
2.9
2.8
2.6
2.4
2.3
2.4
2.4
2.4
T
1.01
1.02
1.04
1.04
1.08
1.17
1.17
ρ
1.01
1.05
1.09
1.09
1.1
1.2
1.5
1.2
1.1
1.0
P
1.02
1.04
1.1
1.0
1.1
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0

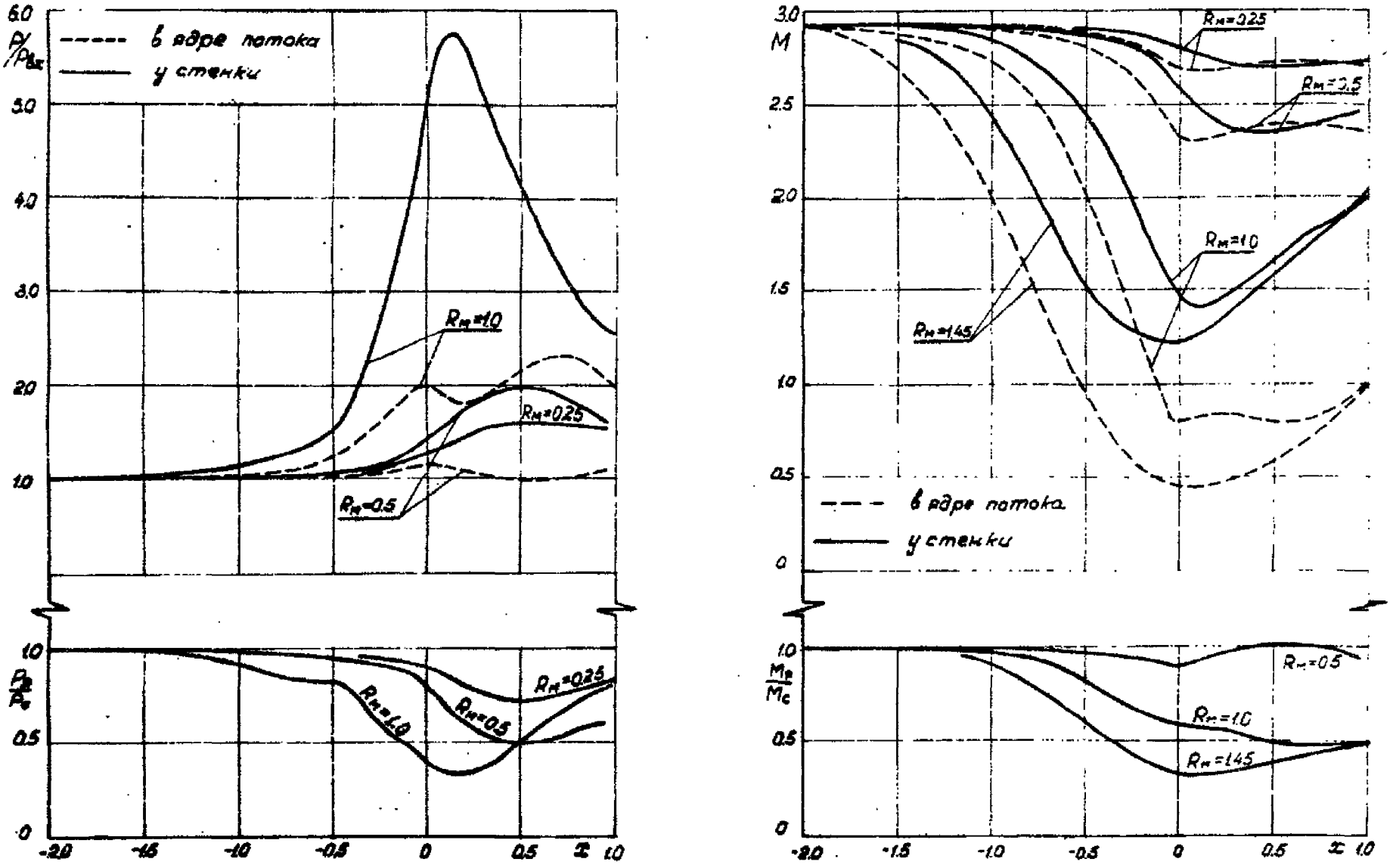
фиг. 46


1
27
22
17
15
14
16
10
0.85
16
T
104
1013
123
13
ρ
11
14
1.5
14
3.0
4.0
3.0
14
p
11
12
14
20
1.8
40
3.8
3.8
4.0

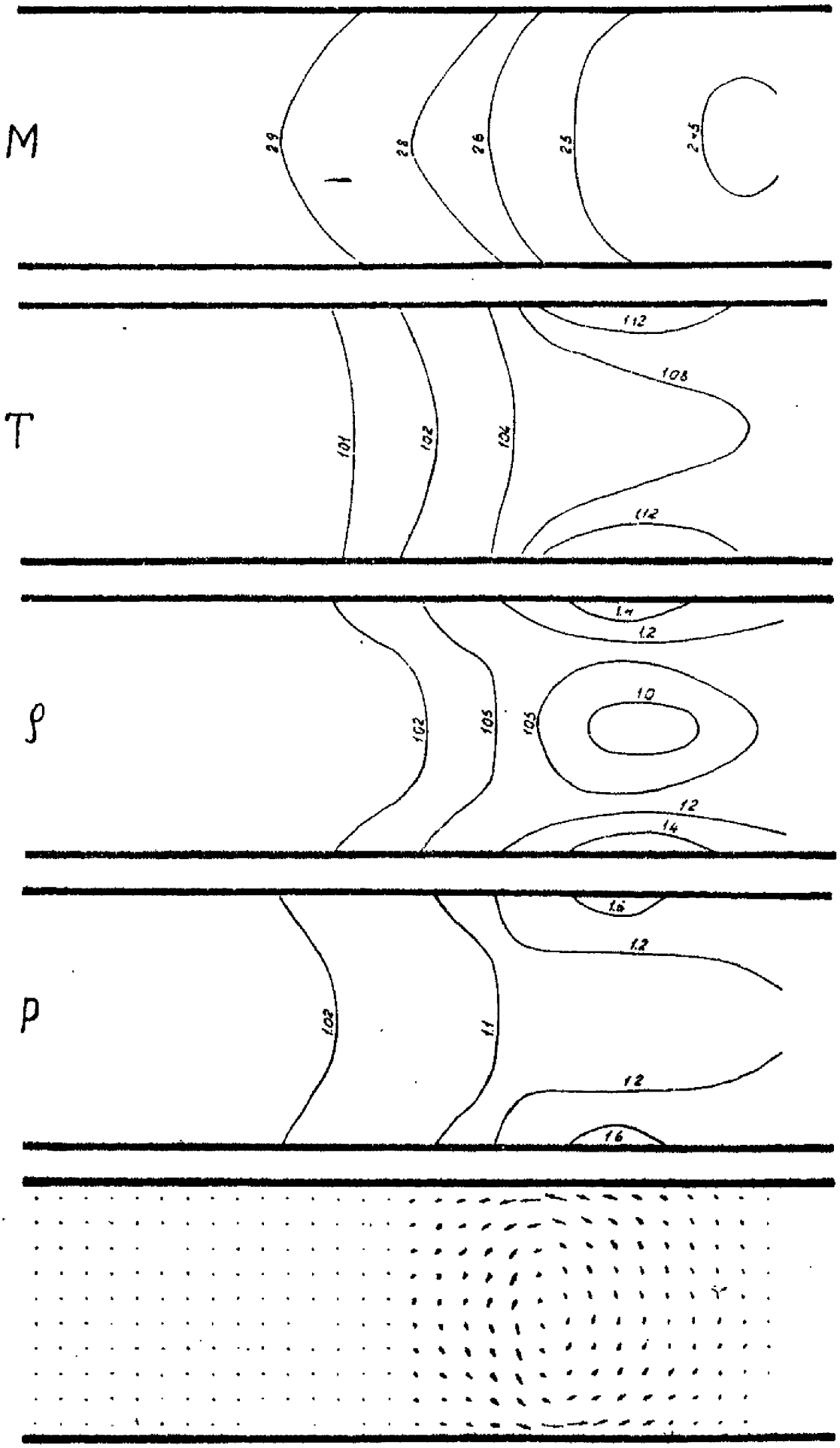
фиг. 47


M
2.5
2.0
1.5
0.75
0.45
1.25
1.25
T
143
139
137
137
137
137
139
137
143
ρ
30
30
20
16
11
15
20
30
30
p
40
40
30
20
20
40
40

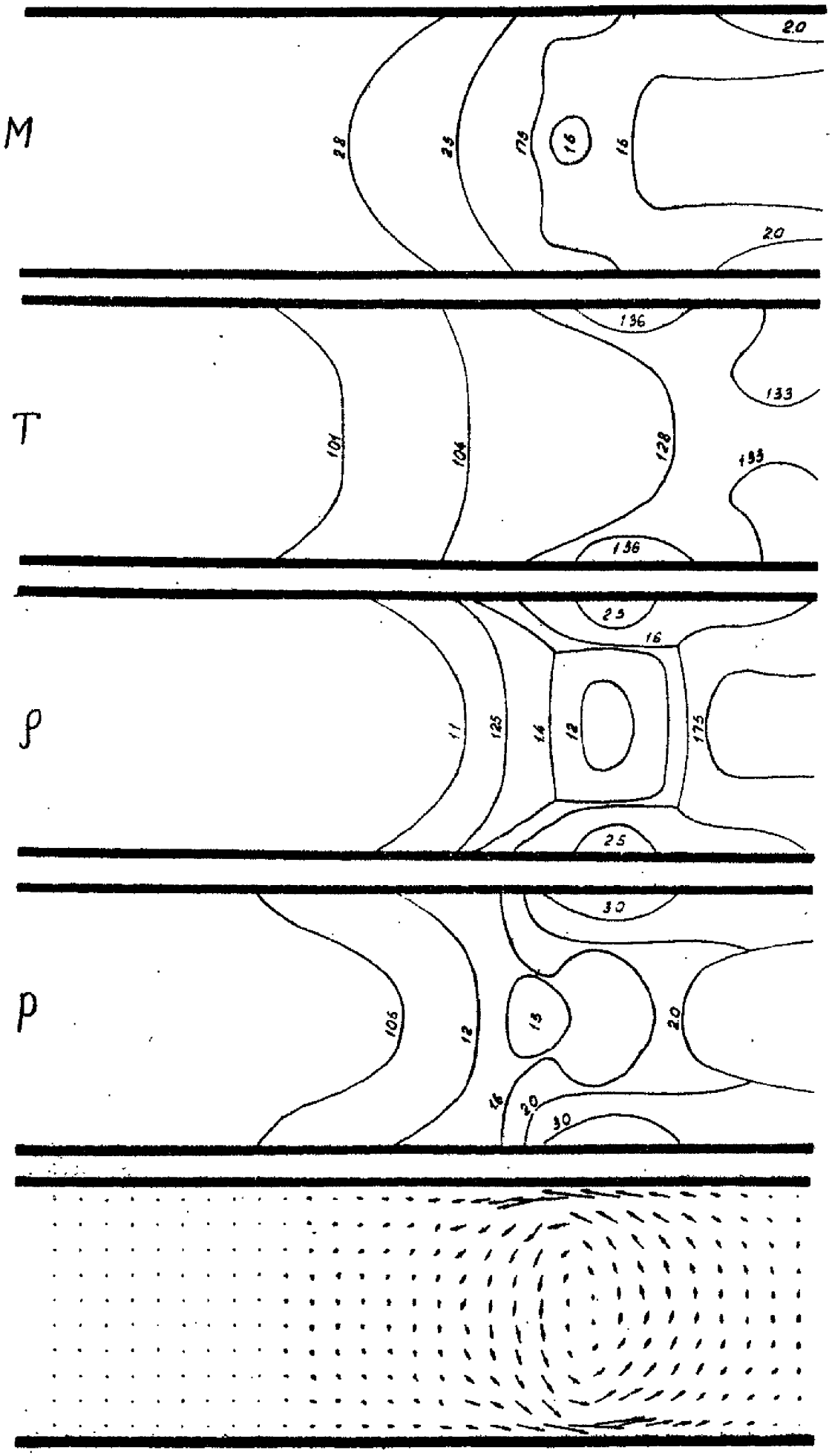
фиг 48


6.0
P/P_вх
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
в ядре потока
у стенки
R_н=1.0
R_н=0.25
R_н=0.5
1.0
P_в/P_с
0.5
0
R_н=1.0
R_н=0.5
R_н=0.25
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
x
1.0
3.0
M
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
R_н=0.25
R_н=0.5
R_н=1.0
R_н=1.45
в ядре потока
у стенки
1.0
M_в/M_с
0.5
0
R_н=0.5
R_н=1.0
R_н=1.45
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
x
1.0

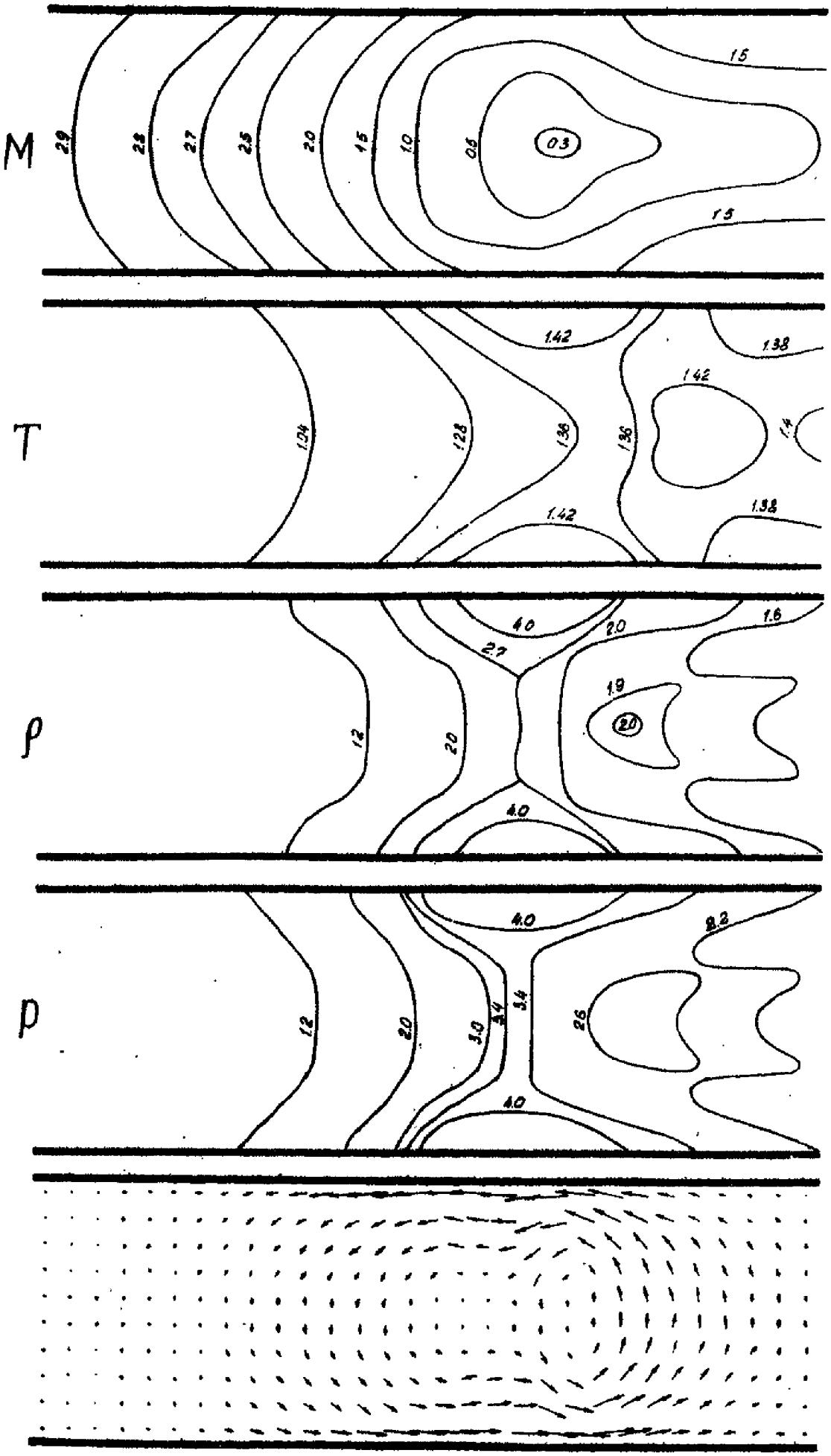
фиг. 4.9


M
2.9
2.8
2.6
2.5
2.45
T
1.12
1.08
1.01
1.02
1.04
1.12
ρ
1.4
1.2
1.0
1.02
1.05
1.05
1.2
1.4
P
1.6
1.2
1.02
1.1
1.2
1.6

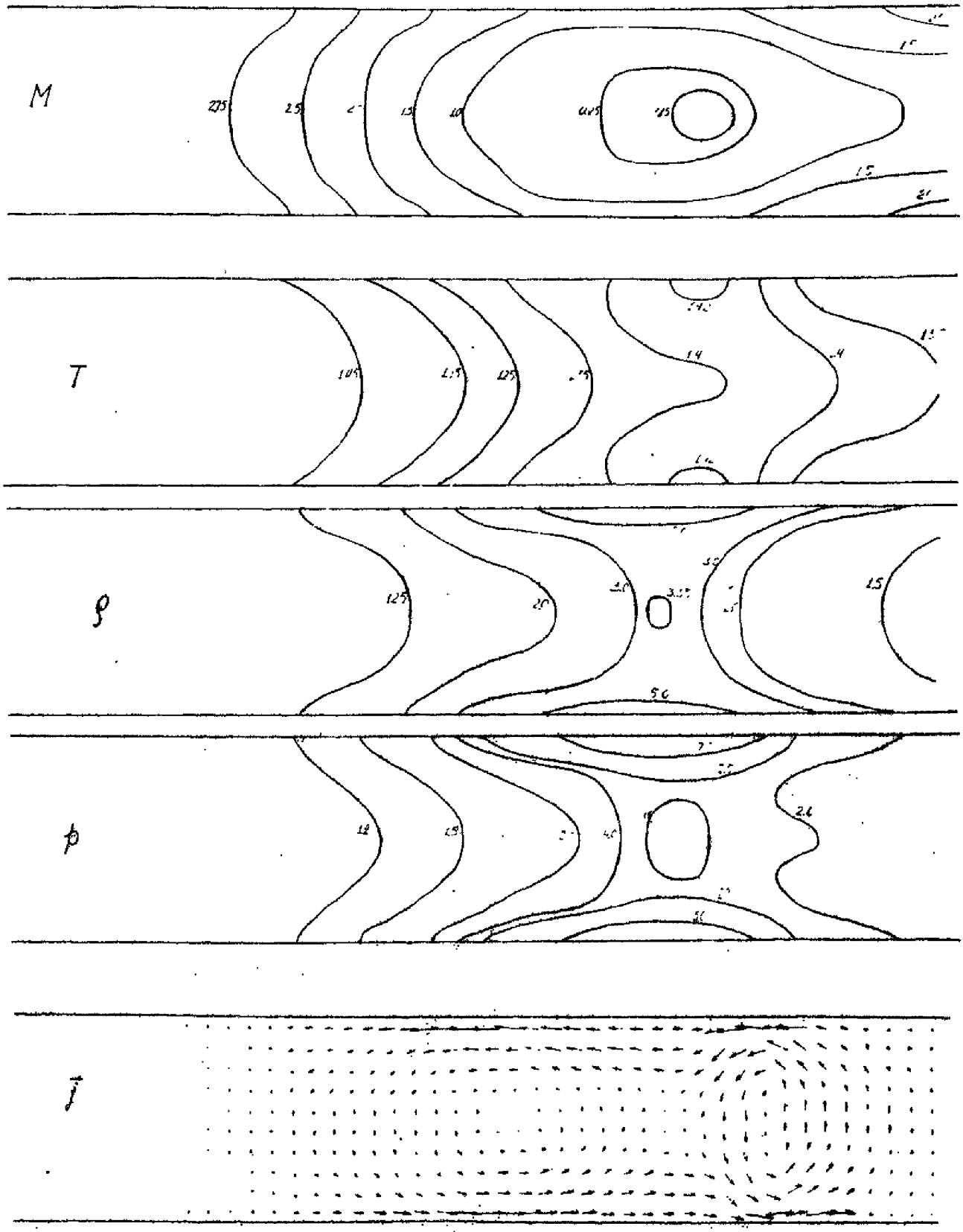
фиг. 4.10


M
2.0
2.8
2.5
1.5
1.6
1.6
2.0
T
136
133
101
104
128
133
136
ρ
2.5
1.6
1.1
1.25
1.4
1.2
1.75
2.5
P
3.0
1.05
1.2
1.3
2.0
1.6
2.0
3.0

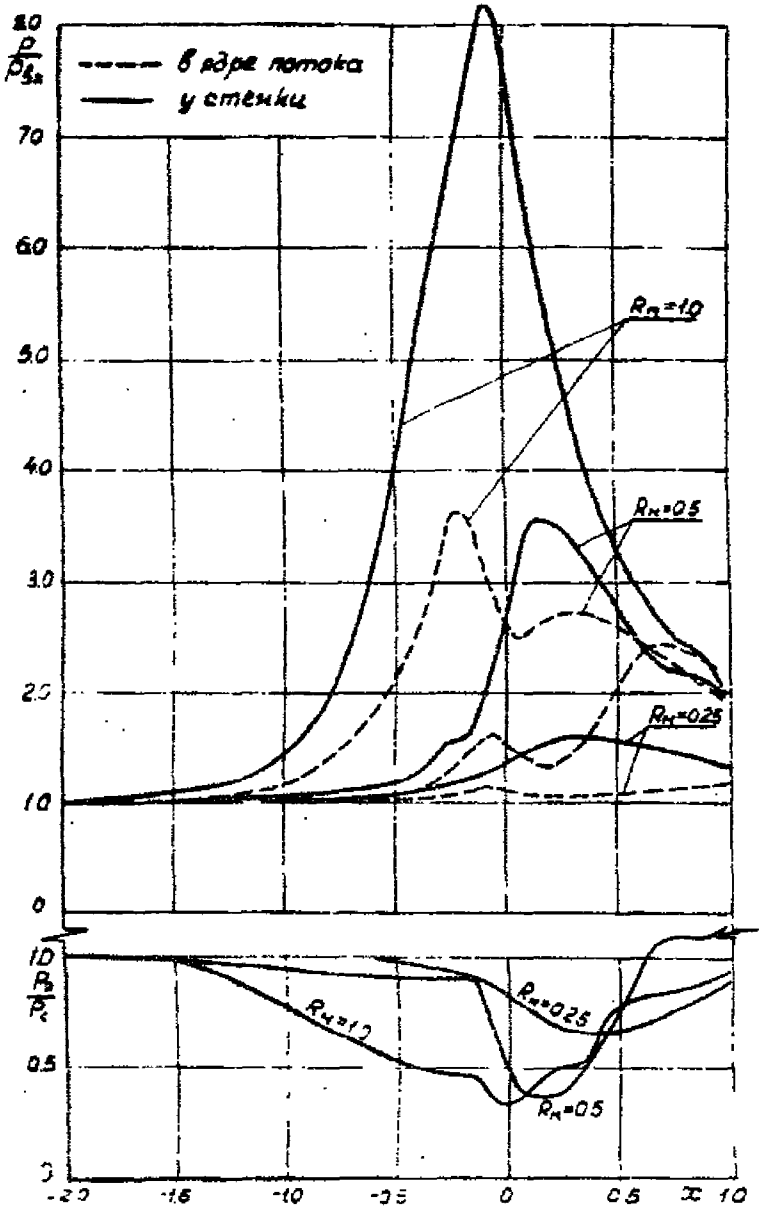
фиг. 4.11

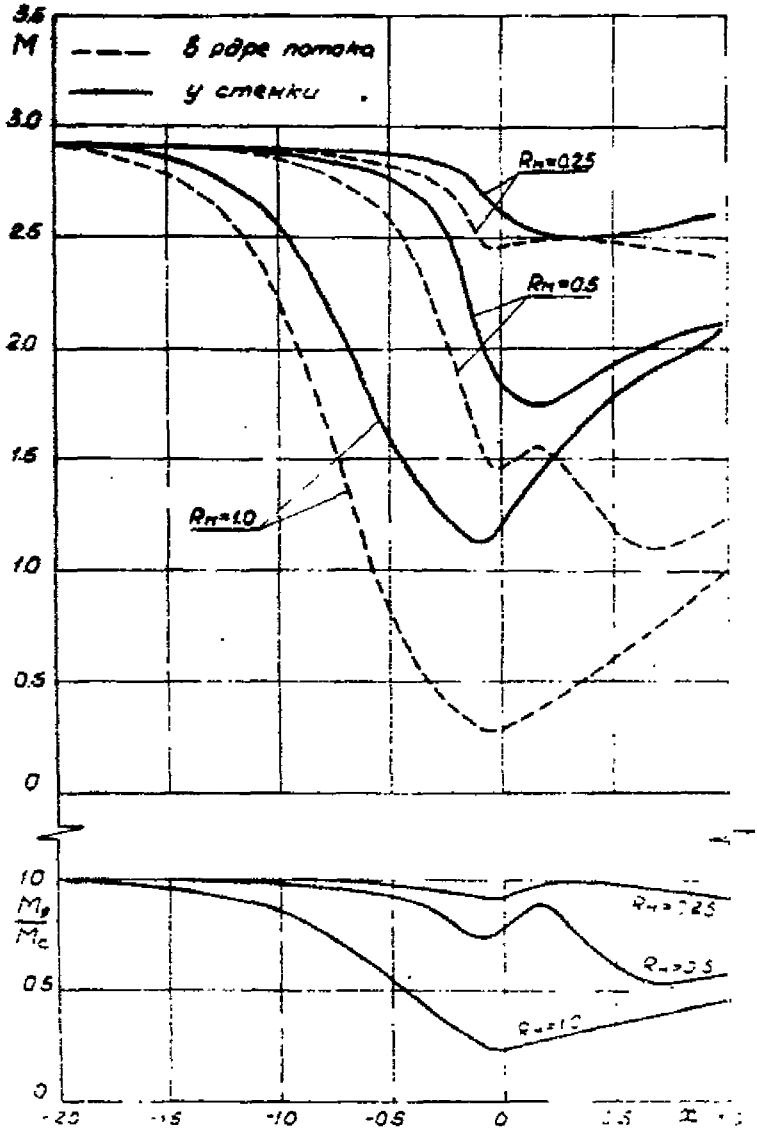

M
2.9
2.8
2.7
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.3
1.5
1.5
T
1.24
1.28
1.36
1.36
1.42
1.42
1.42
1.38
1.38
1.4
ρ
1.2
2.0
4.0
2.7
2.0
1.9
2.0
1.6
4.0
p
1.2
2.0
3.0
3.4
3.4
4.0
4.0
2.6
8.2

фиг. 4.12

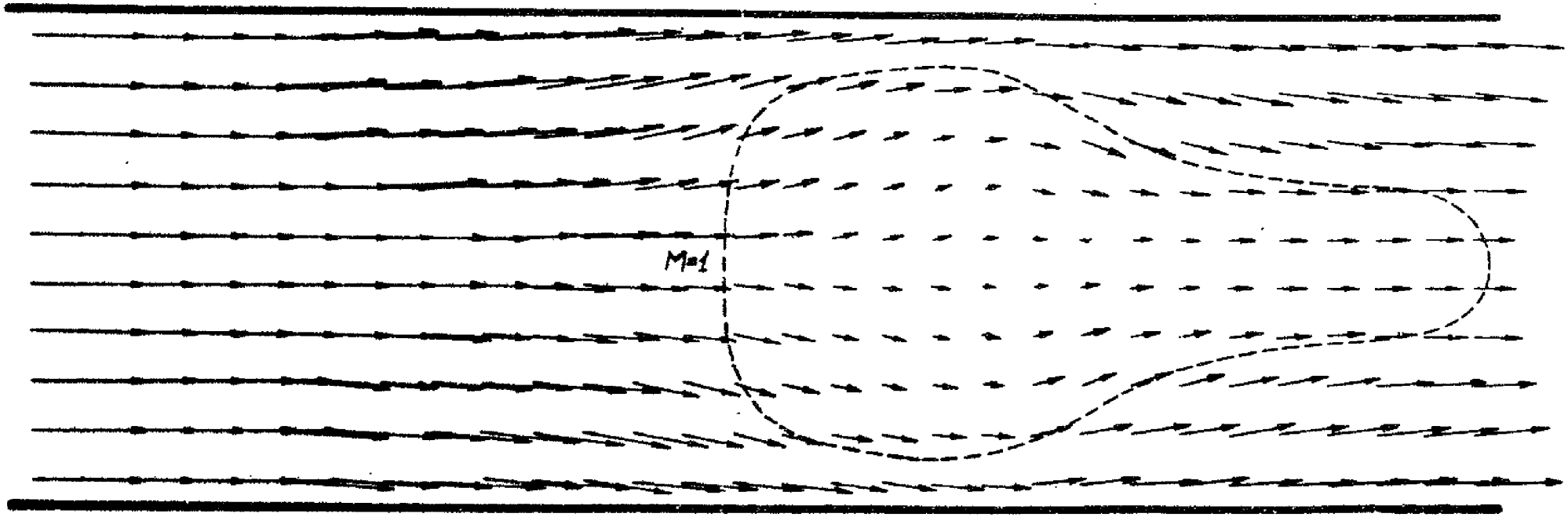


Фиг. 4.13

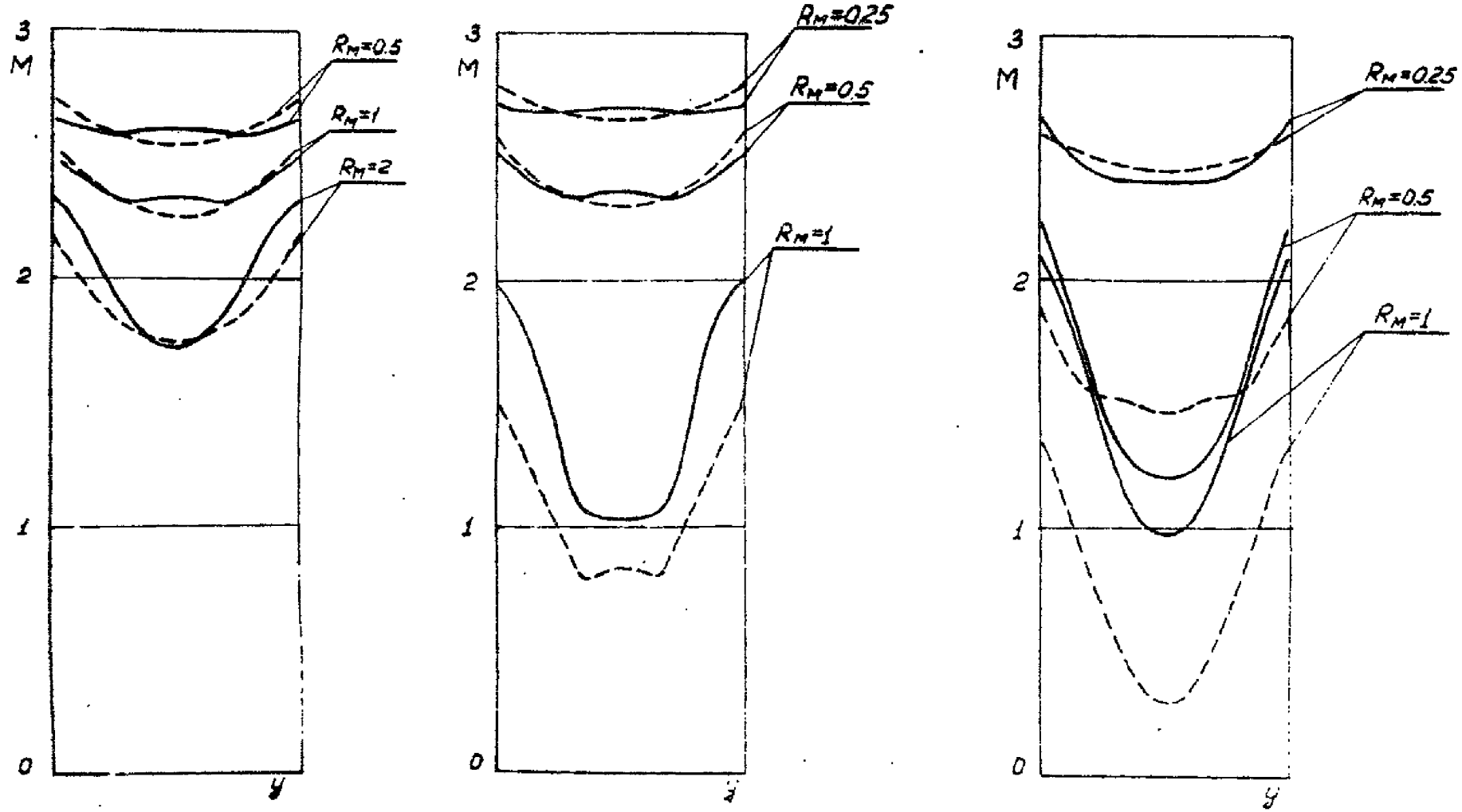

8.0
$\frac{p}{p_{st}}$
в ядре потока
у стенки
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
$R_н=1.0$
$R_н=0.5$
$R_н=0.25$
1.0
$\frac{P_b}{P_c}$
0.5
0
$R_н=1.0$
$R_н=0.25$
$R_н=0.5$
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
x
1.0


M
в ядре потока
у стенки
$R_н$=0.25
$R_н$=0.5
$R_н$=1.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
$M_в/M_c$
10
0.5
0
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
x

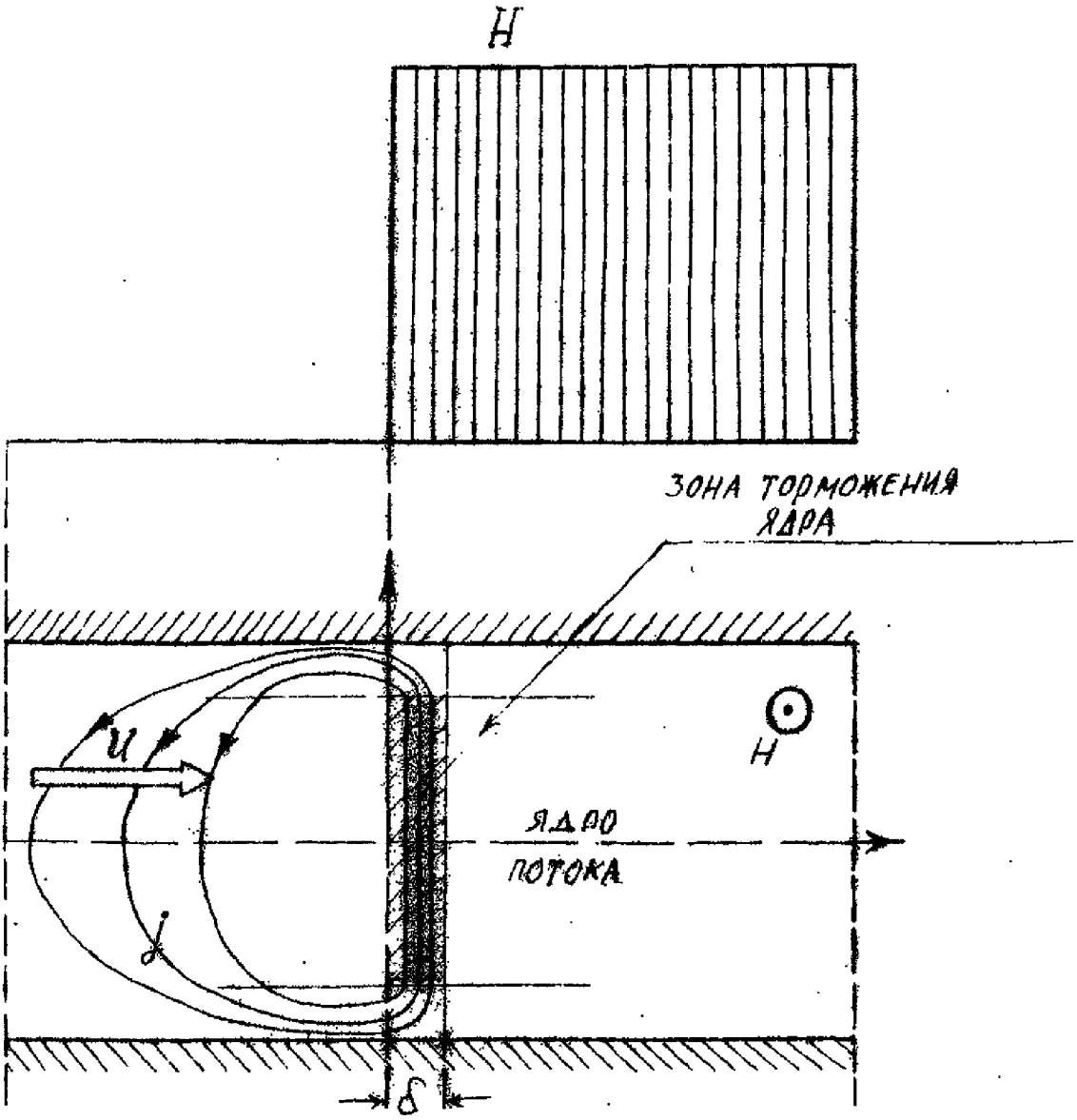
фиг. 4.14



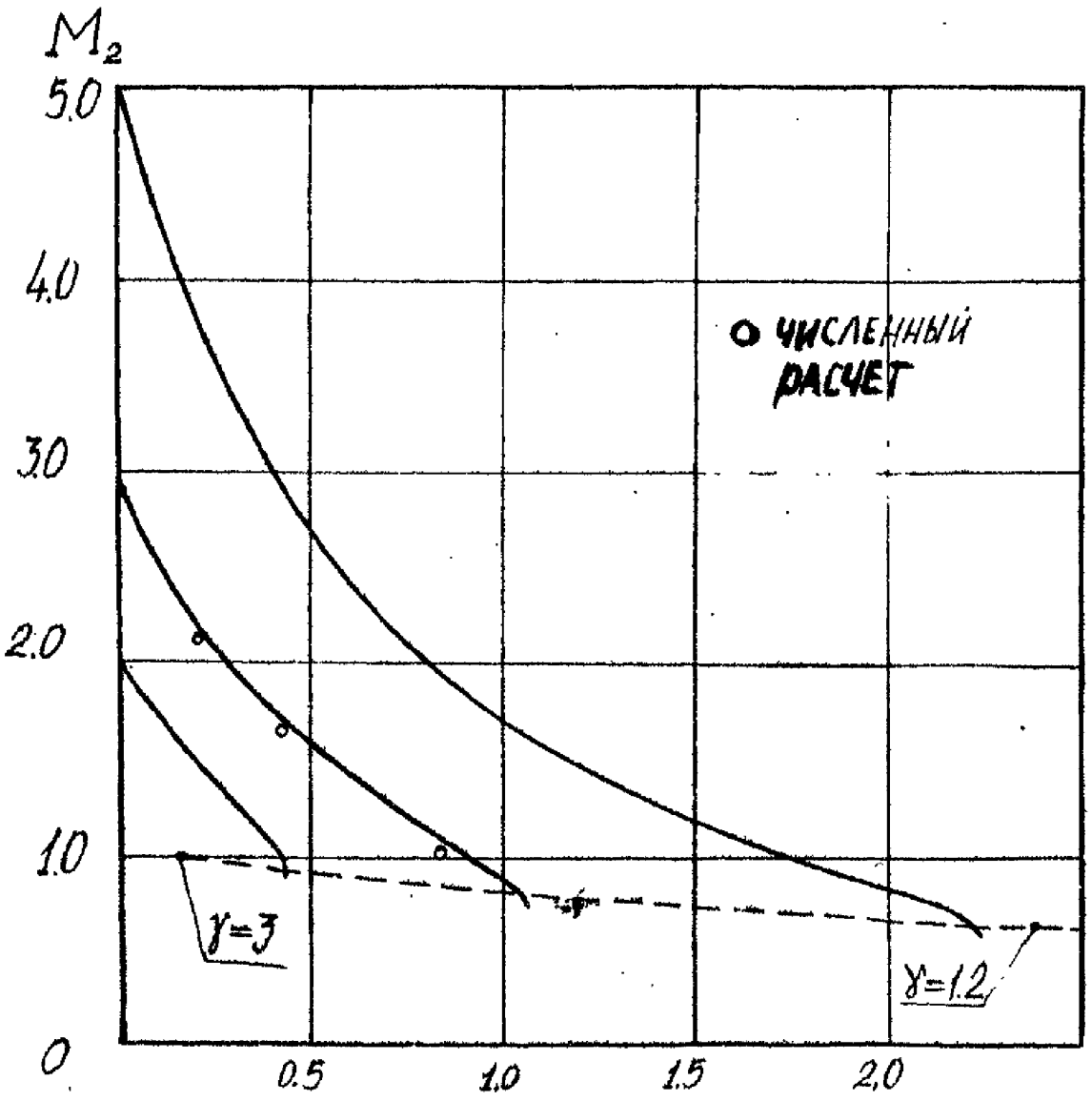
фиг. 4.15



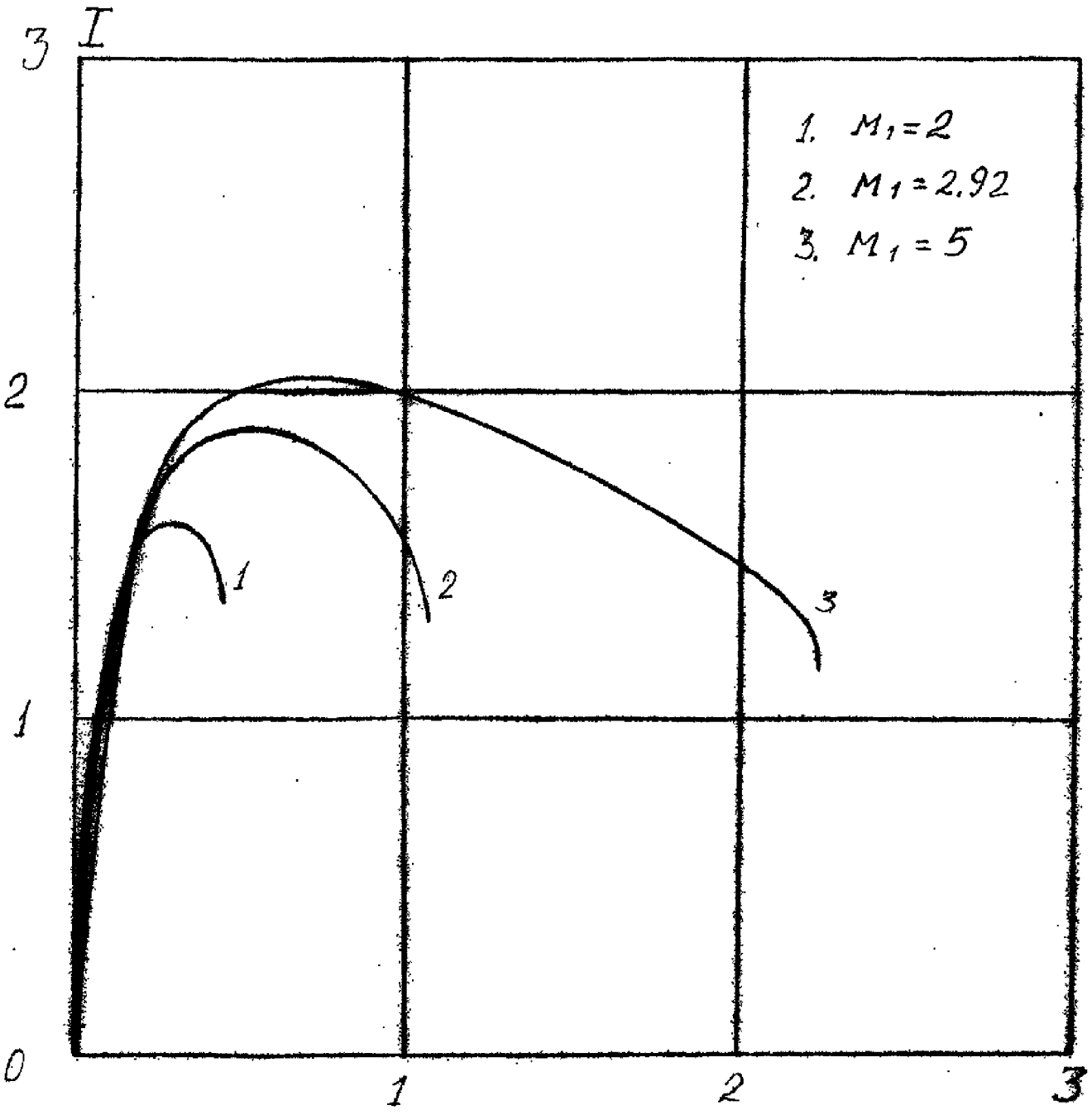
фиг. 4.16



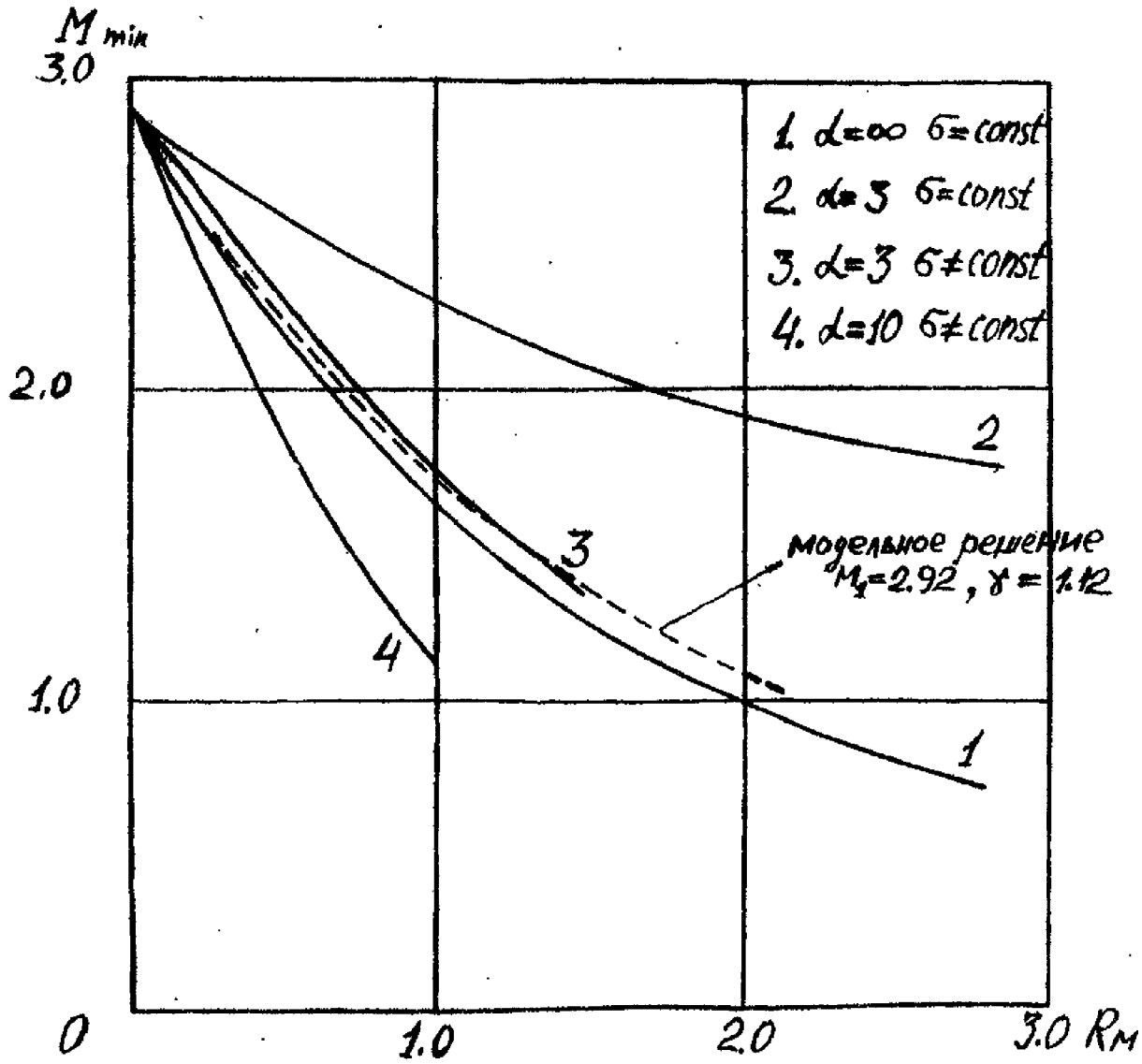
фиг. 51



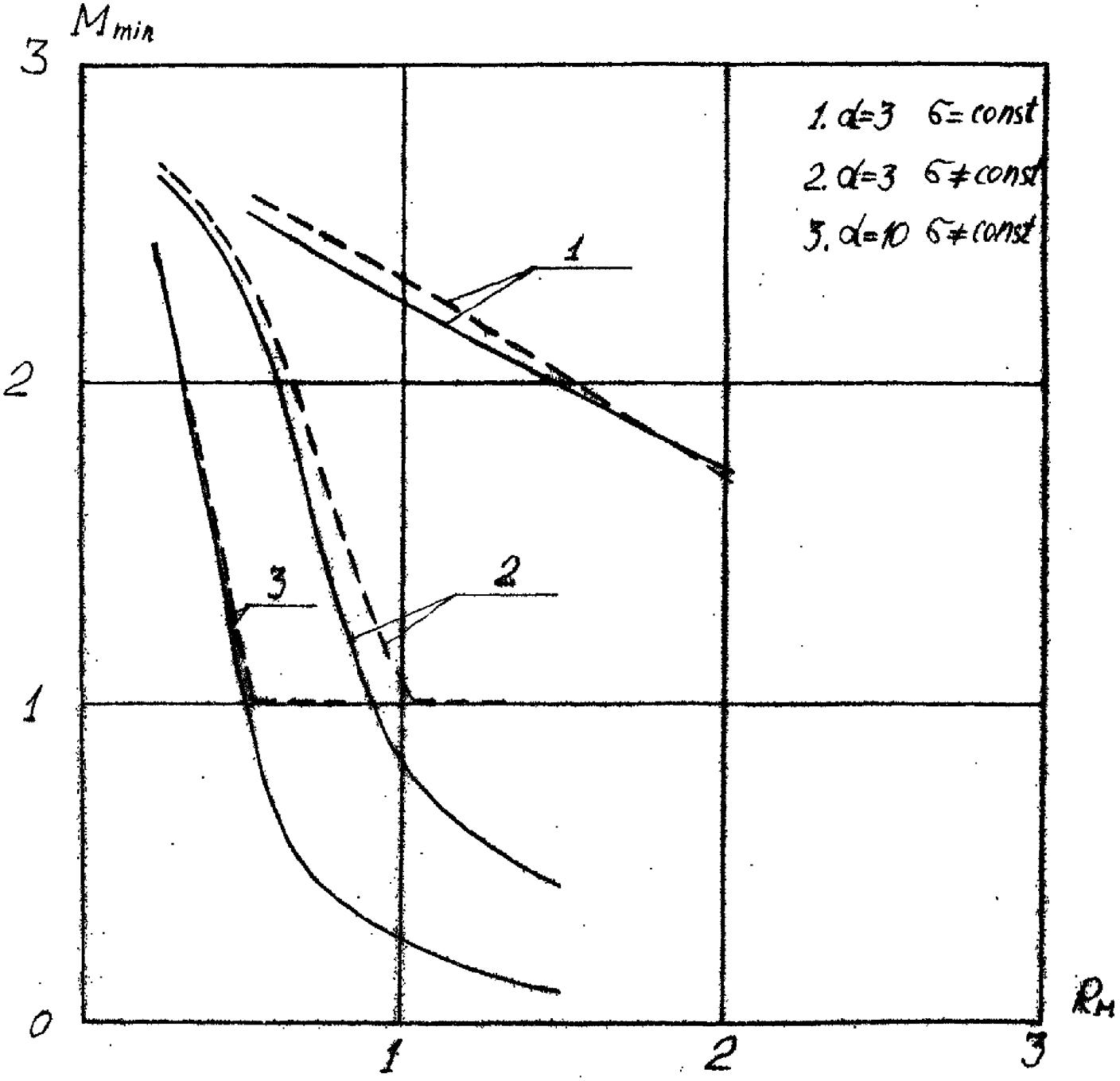
фиг. 5.2



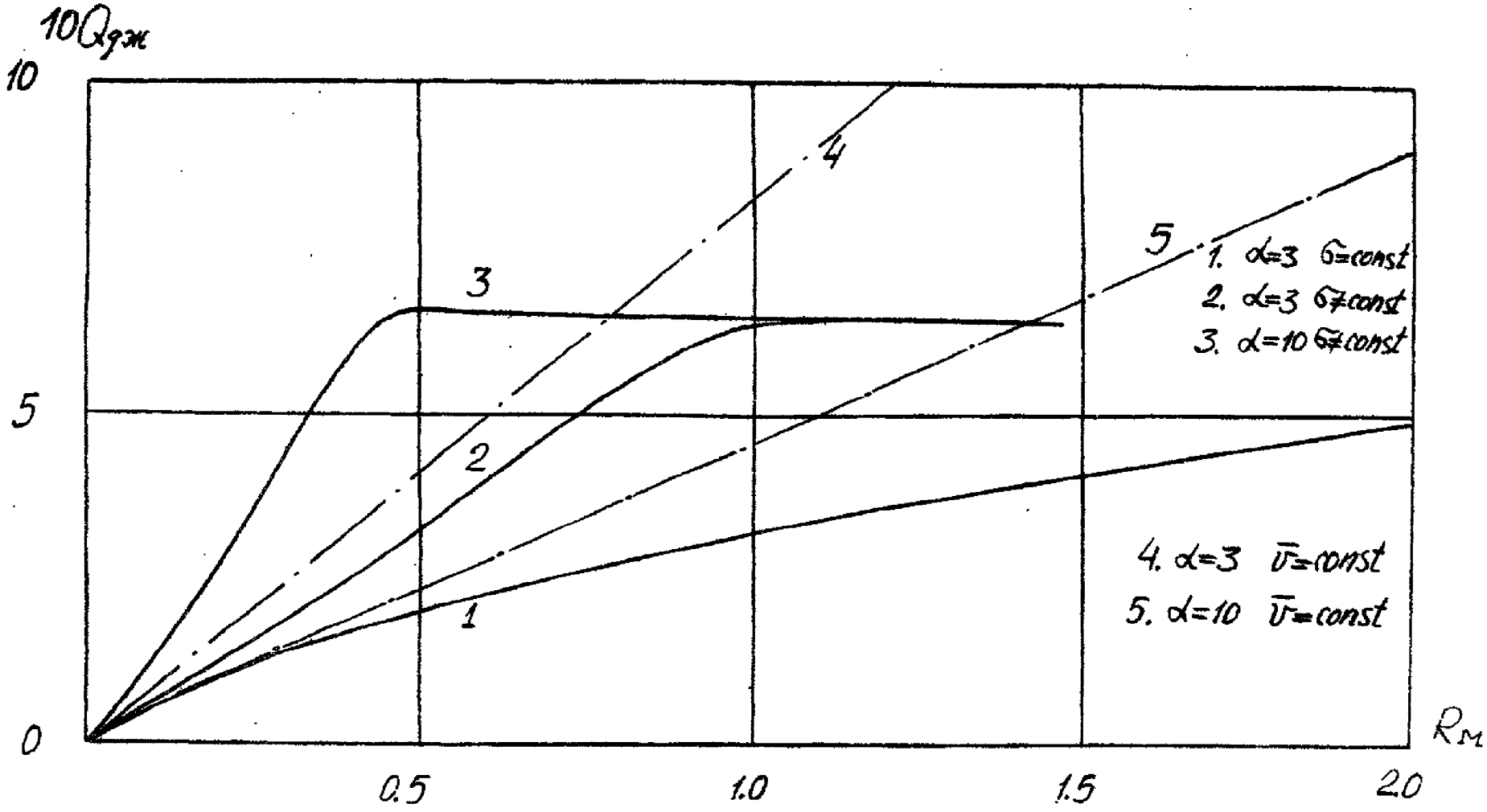
фиг. 5.3


M min
3.0
2.0
1.0
0
1.0
2.0
3.0 Rм
1. α=∞ σ=const
2. α=3 σ=const
3. α=3 σ≠const
4. α=10 σ≠const
2
3
4
1
модельное решение
M1=2.92, γ=1.12

фиг. 54



фиг. 5.5


10Qдж
10
5
0
0.5
1.0
1.5
2.0
Rм
1
2
3
4
5
1. α=3 σ=const
2. α=3 σ≠const
3. α=10 σ≠const
4. α=3 v̄=const
5. α=10 v̄=const

Фиг. 5.6