

РАСЧЕТ ИОНИЗАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ *

Член-корреспондент АН СССР Е.П. ВЕЛИХОВ,
Л.М. ДЕГТЯРЕВ,
член-корреспондент АН СССР А.А. САМАРСКИЙ,
А.П. ФАВОРСКИЙ

¹⁰. Ионизационная неустойчивость [1], сравнительно недавно обнаруженная в низкотемпературной замагниченной плазме, встречается во многих магнито-гидродинамических устройствах. Этот вид неустойчивости является, по-видимому, одним из основных и простейших случаев развития турбулентности в низкотемпературной плазме. Поэтому его изучение представляет интерес с прикладной и общезначимой точки зрения.

Экспериментальное и теоретическое исследование этого явления содержится в [2, 3], а также в ряде других работ (см. обзор [4]). Однако изучение ионизационной неустойчивости нельзя считать законченным. Результаты экспериментов немногочисленны, а аналитическая теория возникновения и развития магнитных страт построена при ограничении линейности или одномерности.

В настоящей работе исследование ионизационной неустойчивости проведено на конкретной физической модели плазмы путем численного решения соответствующим образом поставленной математической задачи. Современные вычислительные методы позволяют проводить такое рассмотрение при достаточно общих предположениях. Однако нет необходимости сразу учитывать много различных эффектов. Более целесообразно сначала проанализировать простейшую физическую модель, в которой был бы заложен механизм ионизационной неустойчивости, обуславливающий образование страт. Последующее уточнение модели позволило бы оценить качественное и количественное влияние различных факторов. Анализ результатов численных расчетов, приведенных ниже, позволил сделать некоторые выводы о механизме и основных свойствах нелинейного, нестационарного процесса образования и поведения страт в магнитном поле.

* ДАН СССР, 1969, т. 184, № 3 с. 578-581.

2⁰. Остановимся на следующей постановке двумерной задачи, заимствованной из эксперимента [2]. Пусть в прямоугольной области $ABCD$ (рис. 1) находится плазма с постоянной концентрацией свободных электронов $n = n_0$. Внешнее магнитное поле постоянно и направлено вдоль оси z перпендикулярно вверх плоскости рисунка. В плазме между идеально секционированными электродами AB и CD течет электрический ток $\mathbf{j}(j_x, j_y, 0)$, $j_x = 0$, $j_y = -j_0$, $j_0 > 0$. На электродах $j_y = -j_0$ поддерживается постоянной. Стенки AD и BC выполнены из идеального диэлектрика, на котором $j_x = 0$.

Пусть в момент времени $t = 0$ произошло возмущение пространственного распределения концентрации электронов. Нас будет интересовать дальнейшее поведение концентрации свободных электронов и вектора плотности электрического тока. Относительно физических свойств плазмы сделаем следующие предположения: 1. Температура электронов T_e постоянна. 2. T_e значительно превышает температуру ионов T_i . 3. Частота столкновений электронов с ионами много больше частоты их столкновения с нейтральными атомами, так что время столкновений электронов обратно пропорционально концентрации $\tau = \tau_0 n_0 / n$, где τ_0 и n_0 – выбранные масштабы, а проводимость плазмы постоянна $\sigma = \sigma_0$. 4. Диффузионные процессы (излучение, электронная теплопроводность, термодиффузия электронов и т.д.) не учитываются. В этих предположениях уравнение баланса энергии, которое определяет скорость ионизации и рекомбинации, можно записать в виде [3]

$$I \partial n / \partial t = (j_x^2 + j_y^2) / \sigma - \kappa n T_e / \tau,$$

где I – потенциал ионизации, κ – доля потери энергии электрона за одно соударение с ионом.

Однако концентрация электронов не превосходит значения n^* , достигаемого при полной ионизации плазмы (как обычно, имеется в виду полная ионизация легкоионизирующейся компоненты). Пространственное распределение электрического тока описывается уравнениями $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Закон Ома берется в форме $\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \vec{\Omega} = \sigma \mathbf{E}$, $\vec{\Omega} = e c \mathbf{H} / m_e$, где e и m_e – заряд и масса электрона, c – скорость света в вакууме.

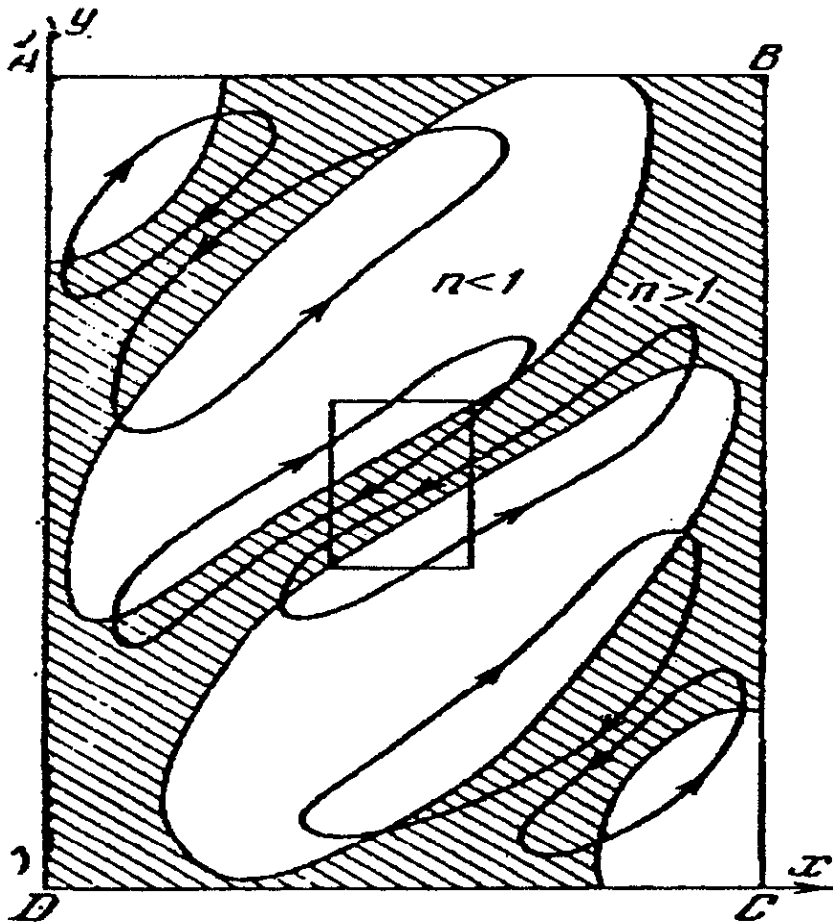


Рис. 1

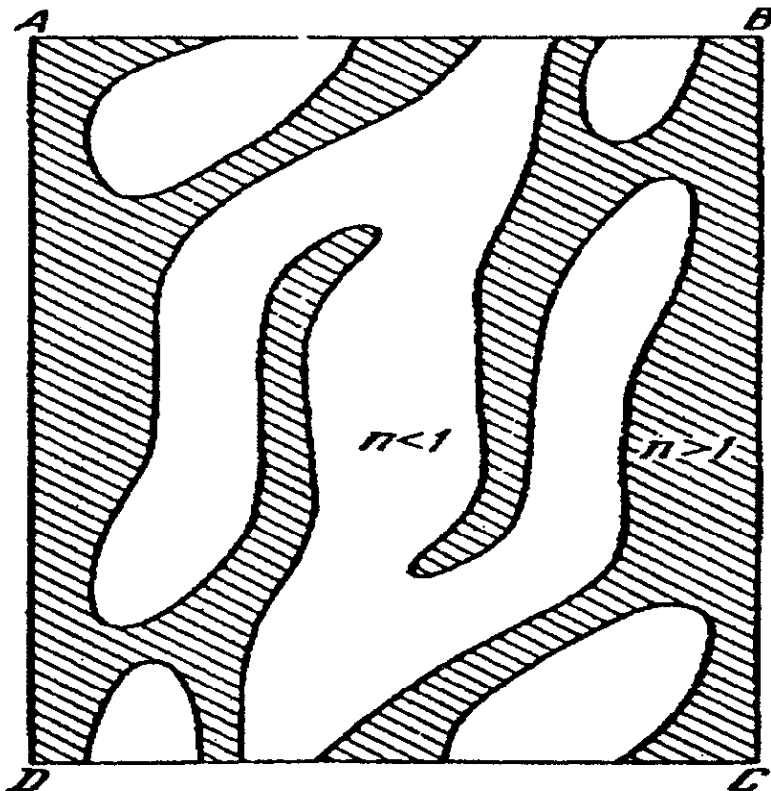


Рис. 2

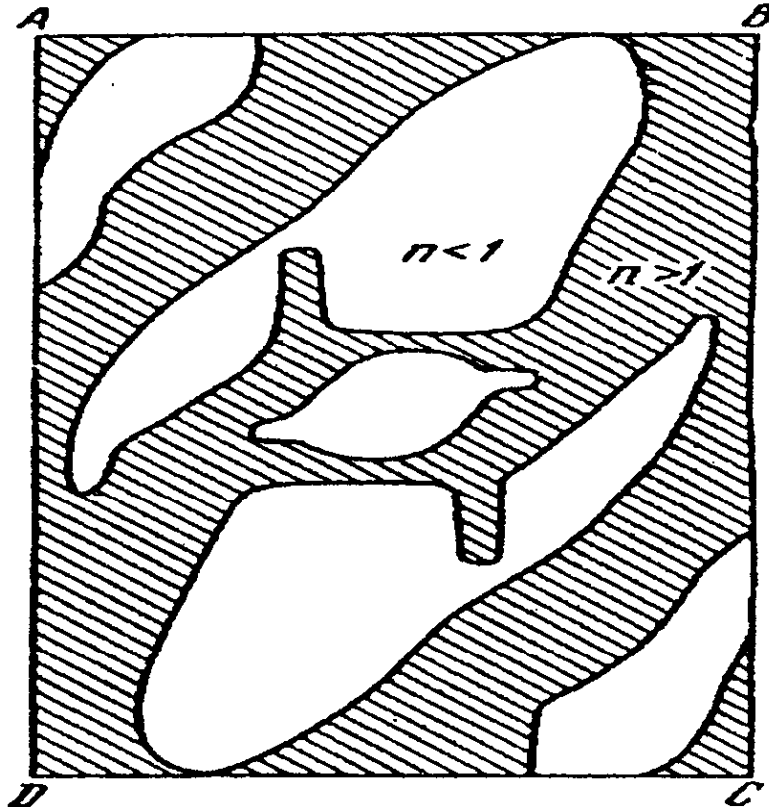


Рис. 3

Введем вектор-потенциал электрического тока $\Psi(0, 0, \psi)$ так, что $j = \text{rot } \Psi$, и запишем исходные уравнения в безразмерном виде. Для этого в качестве основных масштабов измерений выберем электропроводность плазмы σ_0 , начальные значения плотности электрического тока j_0 и концентрации электронов n . Для потенциала ψ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \Omega = \frac{H}{n}. \quad (1)$$

Уравнение для скорости ионизации принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\frac{\partial \psi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \psi}{\partial y})^2 - n^2. \quad (2)$$

На AB и CD ($AB = CD = L$) из условия $j_y = -1$ следует, что $\psi = x$, а из условия $j_x = 0$ на AD и BC получаем $\psi = 0$ на AD и $\psi = L$ на BC .

3⁰. Численное интегрирование нелинейной системы (1)-(2) строится следующим образом. Сначала находится решение стационарного уравнения (1) на новый момент времени с коэффициентами, вычисленными по значениям n с предыдущего

временного слоя. Затем, согласно разностному аналогу уравнения (2), пересчитываются значения n на новый момент времени. Решение краевой задачи для уравнения (1) осуществлялось с помощью локально одномерного метода [5] с симметризацией направлений [6]. Дифференциальные операторы по каждому направлению аппроксимируются однородными разностными схемами сквозного счета [7]. Из-за присутствия в уравнении (1) сильно меняющихся по пространству коэффициентов при первых производных производится монотонизация разностных схем [8], для решения которых применяется метод потоковой прогонки [9]. Используется квадратная разностная сетка с шагом h . Ее элементами являются ячейки, по которым осредняются все рассматриваемые физические величины. Значения этих величин относятся к центрам ячеек.

4⁰. Проследим развитие ионизационной неустойчивости на примерх конкретных расчетов. Во всех производимых вариантах полагалось $\Omega = 10$, $AB = CD = 1$, $AD = BC = 2$. В начальный момент $t = 0$ концентрация свободных электронов $n = 1$; $j_x = 0$; $j_y = -1$. Возмущение концентрации n проводилось на одну и ту же величину Δn в прямоугольнике, составленном из нескольких ячеек, форма, положение, а также амплитуда, и знак возмущения менялись.

На первой стадии за характерное время $t = t^* \sim 1$ ионизационная неустойчивость проявляется в возникновении регулярных образований, в которых $n > 1$, разделенных областями меньшей концентрации $n < 1$. По форме и расположению эти образования можно сопоставить со стратами, наблюдаемыми в эксперименте. На рис. 1 показаны страты (на рисунке они заштрихованы), имевшие место в расчете с шагом $h = 0.1$ (число узлов $N = 200$) на момент времени $t = 1.5$. Границами страт являются линии равной концентрации $n = 1$. Возмущение с амплитудой 0.2 при $t = 0$ занимало 8 ячеек в центральной части области (рис. 1).

Наведенные электрические токи текут вдоль замкнутых линий (рис. 1). Складываясь с внешним током, они заставляют результирующий ток течь преимущественно вдоль страт, интенсивный джоулев нагрев внутри которых приводит к сильной ионизации. Ослабление же результирующего тока и джоулева нагрева в "ямах" способствует дальнейшему уменьшению в них свободных электронов за счет рекомбинации.

На второй стадии происходит разрушение страт, которые распадаются на ряд хаотических образований ("языки", "петли",

"перемычки" и т.д.). Регулярная картина развитых страт сменяется при $t \gg t^*$ нерегулярной картиной "ям" и "перемычек". На рис. 2 показаны линии уровня $n = 1$ для описанного выше варианта при $t = 7$, области с $n > 1$ заштрихованы.

Изменение формы и положения возмущения при $t = 0$ показало, что начальные условия влияют на форму и расположение страт при $t = t^*$. Так, если $\Delta n > 0$, то на месте возмущения возникает страта, если $\Delta n < 0$, то развивается провал концентрации n .

Задача об ионизационной неустойчивости в неограниченном объеме, как видно из исходных уравнений, не имеет характерного размера. Однако при численном решении поставленной задачи характерным размером λ является масштаб осреднения, равный шагу разностной сетки $\lambda = h$. При решении задачи с учетом диффузионных процессов (излучение, теплопроводность и т.д.) характерным размером задачи явилась бы диффузионная длина этих процессов. С этой точки зрения шаг разностной схемы можно трактовать так же, как диффузионную длину некоторых физических процессов. Поэтому уменьшение шага разностной сетки в два раза ($h = 0.05$; $N = 800$) приводит к моменту времени $t = 1.5$ к несколько иному расположению страт (рис. 3). На месте того же возмущения (теперь оно занимает 32 ячейки) возникают две страты, толщина которых по-прежнему равна нескольким масштабам осреднения (нескольким шагам разностной сетки). Вблизи границ картина страт нарушается мало, что объясняется влиянием краевых условий. Развитие процесса формирования страт в этом случае происходит интенсивнее, и уже к моменту $t = 1.5$ обнаруживаются признаки появления нерегулярной картины, которая к моменту $t = 7$ имеет мало общего с картиной на рис. 2.

Рассмотрим изменение во времени средних величин. На рис. 4 представлены $\langle n \rangle$, $\langle \tau \rangle = \langle 1/n \rangle$, $\sigma_{eff} = \langle j_y \rangle / \langle E_y \rangle$, n_{max} , n_{min} при $N = 200$, $h = 0.1$ (сплошные линии) и при $N = 800$, $h = 0.05$ (пунктирные линии). На первой стадии образования страт ($t < t^*$) происходит резкое изменение этих величин, в частности падение σ_{eff} . Это объясняется тем, что преимущественное протекание электрического тока происходит вдоль страт, что увеличивает эффективное сопротивление плазмы, несмотря на постоянную проводимость $\sigma = 1$.

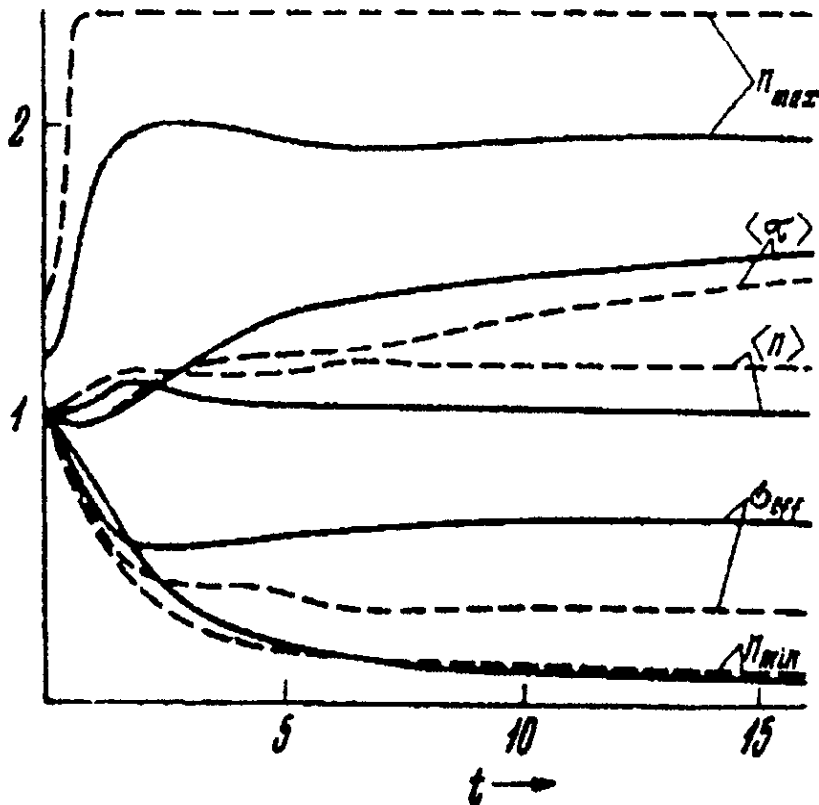


Рис. 4

С уменьшением h (увеличением числа узлов N) толщина страт уменьшается, их число в центральной части области возрастает, что приводит к возрастанию в них плотности тока. Поэтому падение σ_{eff} происходит в этом случае более интенсивно, что видно из рис. 4. В свою очередь возрастание плотности тока в стратах обуславливает более интенсивное выделение джоулева тепла и, следовательно, более быстрое возрастание n_{max} (при $h = 0.05$ достигается полная ионизация $n_{max} = n^* = 2.5$). При разрушении страт в начале второй стадии средние величины меняются мало. При $t \gg t^*$ происходит окончательное установление $\langle n \rangle$, σ_{eff} и n_{max} , однако n_{min} продолжает убывать, из-за чего возрастает $\langle \tau \rangle$. Расчеты показали, что при фиксированном h форма и положение начального возмущения существенно не влияют на значения средних величин, устанавливающиеся при $t \gg t^*$.

5⁰. На основании анализа результатов численного решения задачи о поведении локального возмущения концентрации электронов в замагниченной плазме при протекании в ней электрического тока можно сделать следующие выводы:

1. Принятая физическая модель качественно отражает наиболее существенные моменты в поведении плазмы, известные из эксперимента.

Нелинейный механизм джоулева нагрева и передачи энергии при столкновениях электронов с ионами обуславливает за характерное время t^* проявление ионизационной неустойчивости в виде регулярных образований – страт.

2. На поздних стадиях процесса происходит распад страт, приводящее к нерегулярному пространственному распределению концентрации электронов и компонент плотности электрического тока.

3. Несмотря на существенно нестационарный характер ионизационной неустойчивости, за несколько характерных времен происходит установление средних величин.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Р. Velikhov, А.М. Dykhne, VII Intern. Conference of phenomena in ionized Gases. Abstracts, Beograd, 1965. p. 84.

2. И.Я. Шипук, Докл. на III Международн. симпозиуме по МГД преобразованию энергии, 2, Зальцбург, 1966.

3. А.А. Веденов, Е.П. Велихов, Докл. на III Международном симпозиуме по МГД преобразованию энергии, 2, Зальцбург, 1966.

4. А.В. Недоспасов, УФН, 94, в. 3 (1968).

5. А.А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 2, N 5, 787 (1962).

6. А.А. Самарский, ДАН, 165, N 6, 1253 (1965).

7. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1, N 1, 4 (1961).

8. А.А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, N 3, 548 (1965).

9. Л.М. Дегтярев, А.П. Фаворский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, N 3, 679 (1968).