О НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ОБОБЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ *

Член-корреспондент АН СССР А.В. БИЦАДЗЕ,

член-корреспондент АН СССР А.А. САМАРСКИЙ

В евклидовом n-мерном пространстве точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассмотрим область D, граница S которой является $(n-1)$-мерной кусочно-гладкой поверхностью Ляпунова. Обозначим через σ часть S, представляющую собой $(n-1)$-мерную разомкнутую поверхность Ляпунова с параметрическим уравнением:

$$x = x(t), \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \in \delta.$$

Пусть σ_0 – диффеоморфный $y = I(x)$ образ σ, лежащий в области с параметрическим уравнением $y = y(t)$, $t \in \delta$.

В области D рассмотрим равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$E = A^{ij}\partial^2/\partial x_i \partial x_j + B^i \partial/\partial x_i + C$$

с действительными достаточно гладкими матричными коэффициентами размера $m \times m$.

Естественным обощением задачи Дирихле можно считать следующую краевую задачу: *найти регулярное* (дважды непрерывно дифференцируемое) *в области D решение $u(x)$ уравнения*

$$Eu = f(x), \qquad x \in D, \tag{1}$$

непрерывное в $\overline{D}$ и *удовлетворяющее условиям*

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in S - \sigma; \tag{2}$$

$$u(y) = u(x), \qquad y = T(x), \qquad x(t) \in \sigma, \quad y(t) \in \sigma_0, \tag{3}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – *заданные действительные m-мерные непрерывные векторы.*

Мы ниже ограничимся рассмотрением случая, когда (1) является двумерным уравнением Лапласа $\Delta u = 0$ с независимыми переменными

*ДАН СССР, 1969, т. 185, №4, с. 739-740.

x, y, область D совпадает с прямоугольником $-l < x < l$, $0 < y < 1$, а σ и σ_0 представляют собой отрезки $x = l$, $0 \le y \le 1$ и $x = 0$, $0 \le y \le 1$ соответственно.

Итак, *ищется гармоническая в прямоугольнике D функция $u(x, y)$, непрерывная в замкнутом прямоугольнике $\overline{D}$ и удовлетворяющая условиям*

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,1) = \varphi_2(x), \quad -l \le x \le l,$$

$$u(-l,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$u(0,y) = u(l,y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – *заданные непрерывные функции.*

Единственность решения задачи (4)-(5) следует из принципа экстремума для гармонических функций.

Действительно, учитывая условие (5), на основании указанного принципа заключаем, что удовлетворяющая условиям (4) гармоническая функция $u(x,y)$ свои экстремальные значения в замкнутом прямоугольнике $\overline{D}$ может достигать лишь на его левой, верхней и нижней сторонах. Следовательно, соответствующая (4)-(5) однородная задача не может иметь отличного от нуля решения, и тем самым единственность решения задачи (4)-(5) доказана.

Неизвестные пока нам значения искомого решения $u(x, y)$ при $x = l$, $0 \le y \le 1$ обозначим через $\varphi(y)$, т.е.

$$\varphi(y) = u(l,y), \quad 0 \le y \le 1. \tag{6}$$

Решение задачи Дирихле с краевыми условиями (4)-(5) дается известной формулой

$$u(x, y) = \int_{-l}^{l} K(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi + \int_0^1 K(x,y;l,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int_{-l}^{l} K(x,y;\xi,1)\varphi_2(\xi)\,d\xi - \int_0^1 K(x,y;-l,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta, \tag{7}$$

где функция $K(x,y;\xi,\eta)$ совпадает с производной гармонической функции Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ задачи Дирихле в прямоугольнике D по внутренней нормали его контура в точке (ξ, η).

В силу условия (5) из (7) получим эквивалентное задаче (4)-(5) интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(y) - \int_0^1 K(0,y;l,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta = \int_{-l}^{l} K(0,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi -$$

$$- \int_{-l}^{l} K(0,y;\xi,1)\varphi_2(\xi)\,d\xi - \int_0^1 K(0,y;-l,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta, \qquad (8)$$

ядро $K(0,y;\xi,0)$ которого является аналитической функцией переменных y, η, обращающейся в бесконечность порядка $1/2$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$.

Так как задача (4)-(5) эквивалентна интегральному уравнению (8), то разрешимость последнего и, стало быть, существование решения задачи (4)-(5) вытекает из уже доказанного выше свойства единственности этого решения.

Аналогично исследуется краевая задача (4)-(5) в том случае, когда третье из условий (4) заменено условием $u(-l,y) = u(0,y)$.

В частности, решение задачи отыскания гармонической в прямоугольнике D функции $u(x,\,y)$, непрерывной в $\overline{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(x,1) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(x,y) = u(x+l,y), \quad -l \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 1,$$

где φ_1 и φ_2 – заданные непрерывные функции, дается формулой

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^l \left[\frac{\varphi_1(t)}{\operatorname{ch}\pi(t+kl-x) - \cos\pi y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_2(t)}{\operatorname{ch}\pi(t+kl-x) + \cos\pi y}\right]\sin\pi y\,dt.$$

Примененный выше способ годится для доказательства существования и единственности решения задачи (1)-(2)-(3) в тех случаях, когда для решений уравнения (1) в области D имеет место принцип экстремума. С незначительными видоизменением этот же способ приводит к цели во всех тех случаях, когда уравнение (1) в области D имеет фундаментальное решение.

Когда краевое условие (2) заменено общим линейным краевым условием (например, условием задачи Пуанкаре), исследование полученной задачи сталкивается с теми же трудностями, которые возникают в случае, когда носителем аналогичного условия является вся граница S области D.