

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ОБОБЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ *

Член-корреспондент АН СССР А.В. БИЦАДЗЕ,

член-корреспондент АН СССР А.А. САМАРСКИЙ

В евклидовом n -мерном пространстве точек x с декартовыми ортогональными координатами x_1, x_2, \dots, x_n рассмотрим область D , граница S которой является $(n-1)$ -мерной кусочно-гладкой поверхностью Ляпунова. Обозначим через σ часть S , представляющую собой $(n-1)$ -мерную разомкнутую поверхность Ляпунова с параметрическим уравнением:

$$x = x(t), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in \delta.$$

Пусть σ_0 – диффеоморфный $y = I(x)$ образ σ , лежащий в области с параметрическим уравнением $y = y(t)$, $t \in \delta$.

В области D рассмотрим равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$E = A^{ij} \partial^2 / \partial x_i \partial x_j + B^i \partial / \partial x_i + C$$

с действительными достаточно гладкими матричными коэффициентами размера $m \times m$.

Естественным обобщением задачи Дирихле можно считать следующую краевую задачу: *найти регулярное (дважды непрерывно дифференцируемое) в области D решение $u(x)$ уравнения*

$$Eu = f(x), \quad x \in D, \quad (1)$$

непрерывное в \bar{D} и удовлетворяющее условиям

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in S - \sigma; \quad (2)$$

$$u(y) = u(x), \quad y = T(x), \quad x(t) \in \sigma, \quad y(t) \in \sigma_0, \quad (3)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – заданные действительные m -мерные непрерывные векторы.

Мы ниже ограничимся рассмотрением случая, когда (1) является двумерным уравнением Лапласа $\Delta u = 0$ с независимыми переменными

* ДАН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 739-740.

x, y , область D совпадает с прямоугольником $-l < x < l, 0 < y < 1$, а σ и σ_0 представляют собой отрезки $x = l, 0 \leq y \leq 1$ и $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ соответственно.

Итак, ищется гармоническая в прямоугольнике D функция $u(x, y)$, непрерывная в замкнутом прямоугольнике \bar{D} и удовлетворяющая условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, 1) = \varphi_2(x), \quad -l \leq x \leq l,$$

$$u(-l, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(l, y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – заданные непрерывные функции.

Единственность решения задачи (4)–(5) следует из принципа экстремума для гармонических функций.

Действительно, учитывая условие (5), на основании указанного принципа заключаем, что удовлетворяющая условиям (4) гармоническая функция $u(x, y)$ свои экстремальные значения в замкнутом прямоугольнике \bar{D} может достигать лишь на его левой, верхней и нижней сторонах. Следовательно, соответствующая (4)–(5) однородная задача не может иметь отличного от нуля решения, и тем самым единственность решения задачи (4)–(5) доказана.

Неизвестные пока нам значения искомого решения $u(x, y)$ при $x = l, 0 \leq y \leq 1$ обозначим через $\varphi(y)$, т.е.

$$\varphi(y) = u(l, y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (6)$$

Решение задачи Дирихле с краевыми условиями (4)–(5) дается известной формулой

$$u(x, y) = \int_{-l}^l K(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^1 K(x, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta - \\ - \int_{-l}^l K(x, y; \xi, 1) \varphi_2(\xi) d\xi - \int_0^1 K(x, y; -l, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta, \quad (7)$$

где функция $K(x, y; \xi, \eta)$ совпадает с производной гармонической функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ задачи Дирихле в прямоугольнике D по внутренней нормали его контура в точке (ξ, η) .

В силу условия (5) из (7) получим эквивалентное задаче (4)–(5) интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \int_0^1 K(0, y; l, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \int_{-l}^l K(0, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \\ - \int_{-l}^l K(0, y; \xi, 1) \varphi_2(\xi) d\xi - \int_0^1 K(0, y; -l, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

ядро $K(0, y; \xi, 0)$ которого является аналитической функцией переменных y, η , обращающейся в бесконечность порядка $1/2$ при $\eta = 0$ и $\eta = 1$.

Так как задача (4)-(5) эквивалентна интегральному уравнению (8), то разрешимость последнего и, стало быть, существование решения задачи (4)-(5) вытекает из уже доказанного выше свойства единственности этого решения.

Аналогично исследуется краевая задача (4)-(5) в том случае, когда третье из условий (4) заменено условием $u(-l, y) = u(0, y)$.

В частности, решение задачи отыскания гармонической в прямоугольнике D функции $u(x, y)$, непрерывной в \bar{D} и удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, 1) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(x, y) = u(x + l, y), \quad -l \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

где φ_1 и φ_2 - заданные непрерывные функции, дается формулой

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l \left[\frac{\varphi_1(t)}{\cosh \pi(t + kl - x) - \cos \pi y} + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_2(t)}{\cosh \pi(t + kl - x) + \cos \pi y} \right] \sin \pi y dt. \end{aligned}$$

Примененный выше способ годится для доказательства существования и единственности решения задачи (1)-(2)-(3) в тех случаях, когда для решений уравнения (1) в области D имеет место принцип экстремума. С незначительными видоизменением этот же способ приводит к цели во всех тех случаях, когда уравнение (1) в области D имеет фундаментальное решение.

Когда краевое условие (2) заменено общим линейным краевым условием (например, условием задачи Пуанкаре), исследование полученной задачи сталкивается с теми же трудностями, которые возникают в случае, когда носителем аналогичного условия является вся граница S области D .