

# Aplikace matematiky

---

Aleksander Andreevich Samarskij

Об устойчивости операторно-разностных схем

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 181--186

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103153>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. САМАРСКИЙ

1. Изучаются операторно-разностные схемы с операторами, действующими в вещественном унитарном пространстве (любого числа измерений). Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости для двухслойных схем и достаточные условия для трехслойных схем. Эти условия, имеющие вид линейных операторных неравенств, выделяют классы устойчивых схем, которым, в частности, принадлежат схемы для эволюционных уравнений математической физики. Запись схем в канонической форме позволяет указать операторы  $R$ , ответственные за устойчивость. Достаточные условия устойчивости накладывают слабые ограничения на произвол в выборе операторов  $R$  (регуляризаторов). Меняя  $R$  и оставаясь при этом в классе устойчивых схем, можно получать схемы, обладающие заданными свойствами (по точности и объему вычислительной работы). Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решения операторно-разностной задачи Коши. При этом мы стремились оценить решение задачи в возможно более сильной норме через правую часть в возможно более слабой норме.

2. Пусть  $\{H_N\}$  ( $N = 1, 2, \dots; N \rightarrow \infty$ ) последовательность линейных нормированных пространств (являющихся аналогом пространств сеточных функций, определенных на сетках  $\omega_h$  в евклидовом пространстве  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ). Пусть  $y_{N,\tau}(t)$  — абстрактная функция дискретного аргумента  $t \in \varpi_\tau$  со значениями в  $H_N$ , где  $\varpi_\tau = \{t = j\tau; j = 0, 1, \dots, j_0\}$  — сетка с шагом  $\tau$  на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $A(t) = A_{N,\tau}(t)$ ,  $B(t) = B_{N,\tau}(t)$ ,  $R = R_{N,\tau}(t)$  и т.д. — линейные (аддитивные и однородные) операторы, отображающие при каждом  $t \in \varpi_h$  пространство  $H_N$  на  $H_N$ . Под двухслойной (трехслойной) операторно-разностной схемой понимается операторное уравнение, связывающее для каждого  $t \in \varpi_h$  две точки  $y_{N,\tau}(t + \tau)$  и  $y_{N,\tau}(t)$  (три точки  $y_{N,\tau}(t + \tau)$ ,  $y_{N,\tau}(t)$  и  $y_{N,\tau}(t - \tau)$ ) пространства  $H_N$ .

Отправным пунктом исследования является каноническая форма записи схем. Любую двухслойную схему можно записать в канонической форме (индексы  $N, \tau$  опускаем)

$$(1) \quad B(t) \frac{y(t + \tau) - y(t)}{\tau} + A(t) y(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t = j\tau \leq t_0, \quad y(0) = y_0,$$

а трехслойную схему — в канонической форме

$$(2) \quad B(t) \frac{y(t + \tau) - y(t - \tau)}{2\tau} + R(t) [y(t + \tau) - 2y(t) + y(t - \tau)] + \\ + A(t) y(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t = j\tau \leq t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1;$$

здесь  $y(t)$  — искомая функция,  $\varphi(t) = \varphi_{N,\tau}(t)$  — заданная абстрактная функция со значениями в  $H_N$ ,  $y_0 = y_{0,N,\tau}$  и  $y_1 = y_{1,N,\tau}$  — заданные точки (векторы) в  $H_N$ .

3. Устойчивость схем (1) и (2) определяется как свойство равностепенной по  $N, \tau$  непрерывности  $\{y_{N,\tau}\}$  последовательности решений задач (1) и (2) относительно исходных данных  $\{\varphi_{N,\tau}(t)\}, \{y_{N,\tau}(0)\}, \{y_{N,\tau}(\tau)\}$ . Вводя на линейном множестве  $H_N$  различные нормы  $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$  и т.д., получим различные нормированные пространства, состоящие из элементов  $H_N$ . Полнота  $H_N$  не предполагается. Будем говорить, что схема (1) (схема (2)) устойчива, если можно указать такие числа  $\tau_0 > 0$  и  $N_0 > 0$ , что при любых  $\varphi(t) \in H_N$  и  $y(0) \in H_N$  ( $y(\tau) \in H_N$ ) и при  $\tau \leq \tau_0, N \geq N_0$ , для решения задачи (1) (или (2)) имеет место одна из оценок:

$$(3) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)},$$

$$(4) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} [\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_i(t')\|_{(2)}],$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — положительные числа, не зависящие от  $\tau$  и  $N$ ,  $\varphi_i = (\varphi(t') - \varphi(t' - \tau))/\tau$ . Для трехслойной схемы (2) оценки (3) и (4) принимают вид:

$$(5) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)},$$

$$(6) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} [\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_i(t')\|_{(2)}],$$

причем  $\|y(t + \tau)\|_{(1)}^2 = \|y(t + \tau) + y(t)\|_{(1)}^2 + \|y(t + \tau) - y(t)\|_{(2)}^2$ , где  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы на  $H_N$ . Если схема устойчива при любых  $\tau > 0$ ,  $N > 0$ , то она называется абсолютно устойчивой.

4. В дальнейшем будем предполагать, что  $H_N$  вещественное унитарное пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_N$  и нормой  $\|y\|_N = \sqrt{(y, y)_N}$  (индекс  $N$  всюду опускаем). Ставится задача: выявить запас информации относительно операторов  $B, R$  и  $A$ , достаточный для устойчивости схем (1) и (2) и найти априорные оценки вида (3)–(6). Выделим исходные семейства схем. Схема (1) принадлежит исходному семейству двухслойных схем ИС-2, если:

α)  $A(t)$  самосопряжен и положителен ( $A^* = A, A > 0$ , т.е.  $A(x, x) > 0$  для всех  $x \in H_N, x \neq 0$ ).

β)  $B(t) > 0$ .

$\gamma)$   $A(t)$  липшиц-непрерывен по  $t$ , то есть

$$|(A(t + \tau)x, x) - (A(t)x, x)| \leq C_0(A(t)x, x),$$

где  $C_0 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $N$ . Схема (2) принадлежит исходному семейству ИС-3, если  $A(t)$  и  $R(t)$  удовлетворяют условиям  $\alpha)$  и  $\gamma)$ . Устойчивые схемы будем искать в ИС-2 и ИС-3. Нормы  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$ , вообще говоря, зависят от  $t$ , например

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_{(1,t)} = \sqrt{(A(t)y, y)} \quad \text{и т.д.}$$

Для упрощения изложения формулируем результаты в предположении, что операторы  $A, B, R$  постоянные, т.е. не зависят от  $t$ . Условимся писать  $B \geq A$ , если  $(Bx, x) \geq (Ax, x)$  для всех  $x \in H_N$ .

**5.** Формулируем теоремы об устойчивости для двухслойных схем.

**Теорема 1.** *Схема (1) из ИС-2 устойчива при*

$$B \geq 0,5\tau(1 - c_1\tau)A, \quad c_1 > 0.$$

Для решения задачи (1) при  $\tau \leq \tau_0$ ,  $\tau_0 < 1/4C_1$  верна оценка (4), где

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_a = \sqrt{(Ay, y)}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}.$$

Если  $B^* = B$ , то имеет место оценка (3) с

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|_b, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{b^{-1}}.$$

Если  $B \geq 0,5\tau A$ , то схема (1) абсолютно устойчива.

**Теорема 2.** *Условие*

$$B > 0,5\tau(1 - c_1\tau^\gamma)A > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

где  $\gamma$  не зависит от  $\tau$  и  $N$ , необходимо для устойчивости исходного семейства ИС-2 схем (1).

**Теорема 3.** *Если выполнено условие*

$$B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

то для (1) верна оценка (3) с  $\|y\|_{(1)} = \|y\|_a$ ,  $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{a^{-1}}$  при любых  $\tau > 0$ . (Здесь  $E$  — единичный оператор.) Схему (1) удобно записать в другом виде, положив  $B = E + \tau R$ . Тогда достаточное условие  $B \geq 0,5\tau A$  устойчивости для (1) примет вид

$$(7) \quad R \geq \sigma_0 A, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}.$$

Общие теоремы 1 и 3 позволяют получить априорные оценки для схемы с весами

$$(8) \quad y_t + A(t) [\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y] = \varphi, \quad y(0) = y_0,$$

где  $\hat{y} = y(t + \tau)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$ ,  $\sigma$  — вещественный параметр. Приводя (8) к каноническому виду (1), находим  $B = E + \sigma \tau A$ ,  $R = \sigma A$ . Достаточное условие (7) имеет вид  $\sigma \geq \sigma_0$ . Укажем два результата для схемы (8): 1) если  $A(t) > 0$  несамосопряженный оператор и  $\|Ax\|^2 < \Delta(Ax, x)$ ,  $\Delta > 0$ , то (8) абсолютно устойчива при  $\sigma \geq 0,5 - 1/\tau\Delta$  и для (8) верна оценка (4), где  $\|y\|_{(1)} = \|y\|$ ,  $\|\varphi\|_{(2)} = \|A^{-1}\varphi\|$ ,  $\|\varphi_t\|_{(2)} = \|(A^{-1}\varphi)_t\|$ ; 2) если  $A^*(t) = A(t) > 0$  и  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_\varepsilon = 0,5 - (1/\tau\|A\|)$ , то для (8) при любых  $\tau > 0$  верна оценка (3) с  $\|y\|_{(1)} = \|y\|$ ,  $\|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$ .

#### 6. Достаточные условия устойчивости трехслойных схем.

**Теорема 4.** Если выполнены условия

$$B \geq 0, \quad R \geq \frac{1}{4}A,$$

то схема (2) за ИС-3 абсолютно устойчива и для решения задачи (2) верна оценка (6), где

$$(9) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)}^2 = \|\hat{y}\|_{(1)}^2 = \|\hat{y} + y\|_a^2 + \tau^2((R - \frac{1}{4}A) y_t, y_t), \\ \|y\|_a^2 = (Ay, y), \quad \|\varphi\|_{(2)}^2 = (A^{-1}\varphi, \varphi).$$

**Теорема 5.** Если выполнены условия

$$B \geq \varepsilon E \quad (\varepsilon > 0 - \text{любое}) \quad \text{и} \quad R \geq \frac{1}{4}A,$$

то для (2) верна оценка (5), где  $\|y(t + \tau)\|_{(1)}$  имеет вид (9),  $a\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$ .

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$(10) \quad \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + A[\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}] = \varphi, \quad \check{y} = y(t - \tau).$$

Записывая ее в виде (2), находим  $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A$ ,  $R = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)A$ . Для устойчивости (10) достаточно, чтобы  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0,5$ . Теоремы 4 и 5 позволяют получить ряд априорных оценок для (10). Так, например, если  $A(t) > 0$  несамосопряженный оператор, то для (10) верна оценка (3) (при любых  $\tau > 0$ ) с  $\|\hat{y}\|_{(1)}^2 = \frac{1}{4}\|\hat{y} + y\|^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2})\|\hat{y} - y\|^2$ ,  $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$ , если выполнены условия  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0,5$ .

При изучении устойчивости для конкретных разностных схем, аппроксимирующих уравнения математической физики, необходимо привести рассматриваемую схему к каноническому виду (1) или (2), ввести пространство сеточных

функций  $H_N$  со скалярным произведением, проверить принадлежность схемы к ИС-2 или ИС-3, а также выполнение достаточных условий устойчивости (например, в виде  $R > \sigma_0 A$  для (1),  $R \geq \frac{1}{4} A$  для (2)) и, наконец, воспользоваться одной из теорем 1,2,4 или 5.

7. В заключение остановимся на вопросе об устойчивости аддитивных схем. Под аддитивной схемой понимается система операторных уравнений

$$(11) \quad \sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t) y_{\beta}(t) = D_{\alpha}(t) y(t) + \tau \varphi_{\alpha}(t), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m),$$

$$0 \leq t = j\tau \leq t_0, \quad y(0) = y_0 \in H_N,$$

осуществляющих переход со „слоя“  $t = j\tau$  на слой  $t = (j + 1)\tau$ , так что  $y_m(t) = y(t + \tau)$ , а  $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$  — промежуточные значения. Здесь  $C_{\alpha\beta}, D_{\alpha}$  — линейные операторы из  $H_N$  в  $H_N$ . Погрешность аппроксимации  $\psi$  аддитивной схемы определяется как сумма погрешностей аппроксимации  $\psi_{\alpha}$  для промежуточных уравнений (11) номера  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  ( $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m$ ). В связи с таким определением аппроксимации аддитивной схемы необходимы априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации. Приведем одну теорему для регулярной аддитивной схемы вида

$$B \frac{y_{\alpha}(t) - y_{\alpha-1}(t)}{\tau} + \sum_{\beta=1}^m A_{\alpha\beta}(t) y_{\beta}(t) = \varphi_{\alpha}(t),$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, m, \quad y(0) = y_0.$$

Будем предполагать, что  $H_N$  вещественное унитарное пространство,  $B$  — постоянный оператор.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия: 1)  $B^* = B > 0$ , 2) матрица-оператор  $A = (A_{\alpha\beta})$  неотрицательна, то есть  $\sum_{\alpha,\beta=1}^m (A_{\alpha\beta} \xi_{\beta}, \xi_{\alpha}) \geq 0$  для любых  $\xi_{\alpha} \in H_N$ . Тогда схема (11) абсолютно устойчива и для нее верна априорная оценка

$$(12) \quad \|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} [\|\varphi(t')\|_{(2)} + \sqrt{\tau} \sum_{\alpha=1}^m \|\varphi_{\alpha}\|_{(2)}],$$

где

$$\|y\|_{(1)} = \sqrt{(By, y)}, \quad \|\varphi\|_{(2)} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)}, \quad \varphi = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_{\alpha}.$$

Из (12) и суммарной аппроксимации (например, вида  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m = O(\tau^K + h_N^K)$ ) следует сходимость аддитивной схемы.

Дополнительные сведения и ссылки, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов, можно найти в [2]–[4].

*Литература*

- [1] *В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов*: Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
- [2] *А. А. Самарский*: К теории разностных схем. Докл. АН СССР, 1965, 165, № 5, 1007—1011.
- [3] *А. А. Самарский*: Некоторые вопросы теории разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 665—686.
- [4] *А. А. Самарский*: О регуляризации разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 1, 62—93.

*А. А. Самарский*, Институт прикладной математики АН СССР, Миюская пл. 4, Москва А-47, СССР.