Доклады Академии наук СССР
1968. Том 179, № 3

УДК 518

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

О ВЫБОРЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Рассматривается разностная задача Дирихле повышенного порядка точности $O(|h|^4)$ или $O(h^6)$ при $h_1 = h_2 = h$ для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Для ее решения предлагается итерационный метод переменных направлений с двумя наборами параметров $\{\tau_s\}$ и $\{\omega_s\}$. Минимаксная задача о выборе оптимальных параметров сводится к задаче, решенной Жорданом [1]. При таком выборе параметров число итераций для схемы $O(|h|^4)$ увеличивается по сравнению со схемой $O(|h|^2)$ незначительно (не более чем на 10% при $h_1 = h_2 = h < l/10$ в случае квадрата со стороной l).

1. Рассмотрим схему повышенного порядка точности на прямоугольной сетке $\bar{\omega}_h = \{(i_1h_1, i_2h_2),\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ (обозначения см. [3]).

$$\Lambda' y = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + {}^1\!/_{12}(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1\Lambda_2)\, y = -\varphi(x), \qquad x \in \omega_h, \qquad y|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{1}$$

(где $\omega_h = \{(i_1h_1, i_2h_2),\ 0 < i_\alpha < N_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$, γ_h — множество граничных узлов), соответствующее задаче Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $\bar{G} = (0 \leqslant x_1 \leqslant l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2)$:

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1, 2; \quad u|_\Gamma = \mu(x). \tag{2}$$

Здесь $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, $\varphi = f + {}^1\!/_{12}h_1^2\Lambda_1 f + {}^1\!/_{12}h_2^2\Lambda_2 f$, Γ — граница прямоугольника. Схема (1) имеет точность $O(|h|^4)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, а при $h_1 = h_2 = h$ и соответствующем φ — точность $O(h^6)$. Для ее решения в [2–4] были предложены схемы переменных направлений с циклическим набором параметров $\{\tau_s\}$. Однако, как следует из [1], циклический набор параметров не является оптимальным даже в случае схем $O(|h|^2)$.

2. Для решения задачи (1) предлагается следующая схема переменных направлений с двумя наборами параметров $\{\tau_s\}$ и $\{\omega_s\}$:

$$\begin{gathered}
(E - (\tau_s - \varkappa_1)\Lambda_1)\, \overset{s+1/2}{y} = (E + (\tau_s + \varkappa_2)\Lambda_2)\, \overset{s}{y} + (\tau_s - \varkappa_1)\varphi;\\
\overset{s+1/2}{y} = \bar{\mu} \quad \text{при } x_1 = 0,\ l_1; \quad 0 < x_2 < l_2; \quad \bar{\mu} = \mu + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\Lambda_2\mu;\\
(E - (\omega_s - \varkappa_2)\Lambda_2)\, \overset{s+1}{y} = (E + (\omega_s + \varkappa_1)\Lambda_1)\, \overset{s+1/2}{y} + (\omega_s + \varkappa_1)\varphi;\\
\overset{s+1}{y} = \mu(x) \quad \text{при } x_2 = 0,\ l_2,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $\varkappa_\alpha = {}^1\!/_{12}h_\alpha^2$, $\alpha = 1, 2$, E — единичный оператор ($Ey = y$).

Если уравнение (1) записать в матричной форме, то краевые условия на γ_h будут однородными, $y|_{\gamma_h} = 0$, а правая часть φ в (3) заменится функцией $\tilde{\varphi}$, которая отличается от φ только в пограничных узлах:

$$\tilde{\varphi} = \varphi \quad \text{при } h_\alpha < x_\alpha < l_\alpha - h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{1}{h_\alpha^2}(\mu^{-1_\alpha}) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\Lambda_\beta\mu) \quad \text{при } x_\alpha = h_\alpha, \quad \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{1}{h_\alpha^2}(\mu^{+1_\alpha}) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\Lambda_\beta\mu) \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha - h_\alpha, \ \alpha \neq \beta, \ \alpha, \beta = 1, 2.$$

Тогда будут ставиться однородные краевые условия:

$$\overset{s}{y} = \overset{s+1}{y} = \overset{s+1/2}{y} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h,$$

а в уравнениях (3) вместо φ надо написать $\tilde{\varphi}$.

Оптимальный набор параметров $\{\tau_s\}$ и $\{\omega_s\}$ находится по методу Жордана ([1]) для операторов $-\Lambda_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), наименьшие и наибольшие собственные значения которых определяются по формулам

$$\tilde{a}_\alpha = \frac{a_\alpha}{1 - a_\alpha \varkappa_\alpha}, \quad \tilde{b}_\alpha = \frac{b_\alpha}{1 - b_\alpha \varkappa_\alpha}, \quad \text{где } a_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}, \quad b_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{2\pi h_\alpha}{2 l_\alpha}. \tag{4}$$

3. Перейдем к обоснованию предложенного метода. Рассмотрим операторное уравнение

$$A'v = \varphi, \quad A' = A_1 + A_2 - (\varkappa_1 + \varkappa_2) A_1 A_2, \quad \varkappa_1 > 0, \ \varkappa_2 > 0, \tag{5}$$

где A_1 и A_2 — линейные операторы, заданные на конечномерном линейном пространстве H со скалярным произведением (,) и $\varphi \in H$.

Предположим, что:

I. A_1 и A_2 — положительные, самосопряженные операторы с границами a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно, так что $a_\alpha E \leqslant A_\alpha \leqslant b_\alpha E$ ($a_\alpha > 0$), $\alpha = 1, 2$ или $a_\alpha(x, x) \leqslant (A_\alpha x, x) \leqslant b_\alpha(x, x)$ для всех $x \in H$.

II. $\varkappa_\alpha < \frac{1}{b_\alpha}$, так что существуют положительно определенные операторы $(E - \varkappa_\alpha A_\alpha)^{-1}$, $\alpha = 1, 2$.

III. Операторы A_1 и A_2 перестановочны, $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Лемма 1. *Если выполнены условия* I *и* II, *то оператор*

$$\tilde{A}_\alpha = (E - \varkappa_\alpha A_\alpha)^{-1} A_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \tag{6}$$

имеет границы $\tilde{a}_\alpha$ и $\tilde{b}_\alpha$, определяемые формулами

$$\tilde{a}_\alpha = \frac{a_\alpha}{1 - \varkappa_\alpha a_\alpha}, \quad \tilde{b}_\alpha = \frac{b_\alpha}{1 - \varkappa_\alpha b_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{7}$$

Представим $\tilde{A}_\alpha$ в виде $\tilde{A}_\alpha = (A_\alpha^{-1} - \varkappa_\alpha E)^{-1}$. Из условия $a_\alpha E \leqslant A_\alpha \leqslant b_\alpha E$, в силу самосопряженности A_α, A_α^{-1} и $A_\alpha^{-1} - \varkappa_\alpha E > 0$, следует, что $\frac{1}{b_\alpha} E \leqslant A_\alpha^{-1} \leqslant \frac{1}{a_\alpha} E$, $\left(\frac{1}{b_\alpha} - \varkappa_\alpha\right) E \leqslant A_\alpha^{-1} - \varkappa_\alpha E \leqslant \left(\frac{1}{a_\alpha} - \varkappa_\alpha\right) E$; так как $\varkappa_\alpha < \frac{1}{b_\alpha}$, то $\tilde{a}_\alpha E \leqslant \tilde{A}_\alpha = (A_\alpha^{-1} - \varkappa_\alpha E)^{-1} \leqslant \tilde{b}_\alpha E$. Лемма доказана.

Отметим, что лемма верна для неперестановочных операторов A_1 и A_2, заданных на гильбертовом пространстве любого числа измерений.

Теорема. *Если выполнены условия* I — III, *то уравнение* (5) *эквивалентно уравнению*

$$(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) v = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = (E - \varkappa_1 A_1)^{-1} (E - \varkappa_2 A_2)^{-1} \varphi, \tag{8}$$

где $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ определяются согласно (6) *и являются самосопряженными положительными операторами с границами $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1$ и $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_2$.*

В самом деле, (5) можно переписать в виде

$$A_1 (E - \varkappa_2 A_2) v + (E - \varkappa_1 A_1) A_2 v = \varphi. \tag{8'}$$

Применяя к (8′) оператор $(E - \varkappa_1 A_1)^{-1} (E - \varkappa_2 A_2)^{-1}$ и учитывая перестановочность всех операторов, получим (8). Обратный ход рассуждений очевиден.

Итак, решение уравнения (5) сведено к решению уравнения (8) с перестановочными, самосопряженными и положительными операторами

$\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$; собственные значения операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ принадлежат отрезкам $[\tilde{a}_1, \tilde{b}_1]$, $[\tilde{a}_2, \tilde{b}_2]$.

Итерационная схема переменных направлений для решения уравнения (8) рассматривалась в ([1]), где, в частности, приведем принадлежащий Жордану способ выбора оптимальных (точнее, практически оптимальных) итерационных параметров $\{\tau_s\}$, $\{\omega_s\}$. Напишем соответствующую схему ([1])

$$(E + \tau_s\tilde{A}_1)(E + \omega_s\tilde{A}_2)\overset{s+1}{y} = (E - \omega_s\tilde{A}_1)(E - \tau_s\tilde{A}_2)\overset{s}{y} + (\tau_s + \omega_s)\tilde{\varphi}.$$

Применим к обеим частям этого уравнения оператор $(E - \varkappa_1 A_1)(E - \varkappa_2 A_2)$ и учтем, что все операторы перестановочны и $(E - \varkappa_1 A_1)(E + \tau_s\tilde{A}_1) = E - \varkappa_1 A_1 + \tau_s(E - \varkappa_1 A_1)\tilde{A}_1 = E + (\tau_s - \varkappa_1)A_1$, $(E - \varkappa_1 A_1) \times (E - \omega_s\tilde{A}_1) = E - (\omega_s - \varkappa_1)A_1$ и т. д. В результате получим схему

$$(E + (\tau_s - \varkappa_1) A_1)(E + (\omega_s - \varkappa_2) A_2)\overset{s+1}{y} =$$
$$= (E - (\omega_s + \varkappa_1) A_1)(E - (\tau_s + \varkappa_s) A_2)\overset{s}{y} + (\tau_s + \omega_s)\varphi. \qquad (9)$$

Записывая ее в каноническом виде

$$(E + (\tau_s - \varkappa_1) A_1)(E + (\omega_s - \varkappa_2) A_2)\frac{\overset{s+1}{y} - \overset{s}{y}}{\tau_s + \omega_s} + A'\overset{s}{y} = \varphi,$$

убеждаемся в том, что она точно аппроксимирует (4) на решении v. Схему (9) реализуем при помощи алгорифма

$$\begin{aligned} (E + (\tau_s - \varkappa_1) A_1)\overset{s+1/2}{y} &= (E - (\tau_s + \varkappa_2) A_2)\overset{s}{y} + (\tau_s - \varkappa_1)\varphi, \\ (E + (\omega_s - \varkappa_2) A_2)\overset{s+1}{y} &= (E - (\omega_s + \varkappa_1) A_1)\overset{s+1/2}{y} + (\omega_s + \varkappa_1)\varphi. \end{aligned} \qquad (10)$$

Эквивалентность (9) и (10) доказывается по аналогии с ([5]). Из (10) находим

$$(\omega_s + \tau_s)\overset{s+1/2}{y} = (\omega_s + \varkappa_1)(E - (\tau_s + \varkappa_2) A_2)\overset{s}{y} +$$
$$+ (\tau_s - \varkappa_1)(E + (\omega_s - \varkappa_2) A_2)\overset{s+1}{y}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим (9). Обратный ход рассуждений очевиден.

Заметим, что все предыдущие рассуждения сохраняют силу и в случае абстрактного гильбертова пространства H, если A_1 и A_2 удовлетворяют условиям I—III.

Полученные в этом пункте результаты, очевидно, применимы не только для задачи Дирихле (1), но и для других задач, приводящих к уравнению вида (5).

4. Обратимся теперь к схеме повышенного порядка точности (1). В этом случае

$$A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad \varkappa_\alpha = {}^1/_{12}h_\alpha^2, \quad a_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad b_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2}\cos^2\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Если для $\overset{s+1/2}{y}$ мы хотим поставить обычные условия на γ_h, то следует использовать уравнение (11) при $x_1 = 0$, l_1. В самом деле, полагая в (11) $\overset{s}{y} = \overset{s+1}{y} = \mu$, $x \in \gamma_h$, получаем

$$\overset{s+1/2}{y} = \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} = \mu + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\Lambda_2\mu \quad \text{при } x_1 = 0,\ l_1,\ 0 < x_2 < l_2.$$

Порядок счета: 1) вычисляются $\tilde{a}_\alpha$ и $\tilde{b}_\alpha$; 2) по $\tilde{a}_\alpha$, $\tilde{b}_\alpha$ согласно ([1]) находятся параметры $\{\tau_s\}$ и $\{\omega_s\}$, соответствующие схеме (8); 3) после этого методом прогонки решается система (3) (ее разрешимость следует из того, что $\tilde{A}_\alpha > 0, \tau_s > 0, \omega_s > 0$).

В ([1]) получена приближенная формула для числа итераций $\nu(\varepsilon)$, обеспечивающих точность $\varepsilon > 0$. Для задачи (5) она имеет вид

$$\tilde{\nu}(\varepsilon) \doteq \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\tilde{\eta}} \ln \frac{4}{\varepsilon}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\eta} = \frac{1-\tilde{\xi}}{1+\tilde{\xi}}, \quad \tilde{\xi} = \sqrt{\frac{(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1)(\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2)}{(\tilde{b}_1 + \tilde{a}_2)(\tilde{b}_2 + \tilde{a}_1)}}.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно сравнить числа итераций для пятиточечной схемы второго порядка точности ($\nu(\varepsilon)$) и для схемы повышенного порядка точности ($\tilde{\nu}(\varepsilon)$). Из (12) видно, что $\frac{\tilde{\nu}(\varepsilon)}{\nu(\varepsilon)} \doteq \ln \frac{4}{\tilde{\eta}} \Big/ \ln \frac{4}{\eta}$, где η определяется по тем же формулам, что и $\tilde{\eta}$, если заменить в них $\tilde{a}_\alpha$ на a_α и $\tilde{b}_\alpha$ на b_α. Приведем результаты сравнения для случая квадрата со стороной $l_1 = l_2 = 1$ и квадратной сетки $h_1 = h_2 = h$ ($\tilde{\eta} = \tilde{a} / \tilde{b}$, $\eta = a / b$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$)

$$\frac{\tilde{\nu}}{\nu} \doteq \begin{cases} 1{,}1 & \text{при } h = 0{,}1, \\ 1{,}05 & \text{при } h = 0{,}02, \\ 1{,}04 & \text{при } h = 0{,}01. \end{cases}$$

Объем вычислений на каждую итерацию для обеих схем практически одинаков, а различие в числе итераций незначительно. Так как схема повышенного порядка точности позволяет пользоваться более грубой сеткой для достижения заданной точности, то ее применение особенно выгодно в тех случаях, когда решение $u = u(x)$ задачи (2) обладает достаточной гладкостью.

Поступило
11 XII 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. L. Wachspress, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 11, № 3, 994 (1963). [2] А. А. Самарский, В. Б. Андреев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 3, № 6, 1006 (1963). [3] А. А. Самарский, В. Б. Андреев, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 4, № 6, 1025 (1964). [4] В. А. Енальский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 74, 86 (1966). [5] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 4, 665 (1966).