Доклады Академии наук СССР
1968. Том 181, № 5

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

А. В. ГУЛИН, член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В КОМПЛЕКСНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работах ([1-4]) изучались вопросы теории разностных схем как операторных уравнений в вещественном гильбертовом пространстве. В настоящей заметке показано, что основные методы и результаты работ ([1-4]) можно перенести на случай комплексных пространств. Для двухслойных схем с постоянными операторами получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным в различных энергетических пространствах. Получены также достаточные условия устойчивости трехслойных схем. Выделение классов устойчивых схем позволяет проводить регуляризацию и построение абсолютно устойчивых факторизованных схем в комплексном гильбертовом пространстве. Отметим, что априорные оценки для некоторых разностных схем в комплексном гильбертовом пространстве получены в работах ([5-8]).

1. Поясним обозначения: $\{H_h\}$ — множество комплексных гильбертовых пространств, зависящих от параметра h; h — элемент некоторого нормированного пространства с нормой $|h|$; $\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots \ldots, n_0\}$ — сетка на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ с шагом $\tau = t_0 / n_0$; $y(t) = y_{h,\tau}(t)$ — функция действительного дискретного аргумента $t = t_n$ со значениями в H_h. Индексы h, τ в дальнейшем часто опускаются.

В H_h определено скалярное произведение $(y, v) = \overline{(v, y)}$, и норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Любой линейный оператор A можно представить в виде суммы $A = A_0 + iA_1$, $A_0 = \operatorname{Re} A = {}^1/_2 (A^* + A)$, $A_1 = \operatorname{Im} A = \dfrac{i}{2} (A^* - A)$.

Оператор A, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, называется положительным, $A > 0$, если $A = A^*$ и $(Ax, x) > 0$ для всех $x \in H$, $x \neq 0$; неотрицательным, $A \geqslant 0$, если $A = A^*$ и $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Если $A > 0$, то можно рассматривать гильбертово пространство H_A элементов y, $v \in H$ со скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$.

Мы рассматриваем двухслойные разностные схемы (см. ([1]))

$$By_t + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

где A и B — линейные операторы на H_h, $y_0 \in H_h$ — заданный элемент, $y = y_n = y(t_n)$, $y_t = (y_{n+1} - y_n) / \tau$, $n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$.

2. Следуя ([2]), будем говорить, что схема (1) устойчива по начальным данным в H_A, где $A > 0$ — постоянный линейный оператор над H_h, если существует такое действительное число c_0, не зависящее от τ и h, что при достаточно малых τ и $|h|$ для решения задачи (1) с любыми начальными данными $y_0 \in H_h$ верна оценка

$$\|y_n\|_A \leqslant e^{c_0 t_n} \|y_0\|_A = \rho^n \|y_0\|_A, \quad t_n = \tau n, \quad n = 1, 2, \ldots, n_0. \tag{2}$$

Схема (1) абсолютно устойчива, если (2) выполняется при любых $\tau > 0$ и $|h| > 0$.

В данной заметке мы ограничиваемся изучением устойчивости с постоянными операторами A и B.

Наряду с (1) будем рассматривать явную схему

$$x_t + Cx = 0, \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

или, в другой записи,

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1, \quad S = E - \tau C. \tag{4}$$

Следующая лемма позволяет свести изучение устойчивости схемы (1) к изучению устойчивости явной схемы (3).

Лемма 1. *Пусть в (1) A и B — постоянные (не зависящие от t) операторы. Тогда, если $A > 0$ и существует B^{-1}, то устойчивость в H схемы (3) с $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ эквивалентна устойчивости в H_A схемы (1). Если $B > 0$, то устойчивость в H схемы (3) с $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ эквивалентна устойчивости в H_B схемы (1).*

Доказательство этой леммы, ввиду полной аналогии со случаем действительных пространств (см. [2]), опускаем.

Так же как и в [2], можно показать, что, если оператор C — постоянный, то для устойчивости в H схемы (3) необходимо и достаточно выполнения оценки

$$\|S\| \leqslant \rho, \tag{5}$$

где $\rho = e^{c_0\tau}$ и $S = E - \tau C$.

Если в (1) A и B — постоянные положительные операторы, то сохраняют силу все теоремы из [2], и поэтому мы не формулируем здесь соответствующих результатов для схем в комплексном пространстве.

3. Докажем леммы, которые позволяют исследовать устойчивость явной схемы (3).

Лемма 2. *Пусть $S = E - \tau C$, где $C = C_0 + iC_1$, $C_0 \geqslant 0$ и оператор C^{-1} существует. Тогда условие*

$$(1 + \rho)(C^{-1})_0 \geqslant \tau E, \qquad (C^{-1})_0 = \operatorname{Re} C^{-1}, \tag{6}$$

при $\rho \geqslant 1$ достаточно и при $0 < \rho \leqslant 1$ необходимо для выполнения оценки (5).

Доказательство. Замечая, что (6) эквивалентно условию

$$\tau\|Cx\|^2 \leqslant (1 + \rho)(C_0x, x), \tag{7}$$

получим, что, если выполнено (6), то для любого $x \in H$

$$\|Sx\|^2 = \|x\|^2 - 2\tau(C_0x, x) + \tau^2\|Cx\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \tau(\rho - 1)(C_0x, x). \tag{8}$$

Далее, из (7) и из неравенства

$$(C_0x, x)^2 \leqslant \|x\|^2\|Cx\|^2 \tag{9}$$

получим оценку

$$\tau(C_0x, x) \leqslant (1 + \rho)\|x\|^2,$$

подставляя которую в (8), видим, что при $\rho \geqslant 1$ для любого $x \in H$ будет $\|Sx\|^2 \leqslant \rho^2\|x\|^2$, т. е. справедливо неравенство (5).

Обратно, если выполнена оценка (5), то при любом $x \in H$ имеет место неравенство

$$(1 - \rho^2)\|x\|^2 - 2\tau(C_0x, x) + \tau^2\|Cx\|^2 \leqslant 0, \tag{10}$$

откуда, учитывая (9), получим, что

$$(1 + \rho)\|x\| \geqslant \tau\|Cx\|. \tag{11}$$

Если $\rho \leqslant 1$, то из (10) и (11) следует (7).

Лемма 3. *Пусть $S = E - \tau C$, где $C = C_0 + iC_1$, $\rho > 0$ — число. Тогда условие*

$$\tau C_0 \leqslant (1 + \rho)E \tag{12}$$

необходимо для выполнения оценки (5).

Доказательство. Так как для любого оператора $\|\mathrm{Re}\, S\| \leqslant \|S\|$, то из (5) следует оценка

$$\|E - \tau C_0\| \leqslant \|E - \tau C\| \leqslant \rho.$$

Отсюда, учитывая самосопряженность оператора C_0, имеем

$$-\rho E \leqslant E - \tau C_0 \leqslant \rho E.$$

Из этих неравенств получим, в частности, условие (12).

4. Сформулированные ниже теоремы являются следствиями лемм 1—3 настоящей работы, теоремы 1 и леммы 2 из ([2]).

Теорема 1. *Пусть в схеме* (1) A *и* B — *постоянные операторы,* $B = B_0 + iB_1, B_0 \geqslant 0$. B^{-1} *существует,* $A > 0$; $\rho = e^{c_0\tau}$, $c_0 \geqslant 0$.

Тогда условие

$$(1 + \rho) B_0 \geqslant \tau A \tag{13}$$

достаточно и условие

$$\tau (B^{-1})_0 \leqslant (1 + \rho) A^{-1} \tag{14}$$

необходимо для устойчивости в H_A *схемы* (1). *Условие* (13) *с* $\rho = 1$ *необходимо и достаточно для устойчивости* (*с* $c_0 = 0$) *схемы* (1) *в* H_A.

Теорема 2. *Пусть в схеме* (1) A *и* B — *постоянные операторы,* $B > 0, A = A_0 + iA_1, A_0 \geqslant 0, A^{-1}$ *существует и* $\rho = e^{c_0\tau}$, $c \geqslant 0$.

Тогда условие

$$(1 + \rho) (A^{-1})_0 \geqslant \tau B^{-1} \tag{15}$$

достаточно и условие

$$(1 + \rho) B \geqslant \tau A_0 \tag{16}$$

необходимо для устойчивости в H_B *схемы* (1). *Условие* (15) *с* $\rho = 1$ *необходимо и достаточно для устойчивости* (*с* $c_0 = 0$) *схемы* (1) *в* H_B.

Условие (15) содержит обратные операторы и поэтому неудобно для проверки. Приведем две теормы, дающие достаточные условия устойчивости при более сильных ограничениях на операторы разностной схемы.

Теорема 3. *Пусть в схеме* (1) A *и* B — *постоянные перестановочные операторы,* $B > 0$, $A = A_0 + iA_1$, $A_0 \geqslant 0$, A — *нормальный оператор,* $A^*A = AA^*$, *и пусть существуют неотрицательные постоянные* c_1 *и* c_2, *не зависящие от* h *и* τ, *такие, что при всех* $x \in H$ *выполнены условия*

$$\sqrt{\tau}\, |(A_1 x, x)| \leqslant c_2 (Bx, x), \tag{17}$$

$$(1 + \rho) B \geqslant \tau A_0, \tag{18}$$

где $\rho = e^{c_1\tau}$. *Тогда схема* (1) *устойчива в* H_B *с* $c_0 = c_1 + {}^1/_2 c_2^2$.

Теорема 4. *Пусть в схеме* (1) A *и* B — *постоянные операторы,* $B > 0$, $A = A_0 + iA_1$, $A \geqslant 0$ *и пусть существуют неотрицательные постоянные* c_1 *и* c_2, *не зависящие от* h *и* τ, *такие, что при всех* $x \in H$ *выполнены условия*

$$|(A_1 x, x)| \leqslant c_2 (Bx, x), \tag{19}$$

$$(1 + \rho) B \geqslant \tau A_0, \tag{20}$$

где $\rho = e^{c_1\tau}$. *Тогда схема* (1) *устойчива в* H_B *с* $c_0 = c_1 + c_2$.

Не останавливаясь на формулировке достаточных условий устойчивости по правой части и для схем с переменными операторами, отметим только, что и в этом случае справедливы оценки, аналогичные тем, которые получены в работах ([2, 4]).

5. Достаточные условия устойчивости (13) позволяют осуществить регуляризацию (см. ([3])) неустойчивых двухслойных схем и построение абсолютно устойчивых факторизованных схем.

Рассмотрим, например, явную двухслойную схему

$$iy_t + Ay = \varphi(t), \quad A = A_1 + A_2, \quad A_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{21}$$

Согласно теореме 1, эта схема устойчива по начальным данным (с $\rho = 1$)

в H_A тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$B_0 \geqslant {}^1/_2 \tau A. \tag{22}$$

В данном случае $B = iE$, $B_0 = 0$, $B_1 = E$. Следовательно, схема (21) абсолютно неустойчива. Поэтому вместо (21) надо пользоваться регуляризованной схемой

$$iy_t + \tau R y_t + Ay = \varphi(t), \tag{23}$$

которая, согласно теореме 1, абсолютно устойчива в H_A (с $\rho = 1$) при всяком R, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{Re} R = R_0 \geqslant {}^1/_2 A. \tag{24}$$

Пусть выполнено (24) и, кроме того,

$$R = R_1 + R_2, \quad R_\alpha > 0, \quad \alpha = 1,2, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1.$$

Тогда факторизованная схема

$$\widetilde{B} y_t + Ay = \varphi, \quad \widetilde{B} = -i \prod_{\alpha=1}^{2} (iE + \tau R_\alpha) = iE + \tau R - i\tau^2 R_1 R_2 \tag{25}$$

абсолютно устойчива в H_A с $\rho = 1$, так как

$$\operatorname{Re} \widetilde{B} = \tau R \geqslant {}^1/_2 \tau A.$$

6. Сформулируем достаточные условия устойчивости трехслойной разностной схемы

$$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \tag{26}$$

где A, B, R — линейные операторы в H_h, $y = y_n = y(t_n)$,

$y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$, $y_{\bar{t}} = (y_n - y_{n-1})/\tau$, $y_{\overset{\circ}{t}} = {}^1/_2 (y_t + y_{\bar{t}})$, $y_{\bar{t}t} = (y_t - y_{\bar{t}})/\tau$.

Теорема 5. *Пусть в схеме* (26) *операторы* A, R *— постоянные и самосопряженные,* $B = B_0 + iB_1$. *Тогда, если выполнены условия*

$$B_0 \geqslant 0, \quad 4R - A \geqslant 0, \quad A > 0, \tag{27}$$

то для решения задачи (26) *справедлива оценка*

$$\|y_n\|_{(1)} \leqslant \|y_1\|_{(1)}, \tag{28}$$

где

$$\|y_n\|_{(1)}^2 = {}^1/_4 (A(y_n + y_{n-1}), y_n + y_{n-1}) + ((R - {}^1/_4 A)(y_n - y_{n-1}), y_n - y_{n-1}).$$

Поступило
28 III 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, ДАН, 165, № 5, 1007 (1965). [2] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4 (1968). [3] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 1, 62 (1967). [4] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 5, 1096 (1967). [5] О. А. Ладыженская, Матем. сборн., 39(81), № 4, 491 (1956). [6] J. Gunn, SIAM J. on Numerical Analysis, 2, № 1, 24 (1965). [7] P. A. Raviart, J. math. pures et appl., 46, № 1, 11 (1967). [8] P. D. Lax, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., 19, № 4, 473 (1966).